



7.6 La formule de Cramer

Dans cette vidéo je vais vous présenter la formule de Cramer. C'est une formule qui permet de donner la solution d'un système d'une équation à une inconnue dans le cas où la matrice des coefficients est inversible. Dans ce cas là on se souvient que le système possède une solution unique et la formule de Cramer est une formule explicite pour cette solution. Elle est donnée en termes de déterminants de beaucoup de matrices, donc il y a beaucoup de calculs pour appliquer cette formule. ce n'est pas du tout une méthode efficace pour résoudre un système d'équation. Au niveau du nombre de calculs, même à l'ordinateur, ce n'est pas efficace. Mais ça a quand même une valeur théorique, c'est pourquoi je vous la présente.

Notes

Summary



0m 04s

Formule de Cramer. Soient $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversible, x_1, \dots, x_n des inconnues, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$. Posons $A_i(b)$ la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la i -ième colonne de A par b . La solution unique du système d'équations linéaires $AX = b$ est donnée par :

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)} \quad \text{où } 1 \leq i \leq n.$$

Exemple $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

7.6 La formule de Cramer



Je me donne une matrice $n \times n$ inversible, donc je sais que son déterminant est non nul. Et je me donne des inconnues, x_1, \dots, x_n et un vecteur colonne b , ce serait la colonne des constantes dans un système d'équations. Après je veux considérer le système d'équation $AX=b$ Et pour vous décrire la solution unique de ce système, je pose $A_i(b)$ d'être la matrice que j'obtiens si je prends la matrice A et je remplace la i -ième colonne de A par la colonne b . Je fais ça pour i égal à $1, \dots, n$. et ensuite je pose x_i égal au déterminant de cette matrice $A_i(b)$, divisée par le déterminant de A . Ca, c'est la solution unique du système. Considérons l'exemple Une matrice 2×2 Je me donne A la matrice [voir écran] et je suppose que le déterminant est différent de zéro. Donc la matrice est inversible. Et je me donne une colonne de constantes b . Donc dans cette procédure décrite là je pose $A_1(b)$ d'être la matrice que j'obtiens si je remplace la première colonne de A par cette colonne de constantes.

Notes

Summary



0m 52s

Formule de Cramer. Soient $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversible, x_1, \dots, x_n des inconnues, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$. Posons $A_i(b)$ la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la i -ième colonne de A par b . La solution unique du système d'équations linéaires $AX = b$ est donnée par :

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)} \quad \text{où } 1 \leq i \leq n.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Posons $A_1(b) = \begin{pmatrix} b_1 & \beta \\ b_2 & \delta \end{pmatrix}$, $A_2(b) = \begin{pmatrix} \alpha & b_1 \\ \gamma & b_2 \end{pmatrix}$.

$$x_1 = \frac{b_1\delta - b_2\beta}{\alpha\delta - \gamma\beta}, \quad x_2 = \frac{\alpha b_2 - \gamma b_1}{\alpha\delta - \gamma\beta}.$$

A vérifier (x_1, x_2) satisfait au système $AX = b$.

7.6 La formule de Cramer



Donc là j'ai [voir écran]. Et puis $A_2(b)$ est égal à [voir écran] Ensuite la formule de Cramer dit que donc je fais le déterminant de ça, c'est $b_1\delta - b_2\beta$, divisé par le déterminant de A qui est $\alpha\delta - \gamma\beta$ et x_2 est égal au déterminant de $A_2(b)$, donc ça c'est $\alpha b_2 - \gamma b_1$, divisé par le déterminant de A , qui est $\alpha\delta - \gamma\beta$, et ça c'est exactement la solution. Donc à vérifier. Je ne le fais pas ici. Maintenant je fais un exemple en détails. En fait, pas en détails, mais un grand exemple avec quelques calculs.

Notes

Summary



Exemple. Utiliser la formule de Cramer pour résoudre le système :

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x + z = 1 \\ y - z = 3 \\ x + 4t = -1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_3(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det A$

$$A_2(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_4(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7.6 La formule de Cramer

Donc je me donne ce système d'équation, quatre équations à quatre inconnues. D'abord je pose la matrice des coefficients, donc je vérifie 1, -1, 1, 1; 2, 0, 1, 0; 0, 1, -1, 0; et 1, 0, 0, 4. Ca c'est juste. Et la colonne des constantes ici, ça serait $b = (0 \ 1 \ 3 \ -1)^T$. Donc à chaque fois, pour former ces matrices, par exemple pour la matrice $A_1(b)$ je prends la matrice A et je remplace la première colonne par cette colonne b pour $A_2(b)$, je remplace la deuxième colonne de A par cette colonne b , etc. Après, je vais faire un peu de calculs, Je calcule d'abord le déterminant de A , ensuite celui de chacune de ces matrices, Je calcule le déterminant de A car on n'a peut-être pas calculé assez de déterminants 4×4 . Donc le déterminant de A En fait, j'ai envie de mettre ici un zéro, car si j'ai un zéro là et je garde ces deux et j'aurais une colonne ici avec une seule valeur non nulle. Donc je vais rajouter (-4) fois la première ligne à la quatrième ligne, et on sait que cette manipulation ne change pas le déterminant.

Notes

Summary



3m 30s

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \det A = -3.$$

$$A_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_2(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A_4(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7.6 La formule de Cramer



Donc le déterminant de A est égal au déterminant de la matrice où je garde les trois premières lignes de A et je remplace la quatrième par (-4) fois la première additionnée à la quatrième. Donc j'ai $-4 + 1 = -3$, ensuite, j'ai $4 + 0 = 4$, puis $-4 + 0 = -4$, et puis $-4 + 4 = 0$. Puis maintenant, en développant le long de la dernière colonne, en tenant compte du signe donc j'ai $+, -, +, -$, donc j'ai moins le déterminant de la matrice 3×3 , si je supprime la première ligne et la quatrième colonne, j'ai la matrice [voir écran] Maintenant je développe le long de la première ligne donc j'ai $(-1)2$ fois le déterminant de la matrice 2×2 [voir écran] et $+, -, +$. Ce - là, je dois le garder, donc - le déterminant de la matrice 2×2 [voir écran]. Donc j'ai $-2(-4-(-4))-1(0-(-3)) = -3$. Donc le déterminant de A c'est -3 . Donc ça je le garde. Donc, le déterminant de A est égal à -3 . Et maintenant je calcule le déterminant de $A_1(b)$.

Notes

Summary



$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \det A = -3. \quad \det A_1(b) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= -(-4+4 + 12-(-1)) = -13.$$

$$A_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Posons } x_1 = \frac{-13}{-3} = \frac{13}{3}.$$

$$\det A_2(b) = 14 \quad ; \quad x_2 = \frac{14}{-3}$$

$$\det A_3(b) = 23 \quad ; \quad x_3 = \frac{23}{-3}$$

$$\det A_4(b) = 4 \quad ; \quad x_4 = \frac{4}{-3}.$$

$$A_2(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A_4(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $(\frac{13}{3}, -\frac{14}{3}, -\frac{23}{3}, -\frac{4}{3})$ est une solution du système $AX = b$.

7.6 La formule de Cramer



Et par la même manipulation, si j'ajoute ici -4 fois la première ligne à la quatrième ligne, j'ai le même déterminant, donc je garde les trois premières lignes et maintenant j'ai $0 + (-1) = -1$, puis $4 + 0 = 4$, puis $-4 + 0 = -4$ et finalement $-4 + 4 = 0$. Et ceci est égal à $+$, $-$, $+$, $-$, donc -1 fois le déterminant de la matrice 3×3 , qui est ici dans le coin et ceci est égal à moins le déterminant de ça, qui est $-4 + 4 = 0$, plus le déterminant ici dans le coin qui est $12 - 1 = 11$. Du coup, le déterminant est égal à -13 . Et posons alors $x_1 = (-13)/(-3) = 13/3$. Je ne fais pas les autres calculs, je vous dis juste le résultat. Le déterminant de $A_2(b)$, c'est, si vous le calculez vous trouverez 14, le déterminant de $A_3(b)$, c'est 23. Le déterminant de $A_4(b)$ est égal à 4. Et donc je pose $x_2 = 14/(-3)$; $x_3 = 23/(-3)$; $x_4 = 4/(-3)$. Après on vérifie que ces valeurs-là : $13/3$, $-14/3$, $-23/3$, $-4/3$, sont une solution du système. Ca c'est un exemple complet.

Notes

Summary

