





### 7.5 Le déterminant, interprétation géométrique



Dans cette vidéo, nous allons voir une interprétation géométrique du déterminant dans le cas d'une matrice  $2 \times 2$  ou une matrice  $3 \times 3$ . Je vais énoncer un résultat pour  $2 \times 2$  et  $3 \times 3$ , mais je ne vais que donner une esquisse de preuve pour le cas des matrices  $2 \times 2$ . Et puis, c'est dans le cas d'une matrice où le déterminant est non nul, sinon on n'aura pas cette interprétation géométrique.

Notes

Summary

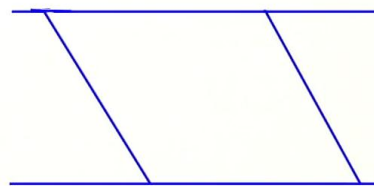
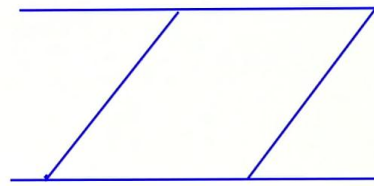


0m 04s

**Théorème 1.** Soit  $A$  une matrice  $2 \times 2$ . L'aire du parallélogramme défini par les colonnes de  $A$  est égale à  $|\det(A)|$  (valeur absolue).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ w = (a, c) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ u = (b, d) \end{matrix}$$

On suppose,  $u \neq 0$  et  $w \neq 0$ , aussi que  $u \neq \lambda(w)$ .  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ .



## 7.5 Le déterminant, interprétation géométrique



Voilà le résultat. Je me donne une matrice  $2 \times 2$ , et les colonnes de cette matrice, je les considère comme étant les vecteurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Et je suppose que ces deux colonnes ne sont pas parallèles et qu'aucune des deux colonnes n'est égale à zéro, ça je ne l'ai pas dit dans le théorème, mais c'est assez clair. Et alors, le déterminant de cette matrice, la valeur absolue du déterminant peut être interprétée comme étant la surface du parallélogramme qui est défini par ces deux vecteurs. Donc ici, je me donne une matrice  $A$ , avec des colonnes, une matrice  $(a, b, c, d)$  et je me donne deux vecteurs, disons celui-là, le vecteur  $w = (a, c)$ , et celui-là, le vecteur  $u = (b, d)$ . Ensuite, comme je suppose qu'ils ne sont pas parallèles, on suppose, d'une part que  $u \neq 0$  et  $w \neq 0$ , sinon ça ne forme pas un parallélogramme. Et on suppose aussi que les deux vecteurs respectent,  $u$  n'est pas égal à un multiple de  $w$ . Et ça, ça équivaut à ce que  $\det(A)$  soit différent de zéro. Donc je suis dans un cas où j'ai une matrice dont le déterminant est non-nul, et je regarde les colonnes comme étant des vecteurs dans  $\mathbb{R}^2$ .

Notes

Summary



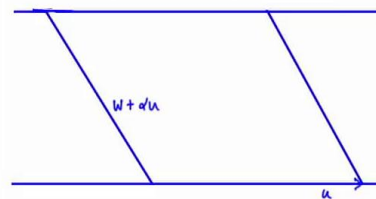
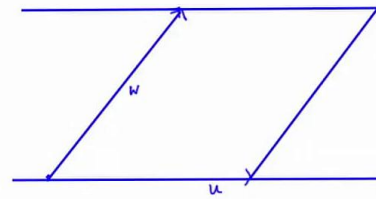
0m 32s

**Théorème 1.** Soit  $A$  une matrice  $2 \times 2$ . L'aire du parallélogramme défini par les colonnes de  $A$  est égale à  $|\det(A)|$  (valeur absolue).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ w = (a, c) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ u = (b, d) \end{matrix}$$

On suppose,  $u \neq 0$  et  $w \neq 0$ , aussi que  $u \neq \alpha(w)$ .  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ .

La surface du parallélogramme défini par  $u$  et  $w =$   
 " " " " "  $u$  et  $w + \alpha u$ .



## 7.5 Le déterminant, interprétation géométrique

Donc ça, c'est le vecteur  $u$ , et ceci est le vecteur  $w$ . Maintenant, je parle de la surface de ça. Maintenant, je vais faire un truc de géométrie, c'est que j'ai  $u$  qui est fixe, toujours, ici, ça, c'est toujours  $u$ , et puis maintenant, je vais additionner à  $w$  un multiple de  $u$ , ça le déplace dans ce sens-là. Donc ce vecteur-là, c'est  $w + \alpha u$ , donc j'ai rajouté un multiple de  $u$ , donc si je vais à  $w$ , je rajoute un multiple de  $u$ , je vais dans ce sens-là, ça me fait un vecteur qui va là. Et puis maintenant, par un résultat de géométrie, si on trace deux lignes parallèles, comme ça, et on fixe une base, c'est ce que j'ai fixé, c'est le  $u$ , ici, et on forme plein de parallélogrammes qui ont la même base, alors la surface, c'est pareil. Donc la surface de ce parallélogramme et ce parallélogramme sont les mêmes. Donc la surface du parallélogramme défini par les vecteurs  $u$  et  $w$  est égale à la surface du parallélogramme défini par  $u$  et  $w + \alpha u$ . Maintenant, je vais utiliser ça.

Notes

Summary



2m 14s

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{w \quad u} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a - \frac{bc}{d} & b \\ 0 & d \end{pmatrix}_{w+du \quad u}$$

On a  $b \neq 0$  ou  $d \neq 0$ . Supposons  $d \neq 0$ . Posons  $\alpha = -\frac{c}{d}$

## 7.5 Le déterminant, interprétation géométrique

Maintenant, ça veut dire que ma matrice  $(a,b,c,d)$ , je vais la transformer en... donc ça, c'était  $w$ , ça, c'était  $u$ . Donc maintenant, je vais remplacer  $w$  par  $w + \alpha u$ , que je vais mettre là. Et je vais choisir un  $\alpha$  qui convient. Maintenant, ou bien  $b$  ou  $d$  est différent de zéro, donc on a que  $b \neq 0$  ou  $d \neq 0$ , et je vais faire le cas où  $d \neq 0$ , l'argument pour  $b \neq 0$  c'est pareil. Donc supposons  $d \neq 0$ , posons  $\alpha = -c/d$ . Et puis la transformation, ici, j'aurais: je rajoute  $\alpha u$  à  $w$  et ça va me faire ici  $a - (bc)/d$ . Et vous voyez que la raison pour laquelle j'ai fait ça, c'est parce qu'ici, ça va m'annuler le  $c$ , ici, j'ai zéro, et ensuite, le  $u$ , je ne l'ai pas changé. Donc j'ai ça. Maintenant, le  $a - (bc)/d$  est égal à  $(ad - bc)/d$ , donc ceci est différent de zéro car le déterminant de la matrice originale est différent de zéro.

Notes

Summary



3m 43s

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{matrix} w \\ u \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a - \frac{bc}{d} & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{matrix} w + \alpha u \\ u \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a - \frac{bc}{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

on a remplacé  
le vecteur  $u$  par  
 $u + \beta \left( a - \frac{bc}{d}, 0 \right)$

On a  $b \neq 0$  et  $d \neq 0$ . Supposons  $d \neq 0$ . Posons  $\alpha = -\frac{c}{d}$

$$a - \frac{bc}{d} = \frac{ad - bc}{d} \neq 0 \quad \text{car} \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

## 7.5 Le déterminant, interprétation géométrique

Donc maintenant, j'ai une composante là qui est non-nulle, donc je refais la manipulation, c'est qu'avec les vecteurs, je vais rajouter un multiple de ce vecteur à ce vecteur, pour annuler le  $b$ , et à la fin, j'aurais  $(0, d)$  comme deuxième colonne et  $(a - (bc)/d, 0)$  comme première colonne donc on remplace, on a remplacé le vecteur  $u$  par  $u$  plus un multiple, un autre multiple de ce vecteur-là, pour éliminer ce qui est là. Donc on a fait deux transformations, on commence avec les vecteurs  $w$  et  $u$ , on remplace le  $w$  par  $w + \alpha u$  pour un  $\alpha$  bien choisi, ça me donne un zéro ici, et on sait que les parallélogrammes correspondants ont la même surface. Ensuite, je refais une manipulation où je remplace ce vecteur par ce vecteur plus un multiple de l'autre, et puis j'élimine ça. Donc maintenant, si j'ai deux vecteurs comme ça, et je fais le dessin du parallélogramme, donc le parallélogramme correspondant, donc le parallélogramme défini par cette matrice, c'est à dire défini par les colonnes de cette matrice, ça c'est un parallélogramme qui est facile à dessiner.

Notes

Summary



5m 14s

**Théorème 2.** Soit  $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ . Le volume du parallélépipède défini par les colonnes de  $A$  est égal à  $|\det(A)|$  (valeur absolue).

## 7.5 Le déterminant, interprétation géométrique



Donc ici, j'ai ce premier vecteur, c'est ici,  $a-(bc)/d$ , et ensuite hauteur, ici, ça c'est le point  $(0,d)$ , et puis la surface,  $a$  surface, maintenant, c'est un carré,  $a$  surface  $d(a-(bc)/d)$ , ça c'est  $ad-bc$ , qui est effectivement égal... bon, comme je l'ai dessiné, je l'ai mis comme si les deux coordonnées étaient positives, mais on n'a aucune idée si les deux coordonnées sont positives, donc il se peut qu'à ce moment-là, l'un soit négatif, donc je devrais mettre les valeurs absolues, ici. Bon, dans le dessin, c'est positif, mais je n'en sais rien. Et ça, c'est la valeur absolue du déterminant de la matrice  $A$ . Donc ça, c'est l'argument, c'est qu'on commence avec les deux droites parallèles qui représentent le vecteur  $u$ , une des colonnes, après, on peut déplacer le  $w$  en gardant la base  $u$ , après, on peut déplacer le  $u$  en gardant la base  $w$ , et puis on ramène tout ça à une matrice comme ça, les parallélogramme définis par toutes ces différentes matrices ont la même surface, et après, j'arrive à un carré, où je sais calculer la surface. C'est très joli, d'ailleurs.

Notes

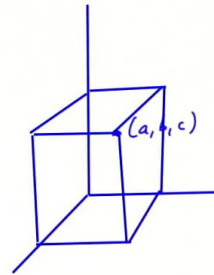
Summary



6m 41s

**Théorème 2.** Soit  $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ . Le volume du parallélépipède défini par les colonnes de  $A$  est égal à  $|\det(A)|$  (valeur absolue).

Cas particulier :  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$   
 $abc \neq 0.$



Volume =  $a \cdot b \cdot c$

#### 7.5 Le déterminant, interprétation géométrique

Maintenant, dans le cas des matrices  $3 \times 3$ , le résultat est le suivant, c'est que je me donne une matrice  $3 \times 3$ , et cette fois, ces trois vecteurs qui sont les colonnes de cette matrice, si ces trois vecteurs définissent un parallélépipède dans  $\mathbb{R}^3$ , alors le déterminant de la matrice est... en prenant la valeur absolue, j'obtiens le volume de ce parallélépipède. Et là, je ne vais pas faire la démonstration, parce que la géométrie sera plus difficile à dessiner, mais je vais juste faire un cas particulier. On prend une matrice diagonale, où le  $a$ , le  $b$  et le  $c$  sont différents de zéro, donc ça définit vraiment un objet avec un volume. Et ensuite, si on dessine dans  $\mathbb{R}^3$  le cube qui est défini par ça, puis ce point-là, ce point-là, c'est le point  $(a, b, c)$ . Alors le volume est égal à  $a \cdot b \cdot c$ , mais comme j'aurais pu dessiner ça dans un autre cadran, c'est clair que le volume est égal à la valeur absolue du déterminant de  $A$ , parce que là, j'ai pris le cas où les  $a, b$  et  $c$  sont positifs. Donc ça, c'est une autre interprétation du déterminant.

Notes

Summary



8m 15s