



7.3 Critère d'inversibilité

Jusqu'à maintenant, nous avons passé deux paragraphes à apprendre à calculer le déterminant sans savoir pourquoi on va l'utiliser. Eh bien maintenant, je vais vous démontrer ce critère d'inversibilité qui est donné par le déterminant dont j'ai parlé dans l'introduction du chapitre.

Notes

Summary



0m 04s

Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Preuve Supposons que A est inversible. Alors il existe des matrices élémentaires E_1, \dots, E_t telles que $E_t \cdots E_2 E_1 A = I$.

7.3 Critère d'inversibilité



Donc la proposition que je pourrais même appeler un théorème parce que c'est vraiment très important c'est que je me donne une matrice $n \times n$; alors cette matrice est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro. C'est un critère net. Vous calculez le déterminant. Si le déterminant est zéro, on sait que la matrice n'est pas inversible et si le déterminant est non zéro, on sait que la matrice est inversible. Et puis j'ai mis en place assez de choses, en admettant certaines propriétés pour vous montrer comment on pourrait démontrer cette proposition. Preuve : Donc d'abord je suppose que la matrice est inversible. Maintenant on sait que si une matrice est inversible, on peut opérer à gauche par les opérations élémentaires sur les lignes et la ramener à la matrice identité. Alors il existe des matrices élémentaires E_1, \dots, E_t , telles que si j'opère sur A , donc dans ce sens-là, je fais d'abord E_1 qui multiplie A , ensuite E_2 , jusqu'à E_t , j'obtiens la matrice identité. Maintenant, le déterminant de la matrice identité, comme c'est une matrice triangulaire, c'est égal à 1.

Notes

Summary



Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Preuve Supposons que A est inversible. Alors il existe des matrices élémentaires E_1, \dots, E_t telles que $E_t \cdots E_1 A = I$.

$$1 = \det(I) = \det(E_t \cdots E_1 A)$$

$$\det(E_i A) = c_i \cdot \det(A) \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad c_i \neq 0.$$

7.3 Critère d'inversibilité



Le déterminant de la matrice identité est égal à 1 et c'est également le déterminant de cette matrice $E_t \cdots E_1 A$ qui est un produit de beaucoup de matrices. Par contre, on a aussi vu la propriété suivante : c'est que si je fais les déterminants de $E_1 A$ alors cette matrice E_1 , c'est ou bien échanger deux lignes ou bien multiplier une ligne par λ ou bien rajouter un multiple d'une ligne de A à une autre ligne. Et puis on sait que l'effet de ça sur le déterminant c'est que, quand on échange de ligne, on introduit un -1 , quand on multiplie une ligne par λ , cette matrice aura pour déterminant λ fois le déterminant de A et puis, quand on rajoute un multiple d'une ligne à une autre ça ne change pas le déterminant. Ici, de toute façon, ce que j'obtiens c'est une constante, c_1 fois le déterminant de A et cette constante, c'est une valeur réelle et elle est non nulle. Elle est non nulle parce que c'est -1 si l'opération c'est d'échanger des lignes, et c'est λ si on multiplie une ligne par λ mais c'est une opération élémentaire que quand λ est non nul.

Notes

Summary



1m 48s

Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Preuve Supposons que A est inversible. Alors il existe des matrices élémentaires E_1, \dots, E_t telles que $E_t \cdots E_1 A = I$.

$$1 = \det(I) = \det(E_t \cdots E_1 A)$$

$$\det(E_1 A) = c_1 \cdot \det(A) \quad c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0.$$

$$\det(E_2 E_1 A) = c_2 \cdot c_1 \cdot \det A \quad c_2 \in \mathbb{R}, c_2 \neq 0.$$

$$\vdots$$

$$1 = \det(E_t \cdots E_1 A) = c_t \cdots c_1 \det(A) \quad c_i \in \mathbb{R}, c_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq t.$$

$$\det A \neq 0.$$

7.3 Critère d'inversibilité



Donc c'est $c_1 \cdot \det(A)$ et c_1 est non nul. Alors je continue. Le déterminant de $E_2 \cdot E_1 A$, donc ici je multiplie cette matrice-là par E_2 . Par le même raisonnement, j'introduis éventuellement un deuxième scalaire c_2 qui multiplie le déterminant de la matrice $E_1 A$ et le c_2 est un scalaire non nul et puis ainsi de suite. Enfin, le déterminant de $E_t \cdots E_1 A$ est le produit de $c_t \cdots c_1$ par le déterminant de A et les c_i sont des scalaires non nuls. Et puis tout ceci est censé être égal à 1. Donc ceci est égal à 1. Comme ces scalaires-là sont non-nuls, (mais de toute façon, ils sont non nuls parce que c'est égal à 1) le déterminant de A est différent de zéro. Donc ça c'est la démonstration que si A est inversible alors le déterminant de A est différent de zéro. Maintenant je suppose que A est non inversible.

Notes

Summary



Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Preuve Supposons que A est inversible. Alors il existe des matrices élémentaires E_1, \dots, E_t telles que $E_t \cdots E_2 E_1 A = I$.

$$1 = \det(I) = \det(E_t \cdots E_1 A)$$

$$\det(E_1 A) = c_1 \cdot \det(A) \quad c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0.$$

$$\det(E_2 E_1 A) = c_2 \cdot c_1 \cdot \det A \quad c_2 \in \mathbb{R}, c_2 \neq 0.$$

$$\vdots$$

$$1 = \det(E_t \cdots E_1 A) = c_t \cdots c_1 \det(A) \quad c_i \in \mathbb{R}, c_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq t.$$

Si A est non inversible, $\det A = 0$.
 Si A est non inversible, il existe des matrices élémentaires E_1, \dots, E_t telles que $E_t \cdots E_1 A$ possède une ligne de 0.
 dnc $\det(E_t \cdots E_1 A) = 0$
 " $c_t \cdots c_1 \det A$, $c_i \in \mathbb{R}, c_i \neq 0$. Dnc $\det(A) = 0$.

7.3 Critère d'inversibilité



Notes

Si A est non inversible, je sais aussi qu'il existe des opérations élémentaires donc des matrices élémentaires, telles que quand je fais la réduction, donc il existe des matrices élémentaires E_1, \dots, E_t , telles que quand je fais les opérations élémentaires sur la ligne de A cette matrice-là $E_t \cdots E_1 A$ possède une ligne de zéros parce que je vous rappelle que quand on fait l'échelonnage, si on obtient à la fin, n pivots pour une matrice $n \times n$, on sait que cette matrice est inversible et elle n'est pas inversible quand on ne peut pas obtenir les n pivots. Donc ça veut dire qu'on a une ligne nulle. Elle possède une ligne de zéros et donc, le déterminant de $E_t \cdots E_1 A$ est égal à zéro car je vais développer le long de cette ligne qui est zéro. Mais par le raisonnement qu'on avait là-haut, ceci est égal à $c_t \cdots c_1 \det(A)$ et les c_i sont toujours des scalaires non nuls. Donc pour que cette égalité soit vérifiée, on a que le déterminant de A est égal à zéro. Donc si A est inversible, son déterminant est non nul et si elle est non inversible, alors son déterminant est zéro.

Summary



4m 39s

Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Preuve Supposons que A est inversible. Alors il existe des matrices élémentaires E_1, \dots, E_t telles que $E_t \cdots E_2 E_1 A = I$.

$$1 = \det(I) = \det(E_t \cdots E_1 A)$$

$$\det(E_1 A) = c_1 \cdot \det(A) \quad c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0.$$

$$\det(E_2 E_1 A) = c_2 \cdot c_1 \cdot \det A \quad c_2 \in \mathbb{R}, c_2 \neq 0.$$

$$\vdots$$

$$1 = \det(E_t \cdots E_1 A) = c_t \cdots c_1 \det(A) \quad c_i \in \mathbb{R}, c_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq t.$$

Si A est non inversible, $\det A = 0$.
 Si A est non inversible, il existe des matrices élémentaires E_1, \dots, E_t telles que $E_t \cdots E_1 A$ possède une ligne de 0.
 dnc $\det(E_t \cdots E_1 A) = 0$
 $c_t \cdots c_1 \det A = 0$, $c_i \in \mathbb{R}, c_i \neq 0$. Dnc $\det(A) = 0$.

7.3 Critère d'inversibilité



Notes

Donc au lieu de montrer l'implication déterminant non nul implique inversible, je vous montre la contraposée : non inversible implique déterminant zéro.

Summary



Exemple. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer pour quelles valeurs du paramètre a la matrice A est inversible.

On sait que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

$\det(A) =$

7.3 Critère d'inversibilité



Je vais appliquer ça à un exemple : Je me donne une matrice 3×3 dans laquelle, il y a un paramètre. Et puis on prévoit là ce qu'on va faire avec le déterminant dans le chapitre 8. On aura le déterminant à calculer avec des matrices où il y a un paramètre à l'intérieur. Donc là, j'ai un paramètre, un des coefficients de la matrice et j'aimerais savoir pour quelles valeurs - éventuellement plusieurs valeurs - pour quelles valeurs du paramètre a , la matrice A est inversible. Donc je vais simplement utiliser le critère que nous venons de voir, je vais calculer le déterminant de A . Donc on sait que A est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro. Donc je calcule le déterminant de A . Là je vais juste faire une opération d'abord sur les lignes, ça c'est le même que le déterminant de la matrice avec les mêmes deux premières lignes et je vais rajouter à la troisième ligne, -1 fois la première ligne donc $-a + a = 0$, $-1 + 1 = 0$, et $-1(a + 1) + 3$ donc j'ai $-a + 2$, et puis maintenant c'est une matrice triangulaire supérieure et donc ici, le déterminant est égal à $a \cdot (-a + 2)$, donc ça c'est le déterminant.

Notes

Summary



Exemple. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer pour quelles valeurs du paramètre a la matrice A est inversible.

On sait que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -a+2 \end{pmatrix} = a(-a+2).$$

\uparrow
 $L_{31}(-1)$

A est inversible $\Leftrightarrow a(2-a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0, a \neq 2$.

A est inversible pour tout $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0, a \neq 2$.



7.3 Critère d'inversibilité

Et donc, A est inversible si et seulement si $a \cdot (2 - a)$ est différent de zéro, si et seulement si a est différent de 0 et a est différent de 2. Donc, pour répondre à la question, A est inversible pour tout nombre réel a différent de 0 et 2.

Notes

Summary



8m 15s