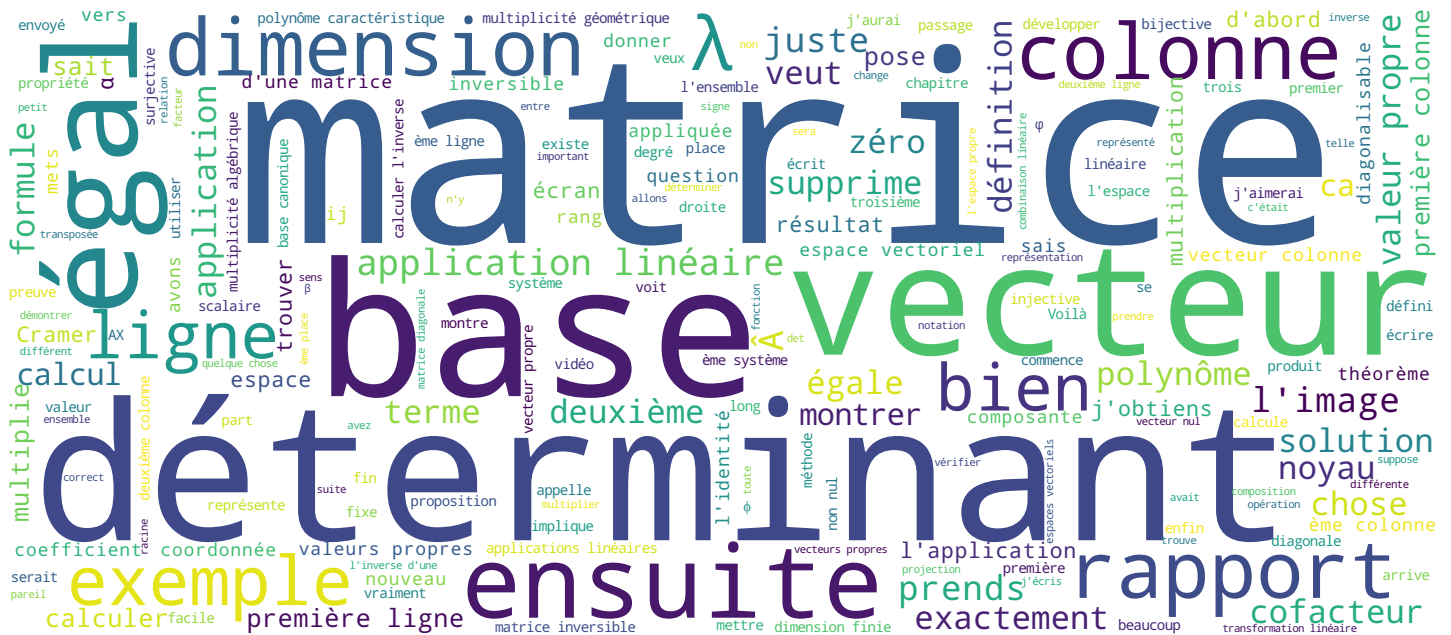


7.7 La matrice des cofacteurs et une formule pour A^{-1}

Prof. Donna Testerman





7.7 La matrice des cofacteurs et une formule pour A^{-1}



Dans cette vidéo je vais vous montrer ce qu'on appelle la matrice des cofacteurs. Cela sert à donner une formule explicite pour l'inverse d'une matrice inversible. Cette formule est en terme de calcul de beaucoup de déterminants, comme la formule de Cramer, et d'ailleurs la démonstration de la validité de cette formule passe par la formule de Cramer. Ce n'est pas une méthode efficace pour calculer l'inverse d'une matrice, mais cela a une valeur théorique. Je vais vous présenter la méthode et après je montre un exemple.

Notes

Summary



0m 04s

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversible. Pour calculer A^{-1} on pourrait résoudre n systèmes d'équations: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} \quad \quad \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

7.7 La matrice des cofacteurs et une formule pour A^{-1}



Pour développer la méthode je vais beaucoup écrire pour vous expliquer d'où ça vient. Je me donne une matrice inversible, soit A une matrice $n \times n$ inversible. Une façon d'aborder le problème pour calculer l'inverse serait ceci : pour calculer l'inverse de A on pourrait résoudre n systèmes d'équations. Je montre le système : je me donne $X = (X_1 \dots X_n)$, les variables et puis je résous le système suivant : $AX = (1 \ 0 \dots 0)$ Ensuite $AX = (0 \ 1 \ 0 \dots 0)$ et je continue ainsi jusqu'à $AX = (0 \dots 0 \ 1)$. J'ai un système d'équation dont les inconnues sont X_1, \dots, X_n . Que vais-je faire avec ces solutions? Si vous imaginez que vous avez la matrice A et vous cherchez à mettre à côté une matrice telle que le résultat de la multiplication est la matrice d'identité. Cela veut dire que quand je prends A et je multiplie par la première colonne ici, alors le résultat de cette multiplication par la première colonne me donne la première colonne là, et c'est exactement cette colonne. Le résultat de la multiplication par la deuxième colonne ici, c'est la deuxième colonne ici.

Notes

Summary



Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversible. Pour calculer A^{-1} on pourrait résoudre n systèmes d'équations: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} \quad \quad \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Solution du premier système
Solution du 2^e système

Posons $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ème place.}$

Par la formule de Cramer, le coefficient (i,j) de A^{-1} = valeur de x_i dans la solution du système $AX = e_j$

7.7 La matrice des cofacteurs et une formule pour A^{-1}



Donc en fait, pour la solution là je mettrai la solution du premier système ici; la solution du deuxième système ici et ainsi de suite. Donc en fait, je peux maintenant utiliser la formule de Cramer. Je pose des vecteurs colonne ici étant comme les colonnes de constantes. Posons e_i , le vecteur colonne $(0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$ et ce 1 se trouve à la i -ème place. On voit par la formule de Cramer le coefficient (i,j) de la matrice A^{-1} C'est ce que je retrouve ici c'est-à-dire (i,j) dans la i -ème ligne et la j -ème colonne. Ça veut dire que je serai dans la solution du j -ème système ici, et à la i -ème place. Donc, ce serait la valeur de x_i dans la solution du système $AX=e_j$.

Notes

Summary



2m 37s

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\det A_i(e_j)}{\det A} \quad \text{par Cramer.}$$

$$\det A_i(e_j) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & 1 & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

← j-ème place

i-ème colonne

7.7 La matrice des cofacteurs et une formule pour A^{-1}



donc je vais à la j -ème colonne ici, dans l'inverse donc je serai en train de résoudre le j -ème système Cela veut dire; à nouveau par Cramer, que A^{-1}_{ij} est exactement le déterminant de $A_i(e_j)$ sur le déterminant de A . Donc je voudrais résoudre le j -ème système et je voudrais trouver la coordonnée pour X_i . Donc le j -ème système c'était avec e_j et X_i est égal à cela. Ca c'est par Cramer. Très bien. Maintenant, comment est-ce-que je calcule le déterminant de $A_i(e_j)$? Alors ça c'est le déterminant de la matrice... Je prends la matrice A et j'ai la première colonne. J'ai la deuxième colonne. et tout est pareil. Donc j'ai la dernière colonne, que je mets ici et ici au milieu, à la i -ème colonne je vais mettre le vecteur colonne e_j . Donc j'aurai $(0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$ et cette valeur 1 là c'est à la j -ème place. Maintenant si je veux calculer le déterminant de cette matrice-là, c'est clair que je vais développer le long de cette colonne-là parce qu'il n'y a qu'un seul coefficient qui est non nul.

Notes

Summary



$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\det A_i(e_j)}{\det A} \quad \text{par Cramer.}$$

$$\det A_i(e_j) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & 1 & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow j\text{-ème place} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = (-1)^{i+j} \det \hat{A}_{ji}$$

\uparrow
 $i\text{-ème colonne}$

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} (-1)^{i+j} \det \hat{A}_{ji}$$

7.7 La matrice des cofacteurs et une formule pour A^{-1}



Donc je vais développer et ceci va me donner -1 à la puissance... c'est la place ici, la j -ème ligne et la i -ème colonne, donc, c'est $(-1)^{i+j}$ et puis j'ai le déterminant exactement de la matrice où je vais supprimer la j -ème ligne de A et la i -ème colonne. C'est ce qu'on avait mis : le chapeau. Donc je prends la matrice A , je supprime cette ligne là, c'est la j -ème ligne je supprime cette colonne là, c'est la i -ième colonne et tout ce qui reste dans la matrice c'est la matrice A . Donc c'est pour ça que j'ai écrit \hat{A}_{ji} . Cela veut dire que le A^{-1} , ce que je vois dans sa i,j composante, c'est $1/\det(A)$, fois $(-1)^{i+j}$ multiplié par $\det(\hat{A}_{ji})$. Il y a donc un changement là.

Notes

Summary



Définition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. La matrice des cofacteurs de A est la matrice $n \times n$ dont l'entrée (i, j) est égale à $(-1)^{i+j} \det(\hat{A}_{ij})$. On la dénote par $\text{cof}(A)$.

Théorème. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{cof}(A))^T$.

7.7 La matrice des cofacteurs et une formule pour A^{-1}



Ce développement là, nous amène à la définition suivante : je me donne une matrice $n \times n$, Et puis je vais associer un coefficient à chaque composante de la matrice, et à l'entrée ij je vais associer le coefficient $(-1)^{i+j} \det(\hat{A}_{ij})$. Et puis, j'appelle ça le cofacteur qui va avec la composante ij et je mets tout ça dans une matrice. OK, c'est la matrice des cofacteurs. La matrice des cofacteurs de A est la matrice dont l'entrée ij est formée en mettant le signe qui va avec la place ij et le déterminant de la matrice qu'on obtient si on supprime la i -ème ligne et la j -ème colonne. Le théorème que nous venons de voir, qui est basé sur la formule de Cramer, c'est que si je veux calculer l'inverse de la matrice A , je divise par son déterminant, je prends cette matrice des cofacteurs mais je vais la transposer. Et ça c'était justement ce qu'on avait vu ici, je vais reculer. On a vu là que la ij composante c'est le cofacteur qui va ici avec le ji . Donc c'est exactement $1/\det(A)(\text{cof}(A))^T$. Je vous montre un exemple pour illustrer mais aussi pour vous montrer que c'est vraiment beaucoup trop de calculs.

Notes

Summary



6m 55s

Définition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. La matrice des cofacteurs de A est la matrice $n \times n$ dont l'entrée (i, j) est égale à $(-1)^{i+j} \det(\hat{A}_{ij})$. On la dénote par $\text{cof}(A)$.

Théorème. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{cof}(A))^T$.

exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \det A = 2$

cof(A)

$$(+1) \det \hat{A}_{11} = 0$$

$$(-1) \det \hat{A}_{12} = 0$$

$$(+1) \det \hat{A}_{13} = 2$$

$$(-1) \det \hat{A}_{21} = (-1)(-3) = 3$$

$$(1) \det \hat{A}_{22} = 2$$

7.7 La matrice des cofacteurs et une formule pour A^{-1}

Il ne faut surtout pas calculer un déterminant comme ça. Si je pose A , la matrice [voir écran] Si vous calculez le déterminant de A , qui est nécessaire pour cette formule. Alors je développe le long de la troisième colonne. Donc, j'ai $+1$ fois le déterminant qui est $0(-2)$ donc, c'est 2. Ensuite, je calcule la matrice des cofacteurs et pour cela je dois calculer tous ses déterminants. Je fais $+1$ fois le déterminant de \hat{A}_{11} . Donc je supprime la première ligne et la première colonne et ça c'est de déterminant 0. Après j'ai -1 fois le déterminant de \hat{A}_{12} , donc je supprime ici et là, et j'ai à nouveau 0. Après j'ai $+1$ fois le déterminant de \hat{A}_{13} . Je supprime là, cela me fait $+2$ et je continue j'ai -1 fois le déterminant de \hat{A}_{21} . Je supprime là et là et ça c'est $0-3$, donc ça fait $+3$. Donc là j'ai fait cette ligne j'ai fait cette place là, donc je fait cette place là, donc j'ai $+1$ fois le déterminant de \hat{A}_{22} , qui est, si je supprime là et là, j'obtiens 2. (Vérifie le calcul) -1 fois le déterminant de \hat{A}_{23} .

Notes

Summary



Définition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. La matrice des cofacteurs de A est la matrice $n \times n$ dont l'entrée (i, j) est égale à $(-1)^{i+j} \det(\hat{A}_{ij})$. On la dénote par $\text{cof}(A)$.

Théorème. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{cof}(A))^T$.

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{cof}(A))^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \det A = 2$

cof(A)

$$\begin{aligned} (+1) \det \hat{A}_{11} &= 0 \\ (-1) \det \hat{A}_{12} &= 0 \\ (+1) \det \hat{A}_{13} &= 2 \\ (-1) \det \hat{A}_{21} &= (-1)(-3) = 3 \\ (1) \det \hat{A}_{22} &= 2 \\ (-1) \det \hat{A}_{23} &= (-1)(3) = -3 \\ (+1) \det \hat{A}_{31} &= -1 \\ (-1) \det \hat{A}_{32} &= 0 \\ (+1) \det \hat{A}_{33} &= 1 \end{aligned}$$

7.7 La matrice des cofacteurs et une formule pour A^{-1}



Notes

Je supprime là et là ça me fait -3 Et là je fini. Donc, j'ai +1 fois le déterminant de \hat{A}_{31} , qui est -1. J'ai -1 fois le déterminant de \hat{A}_{32} , qui est 0 et +1 fois le déterminant de \hat{A}_{33} qui est égal à 1. Ensuite, la matrice des cofacteurs, c'est la matrice formée de tout ça. Donc là, c'est la première ligne, j'ai (0 0 2) ensuite la deuxième ligne (3 2 -3) ensuite la troisième ligne (-1 0 1) et puis l'inverse de A, c'est 1 sur le déterminant de A matrice des cofacteurs de A, transposée. Donc c'est 1/2 fois la transposée de cette matrice là. Je mets les lignes dans les colonnes. Maintenant, si je multiplie ces deux matrices, je devrais trouver la matrice identité. Je vérifie rapidement. J'obtiens (1 0 0) donc la première ligne est correcte. Ensuite 0+0+0 0+2+0, fois 1/2 c'est 1, ensuite 0+0+0 c'est correct 2+0-2=0, 0-3+3=0, ensuite 2+0+0=2, et fois 1/2 c'est 1 c'est correct.

Summary



10m 45s

Définition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. La matrice des cofacteurs de A est la matrice $n \times n$ dont l'entrée (i, j) est égale à $(-1)^{i+j} \det(\hat{A}_{ij})$. On la dénote par $\text{cof}(A)$.

Théorème. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{cof}(A))^T$.

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{cof}(A))^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \det A = 2$

cof(A)

$$(+1) \det \hat{A}_{11} = 0$$

$$(-1) \det \hat{A}_{12} = 0$$

$$(+1) \det \hat{A}_{13} = 2$$

$$(-1) \det \hat{A}_{21} = (-1)(-3) = 3$$

$$(1) \det \hat{A}_{22} = 2$$

$$(-1) \det \hat{A}_{23} = (-1)(3) = -3$$

$$(+1) \det \hat{A}_{31} = -1$$

$$(-1) \det \hat{A}_{32} = 0$$

$$(+1) \det \hat{A}_{33} = 1$$

7.7 La matrice des cofacteurs et une formule pour A^{-1}



Donc c'est une formule explicite pour l'inverse d'une matrice, mais vous avez vu que juste pour 3×3 il faut calculer neuf déterminants 2×2 ce qui fait trop de calculs. Voilà la fin du chapitre 7. Dans le chapitre 8 nous revenons aux applications linéaires et on va utiliser le déterminant pour nous aider à décortiquer une application linéaire.

Notes

Summary



12m 51s