





#### 7.4 Le déterminant d'un produit



Maintenant ici je vais parler du déterminant d'un produit de deux matrices, puis je démontre d'abord la propriété et ensuite je fais une esquisse de preuve. Ensuite je l'applique pour montrer que deux matrices semblables ont le même déterminant. et c'est ce qui va être très utile dans le chapitre huit.

Notes

Summary



0m 04s

**Théorème.** Soient  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Alors  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

Idee de la preuve.

Supposons que  $AB$  est non inversible. Par le critère d'inversibilité,  $\det(AB) = 0$ .  
 Comme le produit de matrices inversibles est inversible, au moins une des matrices  $A$  et  $B$  n'est pas inversible. Par le critère d'inversibilité on a  $\det(A) = 0$  ou  $\det(B) = 0$ .  
 Donc  $0 = \det(AB)$



#### 7.4 Le déterminant d'un produit



Notes

Donc le théorème est le suivant: je me donne deux matrices  $n \times n$  alors le déterminant du produit  $AB$  est le produit des deux déterminants, donc  $\det(A) \cdot \det(B)$ . Puis comme j'ai dit je vais faire une esquisse de preuve, pour vous donner une idée. Donc, je dis peut être idée de preuve. D'abord il y a juste un cas à traiter. Je suppose d'abord que  $AB$  n'est pas inversible. Donc supposons que  $AB$ , n'est pas inversible. Donc cela signifie par le critère d'inversibilité que le déterminant du produit est égal à zéro. Maintenant, on sait également que si on a un produit de deux matrices inversibles alors c'est inversible. mais comme  $AB$  est non inversible cela signifie que  $A$  ou  $B$  ou les deux matrices ne sont pas inversibles. Donc maintenant, de nouveau, par le critère d'inversibilité, on a que le déterminant de  $A$  est égal à zéro si  $A$  est non inversible, ou que le déterminant de  $B$ , est égal à zéro, si  $B$  n'est pas inversible, et éventuellement les deux. Et donc dans ce cas on a ce qu'on voulait parce que on a vu que le déterminant du produit des matrices est égal à zéro. Et puis, le déterminant de  $A$  fois le déterminant de  $B$  est aussi égal à zéro.

Summary



0m 25s

**Théorème.** Soient  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Alors  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

Idee de la preuve.

Supposons que  $AB$  est non inversible. Par le critère d'inversibilité,  $\det(AB) = 0$ .

Comme le produit de matrices inversibles est inversible, au moins une des matrices  $A$  et  $B$  n'est pas inversible. Par le critère d'inversibilité on a  $\det(A) = 0$  ou  $\det(B) = 0$ .

Donc  $0 = \det(AB)$  et  $\det(A) \cdot \det(B) = 0$ .

Supposons que  $AB$  est inversible. Donc la seule solution du système  $ABX = 0$  est la solution  $X = 0$ . Par conséquent, la seule solution du système  $BX = 0$  est  $X = 0$ .

$\Rightarrow B$  est inversible.  $\Rightarrow A = (AB)B^{-1}$  est inversible.

#### 7.4 Le déterminant d'un produit



Notes

Alors ça c'est dans le cas où cette matrice-là est non inversible, on déduit que l'une des deux est non inversible, et par le critère d'inversibilité, les deux côtés ici sont égaux à zéro. Maintenant, je me suis débarrassée de ce cas-là, alors je suppose que  $AB$  est inversible. Maintenant je rappelle une des autres équivalences vue il y a longtemps. Si  $AB$  est inversible, cela signifie que la seule solution du système homogène associée à cette matrice est la solution triviale. Donc, le système  $ABX = 0$ , a pour seule solution, la solution triviale :  $X = 0$ . Mais si ça c'est le cas, alors le système  $BX = 0$ , a aussi une seule solution, qui est la solution triviale. Donc, par conséquent, la seule solution de  $BX = 0$  est aussi  $X = 0$ . Et par la même équivalence que j'ai évoquée ici, ça implique que  $B$  est inversible. Et puis ça, ça implique que  $A$ , qui est un produit de  $AB$  et  $B^{-1}$ , est aussi inversible. Je n'ai pas fini mais ici je suis dans le cas où  $AB$  est inversible et de ça je déduis que  $B$  et  $A$  sont inversibles.

Summary



Soient  $AB, A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  inversibles.

$$E_t \cdots E_1 A = I$$

$E_i$  matrices élémentaires.

$$F_s \cdots F_1 B = I$$

$F_j$  matrices élémentaires.

$$1 = \det(E_t \cdots E_1 A) = c_1 \cdots c_t \det A \quad c_i \in \mathbb{R}, c_i \neq 0$$



#### 7.4 Le déterminant d'un produit

Donc j'ai  $AB$ ,  $A$  et  $B$  des matrices de taille  $n \times n$  inversibles. Maintenant c'est la partie où ça devient un peu compliqué. L'idée de l'approche sans tous les détails. Maintenant,  $A$  est inversible donc je peux la réduire en utilisant les opérations élémentaires comme dans la vidéo précédente. Je la réduis à l'identité où  $E_i$  est une matrice élémentaire. Et puis je fais la même chose pour  $B$ . Je la réduis aussi à la matrice identité car  $B$  est aussi inversible. donc  $F_j$  est aussi une matrice élémentaire pour tout  $j$ . Et puis, le déterminant de cette matrice-là  $E_t \cdots E_1 A$ , c'est égal à 1, parce que c'est de la matrice identité et comme dans la vidéo précédente, c'est aussi égal à  $c_1 \cdots c_t \det(A)$ , où les  $c_i$  sont des nombres réels non nuls. Donc là je rappelle ce qu'on a vu dans la vidéo précédente. Et puis ici j'ai aussi 1 égal à  $d_s \cdots d_1 \det(B)$ , où les  $d_i$  sont des nombres réels, aussi non nuls.

Notes

Summary



4m 10s

Soient  $AB, A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  inversibles.

$$E_t \cdots E_1 A = I$$

$E_i$  matrices élémentaires.

$$F_s \cdots F_1 B = I$$

$F_j$  matrices élémentaires.

$$1 = \det(E_t \cdots E_1 A) = c_1 \cdots c_t \det A \quad c_i \in \mathbb{R}, c_i \neq 0$$

$$1 = d_s \cdots d_1 \det B \quad d_i \in \mathbb{R}, d_i \neq 0$$

$$\det A = \frac{1}{c_1 \cdots c_t} \quad \text{et} \quad \det B = \frac{1}{d_1 \cdots d_s}$$

$$E_t \cdots E_1 AB = B$$

$$F_s \cdots F_1 E_t \cdots E_1 AB = F_s \cdots F_1 B = I$$

$$= \det(I) = 1$$

#### 7.4 Le déterminant d'un produit



Donc de ça je déduis que le déterminant de  $A$  c'est  $1/(c_1 \cdots c_t)$  et que le déterminant de  $B$  c'est  $1/(d_s \cdots d_1)$ . Maintenant, je veux appliquer tout ça. Je fais  $E_t \cdots E_1$ , dans ce sens-là, donc je fais les mêmes opérations que sur  $A$ , mais sur la matrice  $AB$ . Et puis ça ça me ramène à l'identité cette partie-là, donc ça c'est égal à  $B$ . Donc cela signifie que si maintenant je viens avec mes opérations  $F_j$ , dans ce sens-là, donc je multiplie par  $F_s \cdots F_1$  cette matrice-là et ça la réduit. C'est la même chose. Cela réduit à l'identité. Donc maintenant je fais le déterminant des deux côtés ici donc le déterminant de la matrice identité comme d'habitude c'est 1, et ça c'est égal à quoi ? Donc ici j'ai fait une opération sur cette matrice et c'est la même opération là-haut qui a produit un  $C_1$ , ensuite la deuxième qui a produit un  $C_2$ , etc. Enfin j'arrive après au  $F_1$ . L'opération  $F_1$  sur la ligne ça a produit un scalaire  $d_1$  et  $F_s$  un scalaire  $d_s$ , etc.

Notes

Summary



Soient  $AB, A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  inversibles.

$$E_t \dots E_1 A = I \quad E_i \text{ matrices élémentaires.}$$

$$F_s \dots F_1 B = I \quad F_j \text{ matrices élémentaires.}$$

$$1 = \det(E_t \dots E_1 A) = c_1 \dots c_t \det A \quad c_i \in \mathbb{R}, c_i \neq 0$$

$$1 = d_s \dots d_1 \det B \quad d_i \in \mathbb{R}, d_i \neq 0.$$

$$\det A = \frac{1}{c_1 \dots c_t} \quad \text{et} \quad \det B = \frac{1}{d_1 \dots d_s}.$$

$$E_t \dots E_1 AB = B$$

$$F_s \dots F_1 E_t \dots E_1 AB = F_s \dots F_1 B = I.$$

$$d_s \dots d_1 c_t \dots c_1 \det AB = \det(I) = 1$$

$$\det AB = \frac{1}{d_s \dots d_1 c_t \dots c_1} = (\det A)(\det B).$$

#### 7.4 Le déterminant d'un produit



Donc ce côté-là, le déterminant de cette matrice-là c'est les scalaires, fois le déterminant de  $AB$  et donc le déterminant de  $AB$  est égal à 1 divisé par le produit des  $d_i$ , et des  $c_j$ . Et cela par ce qu'on a écrit ici, c'est exactement le déterminant de  $A$  fois le déterminant de  $B$ . Donc ici j'utilise très fortement le fait que chaque opération élémentaire introduit une unique scalaire et puis les mêmes scalaires vont apparaître dans ce calcul-là, que les scalaires apparus ici dans les calculs séparés. donc c'est ce qu'on utilise là. De ça je vais déduire deux corollaires.

Notes

Summary



## Deux corollaires

**Corollaire 1.** Soit  $A$  une matrice inversible.  
Alors  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

Preuve

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= I. \\ \det(A \cdot A^{-1}) &= \det(I) = 1. \\ \text{"} \\ \det(A) \cdot \det(A^{-1}) &= 1 \\ \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det A} \end{aligned}$$

□

**Corollaire 2.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices semblables. Alors  $\det(A) = \det(B)$ .

Preuve

### 7.4 Le déterminant d'un produit



Le premier corollaire c'est que si je me donne une matrice inversible, alors je sais que son déterminant est non nul, et le déterminant de la matrice inverse est juste 1 divisé par le déterminant de la matrice. Il est facile de montrer pourquoi, d'après ce qu'on vient de voir. Donc la preuve ici Comme  $A$  est inversible,  $A^{-1}$  existe et j'ai que  $A \cdot A^{-1}$ , c'est l'identité. Maintenant je prends le déterminant de cette matrice et le déterminant de l'identité, qui est égal à 1. Par le théorème, ceci est égal au déterminant de  $A$ , qui est non nul, fois le déterminant de  $A^{-1}$ , qui est égal à 1. Et donc on divise et on a que le déterminant de  $A$  inverse est égal à 1 divisé par le déterminant de  $A$ . Donc ça c'est la démonstration du premier corollaire. Et puis le deuxième corollaire, c'est que si on a deux matrices semblables, alors elles ont le même déterminant. et ceci sera très important dans le chapitre huit. Donc ici je démontre. Ca c'est la preuve du un. Preuve, ici, du corollaire deux. Donc  $A$  et  $B$  deux matrices semblables, Ça veut dire qu'il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $B = P^{-1}AP$ .

Notes

Summary



8m 10s



## Deux corollaires

**Corollaire 1.** Soit  $A$  une matrice inversible.  
Alors  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

Preuve

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= I. \\ \det(A \cdot A^{-1}) &= \det(I) = 1. \\ \text{"} \\ \det(A) \cdot \det(A^{-1}) &= 1 \\ \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det A} \end{aligned}$$

□

**Corollaire 2.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices semblables. Alors  $\det(A) = \det(B)$ .

Preuve

Il existe une matrice inversible  $P$  t.q.  $B = P^{-1}AP$ .

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) \\ &= \frac{1}{\det P} \cdot \det A \cdot \det P \\ &= \det A. \end{aligned}$$



### 7.4 Le déterminant d'un produit

Donc cela est la relation qui définit des matrices semblables. Maintenant je prends le déterminant de  $B$  qui est égal au déterminant du produit  $P^{-1}AP$ , et j'applique deux fois la propriété de multiplicativité du déterminant, et j'ai le déterminant de  $P^{-1}$ , fois le déterminant de  $A$ , fois le déterminant de  $P$ , et j'applique le premier corollaire : ceci est égal à 1 divisé par le déterminant de  $P$ , fois le déterminant de  $A$ , fois le déterminant de  $P$ , donc les deux déterminants de  $P$  s'annulent et j'ai le déterminant de  $A$ .

Notes

Summary



9m 55s