



8.2 Valeurs propres: comment les trouver



Dans la vidéo précédente, nous avons défini ce que sont une valeur propre et un vecteur propre pour une application linéaire de V dans V et aussi pour une matrice. Et puis, à la fin, on s'est arrêté sur la question : comment est-ce qu'on va trouver les valeurs propres et les vecteurs propres, pour une application ou bien une matrice donnée. La première chose que j'aimerais vous montrer, c'est que ces deux questions (application linéaire et matrice) sont pareilles, donc je vais pouvoir travailler avec une matrice au lieu de travailler avec l'application. Donc c'est la 1ère chose. Et après on développe une méthode pour trouver les valeurs propres d'une matrice.

Notes

Summary



0m 03s

Proposition. Soient $T : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie, et $A = [T]_{\mathcal{B}}$ où \mathcal{B} est une base fixe de V . Alors λ est une valeur propre de T si et seulement si λ est une valeur propre de A .

Preuve: \Rightarrow On suppose que λ est une valeur propre de T .
 Donc il existe $v \in V, v \neq 0$ tel que $T(v) = \lambda \cdot v$.
 Donc $[T]_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}} = [\lambda v]_{\mathcal{B}} :$



8.2 Valeurs propres: comment les trouver

Voilà la proposition. Je me donne une transformation linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie et puis je pose sa matrice par rapport à une base fixe de V . Alors λ est une valeur propre de l'application T si et seulement si λ est une valeur propre de A . Donc après, on va pouvoir travailler qu'avec la matrice A et on laisse de côté l'application linéaire pendant le calcul. Ici, je vais montrer une direction, les deux directions sont à peu près les mêmes. Preuve : Bon, je fais la direction comme ça, donc je suppose que λ est une valeur propre de T . Donc par définition, ça veut dire qu'il existe un v non nul tel que $T(v)$, c'est juste λv . Maintenant, je vais tourner ça en une équation matricielle donc ça veut dire que si je prends la matrice de T , représentée par rapport à la base B et je multiplie par le vecteur v , représenté par rapport à la base B , ça, c'est la même chose, on sait, que $T(v)$ représenté par rapport à la base B , qui est λv par cette relation-là. Et puis représenter λv par rapport à B c'est la même chose que multiplier la représentation de v par le scalaire λ .

Notes

Summary



0m 42s

Proposition. Soient $T : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie, et $A = [T]_{\mathcal{B}}$ où \mathcal{B} est une base fixe de V . Alors λ est une valeur propre de T si et seulement si λ est une valeur propre de A .

Preuve: \Rightarrow On suppose que λ est une valeur propre de T .

Donc il existe $v \in V, v \neq 0$ tel que $T(v) = \lambda \cdot v$.

$$\text{Donc } [T]_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}} = [\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda [v]_{\mathcal{B}}$$

$$A \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \lambda [v]_{\mathcal{B}}.$$

Comme $v \neq 0$, $[v]_{\mathcal{B}} \neq 0$ et λ est une valeur propre de la matrice A .

8.2 Valeurs propres: comment les trouver



Donc ici, ça veut dire que j'ai λ fois le vecteur colonne $(v)_{\mathcal{B}}$ est égal à λ fois ce même vecteur colonne. Et donc comme le v est non nul, ce vecteur colonne est non nul, et par la définition, de valeur propre de A , le scalaire λ est une valeur propre pour de la matrice A . Donc ça, c'est une direction. Et puis l'autre direction est similaire donc je ne vais pas la démontrer. Et puis la morale de cette histoire, c'est que maintenant, si on cherche ces valeurs propres d'une application linéaire, on peut simplement travailler avec la matrice. Ok très bien. Donc maintenant, je vais développer une méthode.

Notes

Summary



Méthode

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ est une valeur propre de $A \iff$ il existe une solution non triviale de $AX = \lambda X$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$\iff AX - \lambda X = 0$$

$$\iff (A - \lambda I)X = 0$$

$$\iff A - \lambda I \text{ est non inversible} \iff \det(A - \lambda I) = 0.$$

8.2 Valeurs propres: comment les trouver



Donc d'abord, je me donne une matrice, soit A une matrice $n \times n$, à coefficients réels, et λ un scalaire. Par définition, λ est une valeur propre de A si et seulement si il existe une solution non triviale, de l'équation matricielle $AX = \lambda X$ où X ici est un vecteur colonne de variable. Et ça, c'est si et seulement si $AX - \lambda X = 0$. Et ça, c'est si et seulement si $(A - \lambda I)X = 0$ fois l'identité qui multiplie X est $= 0$. Et puis maintenant, ça, c'est si et seulement si on arrive à notre critère. J'ai maintenant un système homogène avec une matrice de coefficient carré alors ce système possède une solution non triviale, si et seulement si cette matrice-là est non inversible. Donc si et seulement si A moins λ fois l'identité est non inversible. Et ça, c'est si et seulement si le déterminant de cette matrice est égal à zéro. Donc enfin, on revient au déterminant et c'est ici vraiment que l'on va l'utiliser beaucoup. Donc je commence avec une matrice et je me donne un scalaire. Et puis je dis que λ est une valeur propre de cette matrice si et seulement si le déterminant de cette matrice-là est zéro.

Notes

Summary



3m 23s

Méthode Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ est une valeur propre de $A \iff$ il existe une solution non triviale de $AX = \lambda X$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$\iff AX - \lambda X = 0$$

$$\iff (A - \lambda I)X = 0$$

$$\iff A - \lambda I \text{ est non inversible} \iff \det(A - \lambda I) = 0.$$

On pose t une variable. On forme la matrice $A - tI$ (les coefficients de cette matrice sont des polynômes en t à coefficients réels).

On calcule $c_A(t) = \det(A - tI)$, un polynôme en t à coefficients réels.

On a: λ est une valeur propre de A si et seulement si $c_A(\lambda) = 0$, c.à.d λ est une racine du polynôme $c_A(t)$.

8.2 Valeurs propres: comment les trouver



Ok donc, notre méthode est la suivante : on pose t une variable, on forme la matrice $A - tI$. Les coefficients de cette matrice sont les polynômes en t à coefficients réels. Après, je vais calculer le déterminant de cette matrice. On calcule, je vais lui donner un nom, $C_A(t)$ le déterminant de cette matrice-là. Ça, ça va être un truc compliqué, c'est un polynôme en t aussi, à coefficients réels. Je fais ce calcul-là et puis d'après tout ce que l'on a dit ici, λ est une valeur propre de A si et seulement si $C_A(\lambda)$ est égal à zéro. C'est-à-dire λ est une racine de ce polynôme. Donc ça, c'est vraiment une méthode. Donc je commence avec la matrice, je pose la matrice à $-t$ fois l'identité. Après, je calcule le déterminant de cette matrice. Ça, ça peut être difficile, mais c'est un calcul. Après, on a que λ est une valeur propre de cette matrice, si et seulement si λ est une racine de ce polynôme. Donc je substitue λ dans le polynôme et puis j'obtiens zéro. Ça aussi ça peut être difficile parce que vous savez que des fois, c'est difficile de trouver les racines d'un polynôme. Mais voilà, ça c'est une méthode. Maintenant, je vais appliquer cette méthode à deux exemples.

Notes

Summary



Exemples.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A - tI = \begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & -3-t \end{pmatrix}$$

$$\det(A - tI) = (2-t)(-3-t)$$

valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -3$.

$$(2) T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}), T(p(t)) = p'(t)$$



8.2 Valeurs propres: comment les trouver

D'abord je me donne une matrice de taille 2×2 . Et puis je vais calculer le $C_A(t)$. Alors je pose $A - tI$, c'est la matrice : [Voir écran] Parce que t fois l'identité, c'est la matrice diagonale avec t sur la diagonale et puis après je soustrais ça de la matrice A . Et ensuite, je calcule le déterminant. Ici, c'est une matrice triangulaire donc on a appris que le déterminant d'une matrice triangulaire, c'est juste le produit des valeurs le long de la diagonale. Et puis ici les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -3$. Donc ce sont les deux racines de ce polynôme de degré deux.

Après, vous pouvez vérifier qu'effectivement, il existe un vecteur non nul qui est envoyé à deux fois lui-même quand on multiplie à gauche par A et puis un autre vecteur, tel que A fois ce vecteur est égal à moins trois fois le vecteur. Un deuxième exemple, on va beaucoup travailler donc je vous donnerai des exemples plus compliqués aussi, mais juste les premiers exemples sont ici. Alors là je me donne une application qui est l'application des polynômes de degré au plus deux qui fait la dérivée du polynôme.

Notes

Summary



7m 12s

Exemples.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}), T(p(t)) = p'(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - tI = \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 2 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

$$c_A(t) = \det(A - tI) = (-t)^3$$

une seule valeur propre, $\lambda_1 = 0$.

8.2 Valeurs propres: comment les trouver



Alors je calcule la dérivée, donc je fixe une base pour poser une matrice. On pose une matrice pour T , disons par rapport à une base donc on choisit la base. Je prends la base $(1, t, t^2)$, j'appelle ça B . Donc soit A , la matrice de T par rapport à cette base B . Maintenant, si je fais la dérivée de 1 j'obtiens zéro. Donc d'abord j'ai une colonne de zéro. La dérivée de t , c'est juste le polynôme constant 1, donc là j'obtiens $(1, 0, 0)$. Et la dérivée de t^2 , c'est $2t$, donc j'obtiens $(0, 2, 0)$. Donc voilà la matrice. Maintenant, je reprends cette matrice et je vais calculer ce polynôme $C_A(t)$. Donc $A - t$ fois l'identité, c'est la matrice [voir écran]. Et puis le déterminant, $C_A(t)$, est égal $\det(A - tI)$, et ceci est égal, comme de nouveau c'est une matrice triangulaire supérieure, c'est $(-t)^3$ donc il y a une seule valeur propre, qui est $\lambda_1 = 0$. C'est la seule racine de ce polynôme. Donc voilà une méthode pour calculer les valeurs propres d'une application ou bien d'une matrice.

Notes

Summary



8m 51s

Exemples.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(2) T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}), T(p(t)) = p'(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - tI = \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 2 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

$$c_A(t) = \det(A - tI) = (-t)^3$$

une seule valeur propre, $\lambda_1 = 0$.

8.2 Valeurs propres: comment les trouver



Maintenant, il y a juste une question qui est un peu ouverte, c'est que l'on a pas répondu à la question si je pose une matrice pour l'application linéaire t ou bien une autre matrice parce que l'on sait que si on se fixe des bases différentes, on peut tomber sur des matrices différentes. Alors est-ce que ce polynôme que l'on calcule, c'est le même? Est-ce que ce polynôme aura des mêmes racines et tout ça? Et puis on va répondre à cette question dans la prochaine vidéo.

Notes

Summary



10m 51s