



8.1 Valeurs propres et vecteurs propres, définitions et exemples



Dans ce chapitre, nous retournons à l'étude des applications linéaires entre des espaces vectoriels de dimension finie. Et puis, donc le chapitre sur le déterminant, c'était vraiment pour nous un chapitre de... un outil qu'on va appliquer ici. Donc on peut étudier les déterminants pour d'autres raisons théoriques mais la raison pour laquelle nous avons introduit dans ce cours, c'est vraiment l'application que nous en ferons ici dans ce chapitre. Je commence par vous parler un petit peu des applications linéaires que nous aimons bien. Et après, ça donnera lieu à la définition de ce qu'est une valeur propre et un vecteur propre.

Notes

Summary



0m 03s

Sont $T: V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V (de dimension finie).

Fixons une base B_V de V .

$[T]_{B_V}$ est une matrice carrée.

Quelles sont les matrices carrées les plus simples à manipuler?

Les matrices diagonales sont très faciles!

$$\text{Sont } A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}$$

8.1 Valeurs propres et vecteurs propres, définitions et exemples

Donc je considère une application linéaire qui part de V et qui arrive dans V . Donc soit $T: V \rightarrow V$, une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie. Maintenant je rappelle qu'on utilise d'autres mots pour une transformation linéaire. Des fois, on dit un endomorphisme de V ou bien un opérateur linéaire sur V . Et maintenant, comme j'ai choisi V d'être de dimension finie, on peut fixer une base. Donc fixons une base B_V de V . Et puis on peut représenter T par rapport à cette base seulement. Donc T par rapport à la base B_V , en venant, en rentrant, est une matrice carrée. Et puis quelles sont les matrices carrées qui sont les plus simples à manipuler? Je pense qu'on est tous d'accord que les matrices très faciles à manipuler sont les matrices diagonales. Donc par exemple, si on prend une matrice diagonale avec les valeurs d_1, \dots, d_n le long de la diagonale et 0 ailleurs. Donc par exemple, cette matrice-là, si on veut l'élever à une puissance, $A \cdot \dots \cdot A$, k fois, alors c'est simplement la puissance des valeurs le long de la diagonale.

Notes

Summary



Sont $T: V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V (de dimension finie).

Fixons une base B_V de V .

$[T]_{B_V}$ est une matrice carrée.

Quelles sont les matrices carrées les plus simples à manipuler?

Les matrices diagonales sont très faciles!

$$\text{Sont } A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}; \quad A^k = A \cdot A \cdots A = \begin{pmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{pmatrix}.$$

Si $A = [T]_{B_V}$ alors si $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ alors $T(v_i) = d_i \cdot v_i$.

8.1 Valeurs propres et vecteurs propres, définitions et exemples



Donc ça c'est très, très simple, vraiment. Donc ça c'est juste pour illustrer ce qui est bien avec les matrices diagonales. Et maintenant, comment je peux repérer le fait que j'ai ici une matrice diagonale, que la matrice de T soit une matrice diagonale? Donc si A représente l'application linéaire T par rapport à la base B_V , le fait que A soit diagonale ça dit quelque chose sur l'action de T sur cette base. Si A est égal à la matrice de T , alors si en plus je donne la base $B_V v_1, \dots, v_n$, alors quand T est appliqué à v_i , alors ça donne la colonne $(0, 0, 0, d_i, 0, 0, 0)$. Donc ça veut dire que c'est exactement égal à $d_i \cdot v_i$. Donc T envoie le vecteur v_i vers un multiple de lui-même. Et c'est ça qui donne lieu à la définition suivante et la définition vraiment essentielle de ce chapitre.

Notes

Summary



Définition.

- (1) Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel, $T : V \rightarrow V$ une transformation linéaire. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de T s'il existe $v \in V$, $v \neq 0$ t. q. $T(v) = \lambda v$. Si λ est une valeur propre de T , alors tout $0 \neq v \in V$ t. q. $T(v) = \lambda v$ s'appelle un **vecteur propre** de T correspondant à la valeur propre λ .

Exemple. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, T la projection orthogonale sur le plan (xy) , $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.



8.1 Valeurs propres et vecteurs propres, définitions et exemples

Voilà la définition : Je me donne un \mathbb{R} -espace vectoriel, qui n'est pas, pour cette définition, pas nécessairement de dimension finie, ce n'est pas nécessaire. Et puis je me donne une transformation linéaire de V . Et puis on donne une valeur réelle, λ , et on dit que λ est une valeur propre de T s'il existe un v dans V non-nul tel que T envoie v à un multiple de lui-même. Donc c'est exactement ce qu'on a vu quand on avait la matrice diagonale qui représentait T , ça envoyait le v_i à un multiple de v_i . Maintenant, si λ est une valeur propre de T , tous les vecteurs non-nuls qui sont envoyés à ce multiple d'eux-mêmes, ça s'appelle un vecteur propre de T correspondant à la valeur propre λ . Maintenant faisons un exemple. Je prends T de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 d'être la projection orthogonale sur le plan (xy) . Donc la formule pour T c'est (x, y, z) est envoyé à $(x, y, 0)$. Maintenant, regardons ce qui se passe. Si je fais T appliqué au vecteur $(1, 0, 0)$, ça, ça donne $(1, 0, 0)$ donc c'est 1 fois le vecteur.

Notes

Summary



3m 42s

Définition.

- (1) Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel, $T : V \rightarrow V$ une transformation linéaire. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de T s'il existe $v \in V$, $v \neq 0$ t. q. $T(v) = \lambda v$. Si λ est une valeur propre de T , alors tout $0 \neq v \in V$ t. q. $T(v) = \lambda v$ s'appelle un **vecteur propre** de T correspondant à la valeur propre λ .

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (2) Soient $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de A s'il existe $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ t. q. $AX = \lambda X$. Si λ est une valeur propre de A , toute solution non triviale de $AX = \lambda X$ s'appelle un **vecteur propre** de A correspondant à la valeur propre λ .

8.1 Valeurs propres et vecteurs propres, définitions et exemples



Donc ça ça implique que 1 est une valeur propre de T et ce vecteur-là est un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ . $\lambda = 1$ Donc 1 est une valeur propre. Et puis ce vecteur-là est un vecteur propre de T correspondant à la valeur propre $\lambda = 1$. Alors quoi encore ? Si j'envoie $(0, 1, 0)$. T appliqué à ça, c'est $(0, 1, 0)$ qui est aussi 1 fois $(0, 1, 0)$. Donc ça c'est encore un autre vecteur propre. $(0, 1, 0)$ est aussi un vecteur propre de T pour la valeur propre 1, $\lambda = 1$. Et puis il y a encore une valeur propre dans les parages. Donc si j'applique T à $(0, 0, 1)$, j'obtiens $(0, 0, 0)$, qui est 0 fois $(0, 0, 1)$. Donc là, on voit quelque chose d'important. Le vecteur ne peut pas être 0 dans la définition mais le λ peut être 0. Donc 0 est une valeur propre de T et le vecteur $(0, 0, 1)$ est un vecteur propre de valeur propre 0. Donc ça c'est le premier exemple. Maintenant, à chaque fois qu'on a une définition pour une application linéaire, on peut faire une définition analogue pour une matrice. Donc ça c'est la prochaine définition.

Notes

Summary



Définition.

- (1) Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel, $T : V \rightarrow V$ une transformation linéaire. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de T s'il existe $v \in V$, $v \neq 0$ t. q. $T(v) = \lambda v$. Si λ est une valeur propre de T , alors tout $0 \neq v \in V$ t. q. $T(v) = \lambda v$ s'appelle un **vecteur propre** de T correspondant à la valeur propre λ .

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (2) Soient $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de A s'il existe $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ t. q. $AX = \lambda X$. Si λ est une valeur propre de A , toute solution non triviale de $AX = \lambda X$ s'appelle un **vecteur propre** de A correspondant à la valeur propre λ .

8.1 Valeurs propres et vecteurs propres, définitions et exemples



Donc ça c'est la définition que nous venons de voir avec la transformation linéaire. Et maintenant, on a une définition similaire pour une matrice. Donc je me donne une matrice $n \times n$, parce qu'ici c'est une transformation linéaire dans V , donc la matrice ici est carrée. On dit qu'une valeur réelle est une valeur propre de cette matrice s'il existe un X dans $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, donc un vecteur colonne, différent de 0 , tel que AX est égal à λX . Donc A envoie X un multiple de lui-même par multiplication à gauche. Si λ est une valeur propre de cette matrice A , toute solution non-triviale du système $AX = \lambda X$ s'appelle un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre λ . Donc c'est vraiment la définition analogue à l'autre définition. Donc considérons notre exemple ici. Donc ici on se donne une matrice 4×4 . Et puis je veux juste repérer une valeur propre et un vecteur propre correspondant. Donc pour le moment, je ne vous ai pas du tout donné une méthode, c'est que je connais ces matrices, je connais ces transformations, donc je sais déjà d'avance quelles sont les valeurs propres ou bien les vecteurs propres.

Notes

Summary



6m 56s

Définition.

- (1) Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel, $T : V \rightarrow V$ une transformation linéaire. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de T s'il existe $v \in V$, $v \neq 0$ t. q. $T(v) = \lambda v$. Si λ est une valeur propre de T , alors tout $0 \neq v \in V$ t. q. $T(v) = \lambda v$ s'appelle un **vecteur propre** de T correspondant à la valeur propre λ .
- (2) Soient $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de A s'il existe $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ t. q. $AX = \lambda X$. Si λ est une valeur propre de A , toute solution non triviale de $AX = \lambda X$ s'appelle un **vecteur propre** de A correspondant à la valeur propre λ .

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda = 2$ est une valeur propre de A

car

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre $\lambda = 2$.

8.1 Valeurs propres et vecteurs propres, définitions et exemples



Après on aura une méthode. Mais pour le moment, je veux juste illustrer la définition. Donc ici je prétends que $\lambda = 2$ est une valeur propre de A car si je fais A fois le vecteur $(1, 0, 0, 0)$, donc si je multiplie ici ce vecteur, j'obtiens, donc je fais la multiplication, donc là, j'ai 2, ensuite 0, 0, 0. Donc c'est 2 fois le vecteur original, là. Et ça, ça suffit pour voir que 2 est une valeur propre de A parce que j'ai un vecteur non-nul ici qui est envoyé à 2 fois lui-même. Donc un vecteur colonne qui est envoyé à 2 fois lui-même par multiplication à gauche par A . Et puis $(1, 0, 0, 0)$ est un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre $\lambda = 2$. Maintenant, avant de vous donner une méthode pour trouver les valeurs propres et les vecteurs propres, j'ai juste deux remarques à faire.

Notes

Summary



Remarque.

① $0 \in \mathbb{R}$ peut être une valeur propre.

Si 0 est une valeur propre de $T: V \rightarrow V$, alors il existe $v \in V, v \neq 0$ t.q.

$$T(v) = 0 \cdot v = 0 \Rightarrow \ker T \neq \{0\} \Rightarrow T \text{ est non injective.}$$

② Le vecteur nul $0 \in V$ ne peut pas être un vecteur propre par définition !

8.1 Valeurs propres et vecteurs propres, définitions et exemples



Remarque: Donc première remarque, c'est que 0 , le nombre réel 0 , peut très bien être une valeur propre. D'ailleurs, on a déjà vu avec la projection. Et si 0 est une valeur propre de T , faisons le cas d'une transformation, alors ça veut dire qu'il existe un v dans V , non-nul, tel que $T(v) = 0 \cdot v$ est égal à 0 . Donc ça veut dire que le $\ker(T)$ n'est pas 0 . Et ça, ça veut dire que T est non-injectif et non-bijectif. Donc ça, c'est une remarque. Deuxième remarque. Le vecteur nul 0 dans V ne peut être un vecteur propre par définition. Donc je souligne « ne peut pas », ne peut pas être un vecteur propre. Tout simplement par définition. Voilà, ça, c'est deux remarques très importantes. La première c'est que la valeur propre 0 est tout à fait admise. Par contre, un vecteur propre est par définition un vecteur non-nul.

Notes

Summary



9m 36s