



7.2 Propriétés du déterminant, astuces de calcul



Comme je prétends que le déterminant va être quelque chose d'utile, alors ce serait bien d'avoir des astuces de calcul qui vont venir quand je vous explique quelques propriétés. Comme je l'ai dit dans l'introduction de ce chapitre ce sont plein de propriétés que je ne vais pas pouvoir vous démontrer. c'est la première fois dans le cours où je vous demande d'admettre plein de faits, pour avancer plus rapidement.

Notes

Summary



0m 04s

Proposition. Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On fixe une ligne ou une colonne de A (p -ième ligne, r -ième colonne).

$$\det(A) = a_{p1}(-1)^{p+1}\det(\hat{A}_{p1}) + a_{p2}(-1)^{p+2}\det(\hat{A}_{p2}) + \cdots + a_{pn}(-1)^{p+n}\det(\hat{A}_{pn}).$$

$$\det(A) = a_{1r}(-1)^{1+r}\det(\hat{A}_{1r}) + a_{2r}(-1)^{2+r}\det(\hat{A}_{2r}) + \cdots + a_{nr}(-1)^{n+r}\det(\hat{A}_{nr}).$$

e.g. $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -5$

7.2 Propriétés du déterminant, astuces de calcul



Alors je me donne une matrice de taille $n \times n$, et je fixe soit la p -ième ligne, soit la r -ième colonne de la matrice et je dis que le déterminant de A , on pourrait le calculer en suivant la p -ième ligne, exactement comme on a suivi la ligne numéro un, dans la définition, mais on doit faire attention au signe avec lequel on commence, donc on sait qu'après ça alterne mais on commence avec un signe qui dépend des indices ici. Je vous montrerai après comment je fais dans l'exemple. Et puis, donc on suit la p -ième ligne, les signes alternent, et on descend comme avant vers la matrice, de taille encore plus petite, et on calcule le déterminant de cette matrice-là. On pourrait aussi faire la même chose avec une colonne fixe. Donc on fixe la r -ième colonne, et on doit déterminer si on commence avec le signe $+$ ou le signe $-$, ça on le détermine selon les indices ici. Et ensuite on suit cette colonne-là et on supprime la ligne et la colonne, etc. Et puis, on calcule le déterminant des matrices résultantes. Donc c'est exactement la même procédure que quand on suivait la première ligne, mais on aurait aussi pu suivre une autre ligne ou bien la même colonne et ça donne le même résultat.

Notes

Summary



0m 32s

Proposition. Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On fixe une ligne ou une colonne de A (p -ième ligne, r -ième colonne).

$$\det(A) = a_{p1}(-1)^{p+1}\det(\hat{A}_{p1}) + a_{p2}(-1)^{p+2}\det(\hat{A}_{p2}) + \cdots + a_{pn}(-1)^{p+n}\det(\hat{A}_{pn}).$$

$$\det(A) = a_{1r}(-1)^{1+r}\det(\hat{A}_{1r}) + a_{2r}(-1)^{2+r}\det(\hat{A}_{2r}) + \cdots + a_{nr}(-1)^{n+r}\det(\hat{A}_{nr}).$$

e.g. $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -5$

On développe par rapport à la 1^{ère} colonne :

$$1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7.2 Propriétés du déterminant, astuces de calcul

C'est vraiment étonnant, ça n'a pas d'importance quelle ligne on choisit, ni quelle colonne. C'est vraiment étonnant. Donc ici je refais un exemple, qu'on a déjà fait, donc on a déjà calculé le déterminant de cette matrice, et maintenant je vais utiliser ça, je vais la calculer de deux façons différentes. Pour illustrer cette proposition, je vais recalculer le déterminant de cette matrice, et je vais le faire de deux façons différentes. Par exemple je vais d'abord développer le long de cette première colonne donc j'utilise ici la proposition avec $r = 1$. Maintenant, le signe ici en haut c'est toujours +. Et d'ailleurs comme on décide dans la matrice quel est le signe qui va avec pas besoin d'utiliser cette formule. On commence ici avec +, et après, à chaque fois qu'on fait un pas à droite ou en bas, se baladant dans la matrice, mais pas des pas diagonaux alors on change de signes, donc c'est +, -, +, -, etc. Comme c'est +, -, +, -, pour la première colonne, j'aurai 1 fois le déterminant, de la matrice de taille 3×3 , que j'obtiens quand je supprime la première ligne et la première colonne. plus 0 fois quelque chose.

Notes

Summary



1m 59s

Proposition. Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On fixe une ligne ou une colonne de A (p -ième ligne, r -ième colonne).

$$\det(A) = a_{p1}(-1)^{p+1}\det(\hat{A}_{p1}) + a_{p2}(-1)^{p+2}\det(\hat{A}_{p2}) + \dots + a_{pn}(-1)^{p+n}\det(\hat{A}_{pn}).$$

$$\det(A) = a_{1r}(-1)^{1+r}\det(\hat{A}_{1r}) + a_{2r}(-1)^{2+r}\det(\hat{A}_{2r}) + \dots + a_{nr}(-1)^{n+r}\det(\hat{A}_{nr}).$$



7.2 Propriétés du déterminant, astuces de calcul

e.g. $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -5$

On développe par rapport à la 1^{ère} colonne :

$$1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 1 - 3(2) - 2(1) = -5$$



Notes

Plus -1 fois le déterminant de la matrice, que j'obtiens si je supprime la troisième ligne et la première colonne. Donc ça me laisse [voir écran] Maintenant je continue, ici je peux choisir la première ligne ou la première colonne, comme il y a un 0 dans la première ligne, j'utilise celle-ci. Maintenant, les signes recommencent avec cette matrice, donc pour cette matrice "3 x 3", j'ai 1 fois le déterminant de la matrice 2 x 2 [voir écran] plus - 3 fois le déterminant de la matrice 2 x 2 que j'obtiens là, Maintenant, je vais utiliser la première ligne, car là il y a deux 0, donc ça c'est bien. Donc j'ai (-1) fois... ensuite j'ai 0 fois quelque chose, 0 quelque chose et (+2) fois la matrice 2 x 2 que j'obtiens quand je supprime la première ligne et la troisième colonne. Maintenant je fais le calcul. J'ai [voir écran], le résultat, c'est de nouveau -5. Et puis maintenant, je vais faire de nouveau autrement, je vais utiliser la dernière ligne. Donc on développe, par rapport à la quatrième ligne, et par rapport à cette ligne, j'ai (-0), fois quelque chose plus (+0) fois quelque chose, et après j'ai (-1) fois la matrice 3 x 3, que j'obtiens si je supprime la quatrième ligne et la troisième colonne.

Summary



3m 39s

Proposition. Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On fixe une ligne ou une colonne de A (p -ième ligne, r -ième colonne).

$$\det(A) = a_{p1}(-1)^{p+1}\det(\hat{A}_{p1}) + a_{p2}(-1)^{p+2}\det(\hat{A}_{p2}) + \dots + a_{pn}(-1)^{p+n}\det(\hat{A}_{pn}).$$

$$\det(A) = a_{1r}(-1)^{1+r}\det(\hat{A}_{1r}) + a_{2r}(-1)^{2+r}\det(\hat{A}_{2r}) + \dots + a_{nr}(-1)^{n+r}\det(\hat{A}_{nr}).$$

On développe par rapport à la 4^e ligne:

$$-0 \cdot + 0 \cdot -1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(-1)(1) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1(1+2) + 2(2-3) = -3-2 = -5$$

$$\text{e.g. } \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -5$$

On développe par rapport à la 4^e colonne:

$$1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 1 - 3(2) - 2(1) = -5$$

7.2 Propriétés du déterminant, astuces de calcul



Donc ça me laisse [voir écran] Donc si je fais +, -, +, -, +, -, +, j'ai (+2) fois le déterminant de ce que j'obtiens si maintenant, je supprime tout ça et je prends cette matrice-là dans le coin. Et ceci est égal à Donc ici je vais utiliser la deuxième ligne car il n'y a que deux 0 là. Ensuite j'ai +, -, +, donc (+1) fois le déterminant de la matrice 2 x 2, que j'obtiens ici dans le coin [voir écran]. Ensuite ici j'ai 2 fois, ici j'utilise la première ligne car là il y a deux 0, donc fois le déterminant de la matrice ici dans le coin. Donc j'ai donc "1" moins "2" Donc j'ai finalement, j'ai de nouveau le résultat - 5, ouf ! Donc là c'est pour vous montrer qu'on peut développer par rapport à n'importe quelle ligne, n'importe quelle colonne Et je ne vous l'ai pas justifié, c'est une démonstration compliquée, mais vous voyez l'utilité : vous pouvez choisir une ligne ou une colonne où il y a beaucoup de 0. D'ailleurs, si une ligne ne comporte que des 0, le déterminant est alors 0. Il existe d'autres astuces très utiles, qui sont dans la liste des propriétés que je donne maintenant.

Notes

Summary



5m 59s

Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

- (1) Soit $B = L_{rs}(\lambda)A$. Alors $\det(B) = \det(A)$.
- (2) Soit $B = T_{rs}A$. Alors $\det(B) = -\det(A)$.
- (3) Soit $B = D_r(\lambda)A$. Alors $\det(B) = \lambda \det(A)$.
- (4) Soit $C = AL_{rs}(\lambda)$. Alors $\det(C) = \det(A)$.
- (5) Soit $C = AT_{rs}$. Alors $\det(C) = -\det(A)$.
- (6) Soit $C = AD_r(\lambda)$. Alors $\det(C) = \lambda \det(A)$.

(1) Rajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne de la matrice donne une matrice dont le déterminant est le même que le déterminant de la matrice originale.

7.2 Propriétés du déterminant, astuces de calcul



Donc je me donne une matrice $n \times n$, et toute cette liste de propriétés, c'est, parce que je veux savoir ce qui se passe si je fais des opérations élémentaires sur les lignes, ou les colonnes de la matrice. Car je sais que je peux beaucoup simplifier une matrice avec ces opérations et si j'ai de la chance, ça n'a pas beaucoup d'effet sur le déterminant ou, du moins, un effet que je connais. Donc c'est exactement ce que dit la proposition et ce qui est super, c'est que si on fait l'opération qu'on préfère c'est-à-dire si on rajoute un multiple d'une ligne à une autre, alors le déterminant ne change pas. Donc ça c'est super utile, je vais ici souligner la propriété (1), qui veut dire rajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne de la matrice donne une matrice dont le déterminant est le même que la matrice originale. Donc ça c'est vraiment très bien. Maintenant, la deuxième propriété : on fait l'opération élémentaire où on échange les lignes r et s de la matrice. Et ça a effectivement un effet sur le déterminant, ça donne une matrice dont le déterminant est égal à -1 , fois le déterminant de la matrice originale.

Notes

Summary



8m 04s

Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

- (1) Soit $B = L_{rs}(\lambda)A$. Alors $\det(B) = \det(A)$.
- (2) Soit $B = T_{rs}A$. Alors $\det(B) = -\det(A)$.
- (3) Soit $B = D_r(\lambda)A$. Alors $\det(B) = \lambda \det(A)$.
- (4) Soit $C = AL_{rs}(\lambda)$. Alors $\det(C) = \det(A)$.
- (5) Soit $C = AT_{rs}$. Alors $\det(C) = -\det(A)$.
- (6) Soit $C = AD_r(\lambda)$. Alors $\det(C) = \lambda \det(A)$.

- (1) Rajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne de la matrice donne une matrice dont le déterminant est le même que le déterminant de la matrice originale.
- (2) échanger deux lignes de la matrice introduit un facteur de (-1) dans le déterminant.
- (4) Rajouter un multiple d'une colonne à une autre colonne de la matrice ne change pas le déterminant.

7.2 Propriétés du déterminant, astuces de calcul



Dit plus clairement : si on échange deux lignes dans une matrice, on va multiplier le déterminant par -1 . La troisième propriété nous dit ce qui se passe si on multiplie une ligne de la matrice par λ . Le résultat c'est une matrice dont le déterminant est λ fois le déterminant de la matrice originale. Bon, là je ne vais pas écrire. Et les propriétés suivantes répondent à la question : si on fait des opérations sur les colonnes au lieu de les faire sur les lignes, quel est l'effet ? Ici la quatrième est de nouveau très importante, car c'est comme la première. Donc c'est la propriété (1), mais pour les colonnes, donc ici je souligne, car c'est le plus utile : Rajouter un multiple d'une colonne à une autre colonne de la matrice, ne change pas le déterminant. Et ce, dans le même sens que ce que j'ai dit là-haut, ça donne une nouvelle matrice dont le déterminant, c'est le même que le déterminant de la matrice originale. Par contre si vous échangez deux colonnes, c'est ça l'opération à droite ici, alors ça donne une matrice dont le déterminant est moins une fois le déterminant de la matrice originale. Et si vous multipliez une colonne par λ , alors ça change aussi le déterminant, qui est multiplié par ce même λ .

Notes

Summary



Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

- (1) Soit $B = L_{rs}(\lambda)A$. Alors $\det(B) = \det(A)$.
- (2) Soit $B = T_{rs}A$. Alors $\det(B) = -\det(A)$.
- (3) Soit $B = D_r(\lambda)A$. Alors $\det(B) = \lambda \det(A)$.
- (4) Soit $C = AL_{rs}(\lambda)$. Alors $\det(C) = \det(A)$.
- (5) Soit $C = AT_{rs}$. Alors $\det(C) = -\det(A)$.
- (6) Soit $C = AD_r(\lambda)$. Alors $\det(C) = \lambda \det(A)$.

- (1) Rajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne de la matrice donne une matrice dont le déterminant est le même que le déterminant de la matrice originale.
- (2) échanger deux lignes de la matrice introduit un facteur de (-1) dans le déterminant.
- (4) Rajouter un multiple d'une colonne à une autre colonne de la matrice ne change pas le déterminant.

7.2 Propriétés du déterminant, astuces de calcul



Ce sont donc des propriétés très importantes Je vais illustrer ça avec un exemple, qui montre comment on peut l'utiliser pour simplifier le calcul du déterminant.

Notes

Summary



Exemple.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tau_{12}} (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -8 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

\uparrow
 $L_{21}(-2)$
 $L_{41}(-1)$

7.2 Propriétés du déterminant, astuces de calcul



Je prends une nouvelle matrice, et je souhaite calculer son déterminant, je commence par simplifier la matrice, en utilisant les opérations sur les lignes, ou bien les colonnes, jusqu'à ce que j'ai introduit plein de 0 dans la matrice, et ensuite ça serait plus facile à calculer. Donc, ici j'ai déjà fait une opération, car là, j'ai échangé la première et la deuxième ligne. Donc ça c'était un échange de lignes. C'est pour ça qu'il y a ce signe -1. Maintenant je vais utiliser l'opération de type III, celle qu'on utilise le plus, les $L_{rs}(\lambda)$. Je vais rajouter à la deuxième ligne (-2) fois la première ligne. Et comme je sais que ça ne change pas le déterminant, ceci est égal à : donc ici je re-écris la première ligne. Je vais indiquer les opérations que je fais, ici. Je vais rajouter à la deuxième ligne -2 fois la première ligne, et je vais rajouter à la quatrième ligne -1 fois la première ligne. Et ces deux opérations élémentaires sur les lignes ne changent pas le déterminant. Donc j'ai exactement -1 fois le déterminant. Donc ici j'ai pour ma ligne -2 + 2 = 0, -6 + 1 = -5, -8 + 0 = -8, et -10 + 1 = -9.

Notes

Summary



11m 35s

Exemple.

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} &\stackrel{T_{12}}{=} (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{L_{21}(-2) \\ L_{41}(-1)}}{=} (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -8 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \stackrel{T_{23}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -9 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{L_{32}(5) \\ L_{42}(-2)}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

7.2 Propriétés du déterminant, astuces de calcul

Ensuite je laisse la troisième ligne. Finalement, j'ai $-1 + 1 = 0$, $-3 + 5 = 2$, $-4 - 1 = -5$ et pour finir $-5 + 2 = -3$. Maintenant j'aimerais encore introduire des 0 dans cette matrice car elle n'en a pas encore beaucoup. Donc ici je vais échanger les lignes 2 et 3, donc ça va annuler ce -1 devant le déterminant. Donc j'aurai $(-1)(-1) = 1$, fois le déterminant. Donc ici j'indique que je vais échanger les lignes 2 et 3 de la matrice. C'est le déterminant de [voir écran]. Et puis je vais éliminer ces deux valeurs-là, ça c'est le déterminant de la matrice... Et que vais-je faire ici ? Je vais rajouter à la troisième ligne cinq fois la deuxième et ensuite je vais rajouter à la quatrième ligne moins deux fois la deuxième. Je ne change pas la première ligne. La deuxième non plus. Donc maintenant ici je rajoute cinq fois cette ligne à celle-là, donc j'ai 0, puis $-5 - 8 = -13$, $0 + (-9) = -9$. Ensuite je rajoute (-2) fois cette ligne à la dernière, j'ai donc 0, puis $(-2)(-1) + (-5) = -3$ et $0 + (-3) = -3$. Maintenant je vais calculer le déterminant. Vous verrez, c'est très simple. Je descends la première colonne.

Notes

Summary



Exemple.

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} &\stackrel{T_{12}}{=} (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{L_{21}(-2) \\ L_{41}(-1)}}{=} (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -8 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \stackrel{T_{23}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -9 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{L_{32}(5) \\ L_{42}(-2)}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\
 &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -13 & -9 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = 39 - 27 = 12.
 \end{aligned}$$

7.2 Propriétés du déterminant, astuces de calcul

Donc j'ai 1 fois le déterminant de la matrice 3×3 , ici dans le coin, $+0 + 0 + 0$. Ensuite ici aussi je descends la première colonne, donc ça c'est de nouveau avec le signe $+$, on recommence avec la définition de base, donc j'ai 1 fois le déterminant de la matrice [voir écran] $+0 + 0$. Donc enfin j'ai $1((-13)(-3) - (-3)(-9)) = 39 - 27 = 12$. Donc maintenant vous devez avoir compris l'utilité de ces opérations. Donc on simplifie d'abord la matrice, et enfin dans la matrice il y aura beaucoup de 0, et on peut utiliser la définition, on choisit une colonne ou une ligne avec beaucoup de 0 et on calcule le déterminant.

Notes

Summary



Proposition. Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure). Alors $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$, i.e. $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux de A .

esquisse de preuve :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & * \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & & * \\ 0 & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Proposition. $\det(A^T) = \det(A)$.

7.2 Propriétés du déterminant, astuces de calcul

Maintenant, de ça on peut déduire en fait, une autre proposition, aussi très utile, qui d'ailleurs nous donne une méthode, c'est que si je me donne une matrice qui est ou bien triangulaire, inférieure ou supérieure, alors son déterminant c'est juste le produit des coefficients diagonaux de la matrice. Ici je dis une esquisse de preuve. C'est juste l'idée. Je fais le cas triangulaire supérieur. Si vous avez le déterminant d'une matrice comme ça, où là j'ai des 0 ensuite encore des 0, etc. Donc ici jusqu'à a_{nn} et là en bas j'ai des 0. Et là je ne sais pas ce que j'ai Alors vous allez descendre la première colonne donc d'abord vous avez a_{11} , avec un signe +, ensuite vous avez le déterminant de la matrice ici, avec des 0 en bas. Donc là, on a une matrice avec des 0, et quelque chose en haut. Et maintenant je recommence, car le reste c'était des 0. J'ai a_{11} un signe + ici car j'ai une nouvelle matrice, fois a_{22} fois le déterminant de la matrice qui commence ici avec a_{33} , etc.

Notes

Summary



16m 26s

Proposition. Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure). Alors $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$, i.e. $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux de A .

Proposition. $\det(A^T) = \det(A)$.

esquisse de preuve :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ 0 & a_{22} & & \\ & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & & \\ 0 & a_{33} & & \\ & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \det \begin{pmatrix} a_{33} & & \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Méthode générale pour calculer $\det(A)$:
On réduit A à une matrice triangulaire, en tenant compte de l'effet des opérations élémentaires sur le déterminant. On applique la proposition.



7.2 Propriétés du déterminant, astuces de calcul

Et ainsi de suite, donc à la fin après plusieurs étapes, on a le produit $a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}$. Donc en fait ça, nous donne une méthode générale, pour calculer le déterminant d'une matrice A : on utilise les opérations élémentaires pour la réduire à une matrice triangulaire on tient compte de l'effet de ces opérations et après on multiplie les coefficients le long de la diagonale donc on réduit A à une matrice triangulaire supérieure ou inférieure, et à la fin on a une matrice triangulaire inférieure ou supérieure, et après on applique la proposition. Donc ça c'est une méthode générale de calcul du déterminant, qui est assez efficace. Enfin, je veux juste mentionner une dernière propriété, qui est sous-entendue dans tout ce que j'ai dit jusqu'à présent si vous calculez le déterminant de la transposée d'une matrice c'est la même chose que le déterminant de la matrice. Et ça, c'est vu dans toutes ces propriétés où j'ai dit on peut faire ça avec les lignes, ou bien avec les colonnes. Je n'ai pas démontré ces propriétés, mais vous pouvez maintenant les utiliser.

Notes

Summary



18m 01s