



8.3 Polynôme caractéristique



Dans la vidéo précédente, nous avons défini un polynôme associé à une matrice carrée et ce polynôme avait la propriété que si λ est une valeur propre de la matrice, alors λ est une racine de ce polynôme et aussi la réciproque. Maintenant, on a terminé la vidéo avec une question, c'est : Si je me donne une application linéaire, pas une matrice mais une application, et je pose une matrice ou bien une autre, est-ce que j'obtiens le même polynôme? Donc, je vais ici donner un nom à ce polynôme et aussi répondre à cette question.

Notes

Summary



0m 04s

Définition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Soit t une indéterminée. Alors le **polynôme caractéristique** de A est le polynôme $c_A(t) \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ défini par $c_A(t) = \det(A - tI)$. On a que $c_A(t)$ est un polynôme de degré n .

Exemples.

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$c_A(t) = \det \begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix}$



8.3 Polynôme caractéristique

Donc, voilà la définition qui donne un nom à ce polynôme. Je me donne une matrice, et puis t , une indéterminée. Alors, le polynôme caractéristique de A est le polynôme défini par, je soustrais t fois l'identité de la matrice et je fais le déterminant, je calcule le déterminant de cette matrice. C'est exactement le polynôme que nous avons vu dans la vidéo précédente. Maintenant, ce que je n'avais pas souligné, mais si vous allez regarder les exemples que nous avons faits, c'est que ce polynôme est toujours un polynôme de degré n , n étant la taille de la matrice, et puis il faudrait bien réfléchir à pourquoi c'est le cas. Si on donne une autre définition du déterminant, ça devient plus évident. Mais bon, je vous dis que c'est un polynôme de degré n . Donc, si vous faites un calcul et n'obtenez pas un polynôme de degré n , il y a une erreur. Faisons quelques exemples. Donc, je pose une matrice 2×2 quelconque, et puis, $c_A(t)$, donc, c'est le déterminant de cette matrice-là quand je soustrais t le long de la diagonale. Donc, j'ai $(a - t)$, b , c , $(d - t)$.

Notes

Summary



0m 40s

Définition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Soit t une indéterminée. Alors le **polynôme caractéristique** de A est le polynôme $c_A(t) \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ défini par $c_A(t) = \det(A - tI)$. On a que

Exemples.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$c_A(t) = \det \begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix}$$

$$= (a-t)(d-t) - bc$$

$$c_A(t) = t^2 - (a+d)t + ad - bc$$

8.3 Polynôme caractéristique

Donc, le polynôme caractéristique de la matrice A , c'est $(a - t)(d - t) - bc$. Je développe un petit peu. Donc, j'aurais $t^2 - (a + d)t + ad - bc$. Donc, c'est assez joli comme formule, parce qu'on retrouve des valeurs associées à la matrice que nous avons déjà étudiée. Ici, c'est la trace de la matrice, donc on a moins la trace, et ici, c'est le déterminant de la matrice. Donc, ça, c'est assez joli. C'est une formule générale pour un polynôme caractéristique d'une matrice 2×2 . Maintenant, on fait un exemple 3×3 , mais pas en général.



Notes

Summary



1m 55s

$$(2) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_B(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 3 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

additionner $t \times$ la
première colonne à la
3^e colonne.

8.3 Polynôme caractéristique



Donc, voilà, je me donne une matrice B , 3×3 . Et je calcule le polynôme caractéristique de B , donc $c_B(t)$ est égal au déterminant de la matrice. Je prends B et je soustrais t le long de la diagonale. Donc, j'ai $1 - t$, -1 , 3 , 0 , $1 - t$, 1 , 0 , $-t$. Puis, maintenant, je pourrais commencer à le développer le long d'une ligne ou bien d'une colonne, mais en fait, je vais faire un petit peu de transformations d'abord, parce que, en fait, après, j'aimerais trouver les valeurs propres. Donc, si je peux simplifier la matrice un tout petit peu avant de calculer son déterminant, peut-être que ça m'aidera à factoriser, après, ce polynôme. C'est un peu le but de ce que je fais maintenant. Donc, ici, je vois qu'une simplification que je pourrais faire, c'est que je peux rendre ça 0 en additionnant ici, t fois la première colonne à la troisième colonne. Après, j'aurai deux 0 dans la troisième ligne, et ça c'est bien. Donc, ici, je vais additionner t fois la première colonne, à la troisième. Et on se rappelle que quand on fait des opérations sur les lignes ou bien les colonnes d'une matrice, parfois, ça change le déterminant, mais d'une façon connue.

Notes

Summary



2m 43s

$$(2) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_B(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 3 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

ajouter $t \times$ la
première colonne à la
3^e colonne.

$$= \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 3+t(1-t) \\ 0 & 1-t & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3+t-t^2 \\ 1-t & 1 \end{pmatrix} = -1 - (1-t)(3+t-t^2)$$

8.3 Polynôme caractéristique



Ici, quand on fait cette opération-là, ajouter à une colonne ou bien une ligne, un multiple d'une autre colonne ou d'une autre ligne, ça ne change pas le déterminant. Donc, le déterminant est égal au déterminant de la matrice que j'obtiens. Donc, là, la première colonne n'a pas changé. La deuxième colonne ne va pas changer. Et maintenant, je vais rajouter t fois cette colonne-là, à la troisième. Donc, j'ai $3+t(1-t)$. Là, j'ai $0+1$. Et là, j'ai $t+(-t)$, donc 0 . Et puis, maintenant, je vais développer le long de la troisième ligne. Donc, ceci est égal à $+1$, fois le déterminant de la matrice 2×2 , qui est ici dans le coin. Là, j'ai -1 , $1-t$, 1 . Et ici, j'ai $3+t-t^2$. Maintenant, le déterminant de ça (bon, plus 0 , plus 0), est égal à $-1 - (1-t)(3+t-t^2)$. Bon, en l'occurrence, ça ne m'a pas aidé à factoriser ce polynôme, mais, ma foi, c'est le polynôme. Donc, ça, c'est le polynôme caractéristique de la matrice B . Je vais simplifier un petit peu, parce que j'aimerais bien pouvoir trouver les valeurs propres si possible. Ça serait bien. Donc, je pose la question. Ça, c'est le polynôme.

Notes

Summary



4m 13s

$$(2) B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_B(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 3 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

ajouter $t \times$ la
première colonne à la
3^e colonne.

$$= \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 3+t(1-t) \\ 0 & 1-t & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3+t-t^2 \\ 1-t & 1 \end{pmatrix} = -1 - (1-t)(3+t-t^2)$$

Question: Quelles sont les valeurs propres de B?

$$c_B(t) = -1 - (t^3 - 2t^2 - 2t + 3) = -t^3 + 2t^2 + 2t - 4 = t^2(-t+2) - 2(-t+2) = (-t+2)(t^2-2)$$

Valeurs propres de B sont les solutions de $(-t+2)(t^2-2)=0$. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \sqrt{2}, \lambda_3 = -\sqrt{2}$.

8.3 Polynôme caractéristique



Notes

Question : Quelles sont les valeurs propres de B ? Alors, je vais juste développer un petit peu le polynôme. $c_B(t)$ est égal à -1, et après je vous laisse vérifier que si je développe tout ça, j'ai $(t^3 - 2t^2 - 2t + 3)$. Donc, t^3 , t^2 je l'ai -1 fois, encore -1, t je l'ai -3+1, c'est -2, +3, oui, ça, c'est juste. Donc, ici, est égal à $-t^3 + 2t^2 + 2t - 4$. Normalement, factoriser un polynôme de degré 3, c'est pas évident, mais ici, je vois une astuce. Donc, ici, je mets en évidence t^2 , ici, et j'ai $(-t + 2)$, et là, je mets en évidence -2 et j'ai $(-t + 2)$. Donc, du coup, j'ai $(-t + 2)$ en évidence, et puis $(t^2 - 2)$, un facteur. Donc, les valeurs propres de B sont les solutions de l'équation $(-t + 2)(t^2 - 2) = 0$, et donc, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \sqrt{2}$ et $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Bon, ici aussi, on voit que, effectivement, c'est un polynôme de degré 3, la matrice est une matrice 3×3 , donc tout ça, ça joue. Donc, ça, c'est un bon exemple. Ça montre aussi la difficulté que nous allons rencontrer, trouver la racine de ce polynôme.

Summary



5m 49s

$$(2) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_B(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 3 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

ajouter $t \times$ la
première colonne à la
3^e colonne.

$$= \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 3+t(1-t) \\ 0 & 1-t & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3+t-t^2 \\ 1-t & 1 \end{pmatrix} = -1 - (1-t)(3+t-t^2)$$

Question: Quelles sont les valeurs propres de B ?

$$c_B(t) = -1 - (t^3 - 2t^2 + 2t + 3) = -t^3 + 2t^2 + 2t - 4 = t^2(-t+2) - 2(-t+2) \\ = (-t+2)(t^2-2)$$

Valeurs propres de B sont les solutions de $(-t+2)(t^2-2) = 0$. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \sqrt{2}, \lambda_3 = -\sqrt{2}$.

8.3 Polynôme caractéristique



Maintenant, je procède vers la question. Si je me donne une application, pas une matrice, mais une application, que se passe-t-il quand je calcule les polynômes associés à deux représentations matricielles différentes?

Notes

Summary



7m 54s

Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ et soit $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, P inversible. Alors $c_A(t) = c_{PAP^{-1}}(t)$, i.e. deux matrices semblables possèdent le même polynôme caractéristique.

Preuve :

$$\begin{aligned} c_{PAP^{-1}}(t) &= \det(PAP^{-1} - tI) \\ &= \det(PAP^{-1} - tPP^{-1}) \end{aligned}$$



8.3 Polynôme caractéristique



Donc, je me donne une matrice $n \times n$, et une matrice inversible. Alors, ce qu'il faut, c'est de voir quelle est la relation entre le polynôme caractéristique de la matrice A et le polynôme caractéristique de la matrice PAP^{-1} . Et puis, je prétends qu'en fait, c'est le même polynôme, c'est-à-dire, deux matrices semblables possèdent le même polynôme caractéristique. Donc, je vais démontrer cela. Et après, on voit que c'est exactement ce qu'il faut pour bien définir le polynôme caractéristique d'une application linéaire. Donc, d'abord, je montre cela. Preuve, c'est pas difficile, ça suit directement la définition. Donc, si je fais le polynôme caractéristique $c_{PAP^{-1}}(t)$, ceci est égal au déterminant de la matrice PAP^{-1} moins t fois l'identité. Ceci est la même chose que le déterminant de PAP^{-1} moins t fois P fois P^{-1} , parce que l'identité, c'est PP^{-1} . Donc, ceci est égal au déterminant.

Notes

Summary



8m 09s

Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ et soit $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, P inversible. Alors $c_A(t) = c_{PAP^{-1}}(t)$, i.e. deux matrices semblables possèdent le même polynôme caractéristique.

Preuve :

$$\begin{aligned}
 c_{PAP^{-1}}(t) &= \det(PAP^{-1} - tI) \\
 &= \det(PAP^{-1} - tPP^{-1}) \\
 &= \det P(AP^{-1} - tP^{-1}) \\
 &= \det P(AP^{-1} - t \cdot I P^{-1}) \\
 &= \det P(A - tI) P^{-1} \\
 &= (\det P) \det(A - tI) (\det P^{-1}) \\
 &= (\det P) \det(A - tI) \cdot \frac{1}{\det P} \\
 &= \det(A - tI) = c_A(t).
 \end{aligned}$$

8.3 Polynôme caractéristique



Maintenant, ce P là, je peux le passer à gauche du t , parce que t , c'est comme une valeur réelle, donc, ici, j'ai $P(AP^{-1} - tP^{-1})$, et ensuite, le déterminant de P , et ici, je vais glisser encore une identité, entre deux ici, et maintenant, j'ai à droite, deux fois, le P^{-1} , que je vais mettre en évidence. Très bien. Maintenant, on sait que le déterminant d'un produit, c'est le produit du déterminant, donc, ça, c'est le déterminant de P , le déterminant de A moins t fois l'identité, le déterminant de P^{-1} . Et puis, enfin, on sait aussi que le déterminant de P^{-1} , c'est juste 1 sur le déterminant de P , P est inversible, donc ce déterminant est non nul. Donc, ça, ça tombe, ces deux termes-là, et je trouve le déterminant de A moins t fois l'identité, et ça, c'est exactement le polynôme caractéristique de la matrice A . Donc, là, on a démontré que l'égalité, ici, est vérifiée. Ça nous donne la possibilité de bien définir le polynôme caractéristique d'une transformation linéaire.

Notes

Summary



9m 25s

Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ et soit $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, P inversible. Alors $c_A(t) = c_{PAP^{-1}}(t)$, i.e. deux matrices semblables possèdent le même polynôme caractéristique.

Définition. Soit $T : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie. On définit le **polynôme caractéristique de T** comme étant $c_A(t)$ où $A = [T]_{\mathcal{B}}$ pour une base ordonnée \mathcal{B} de V .

Notation. $c_T(t) = c_A(t)$.

Si \mathcal{B}' est une base de V ,
on a que
 $[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} [T]_{\mathcal{B}} P$
pour une matrice inversible P .
Donc par la proposition
 $c_{[T]_{\mathcal{B}'}}(t) = c_{P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P}(t) = c_{[T]_{\mathcal{B}}}(t)$



8.3 Polynôme caractéristique

Voilà, ça, c'est la proposition que nous venons de démontrer. Et puis voilà la définition. Je me donne une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie. Je définis le polynôme caractéristique de T comme étant $c_A(t)$, où A est la représentation matricielle de T par rapport à une base ordonnée \mathcal{B} , mais, une base quelconque. Donc, ici, la remarque à faire est que c'est une bonne définition parce que si \mathcal{B}' est une base de V , on a que la représentation de T par rapport à \mathcal{B}' est égale à la représentation de T par rapport à \mathcal{B} avec un P, P^{-1} , pour une matrice inversible P . Donc, c'est une matrice de changement de base. Donc, par la proposition, le polynôme caractéristique de cette matrice-là est exactement le même polynôme que le polynôme caractéristique de cette matrice-là. On peut commencer par la représentation de T par rapport à la base \mathcal{B} , ou bien la représentation par rapport à une autre base et ça donne le même polynôme. On dit, en fait, ici, que le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

Notes

Summary



11m 01s

Proposition. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ et soit $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, P inversible. Alors $c_A(t) = c_{PAP^{-1}}(t)$, i.e. deux matrices semblables possèdent le même polynôme caractéristique.

Définition. Soit $T : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie. On définit le **polynôme caractéristique de T** comme étant $c_A(t)$ où $A = [T]_{\mathcal{B}}$ pour une base ordonnée \mathcal{B} de V .

Notation. $c_T(t) = c_A(t)$.

Si \mathcal{B}' est une base de V ,
on a que

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} [T]_{\mathcal{B}} P$$

pour une matrice inversible P .

Donc par la proposition

$$c_{[T]_{\mathcal{B}'}}(t) = c_{P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P}(t) = c_{[T]_{\mathcal{B}}}(t).$$

On dit que le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

8.3 Polynôme caractéristique



Ça ne change pas si on calcule le polynôme caractéristique pour deux matrices semblables, c'est pareil. Et puis, ça nous permet aussi d'introduire une notation. Si on a une transformation linéaire, on va écrire $c_T(t)$ pour le polynôme caractéristique qui est associé à cette transformation linéaire. Maintenant, un exemple.

Notes

Summary



12m 42s

Définition. Soit $T : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie. On définit le **polynôme caractéristique de T** comme étant $c_A(t)$ où $A = [T]_{\mathcal{B}}$ pour une base ordonnée \mathcal{B} de V .

Notation. $c_T(t) = c_A(t)$.

$$c_{\varphi}(t) = \det \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Exemple. Soit $\phi : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $\phi(A) = A^T$. Trouver $c_{\phi}(t)$, le polynôme caractéristique de T . $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

Posons $[\phi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



8.3 Polynôme caractéristique

Je me donne l'application linéaire ϕ qui part des matrices 2×2 réelles et qui arrive dans les matrices 2×2 réelles, et puis, cette application va me donner la transposée de la matrice. Ce que je veux faire, c'est trouver le polynôme caractéristique de T . Après, on peut éventuellement chercher aussi les valeurs propres de T . Alors, je pose d'abord une matrice, une représentation matricielle pour T . Donc, je fixe une base, \mathcal{B} , de l'espace vectoriel et je prends la base $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$. Puis, la matrice de ϕ , par rapport à cette base, est égale. Maintenant, je fais la transposée d'une matrice diagonale, ça ne change pas, donc, E_{11} est envoyé à E_{11} . Ensuite, E_{12} est envoyé en bas à E_{21} , donc, c'est 0, 0, 1, 0. Ensuite, E_{21} est envoyé à E_{12} , donc, 0, 1, 0, 0. Et puis, de nouveau, une matrice diagonale sous la transposée ne change pas. Voilà. Donc, maintenant, je calcule le polynôme caractéristique de ϕ . $c_{\phi}(t)$, c'est le déterminant de la matrice où je soustrais T le long de la diagonale, ici. Donc, j'ai $1 - t, 0, 0, 0$.

Notes

Summary



13m 04s

Définition. Soit $T : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie. On définit le **polynôme caractéristique de T** comme étant $c_A(t)$ où $A = [T]_{\mathcal{B}}$ pour une base ordonnée \mathcal{B} de V .

Notation. $c_T(t) = c_A(t)$.

$$c_{\phi}(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t) \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} \\ = (1-t)(1-t) \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)^2 (t^2 - 1) \\ = (1-t)^2 (t-1)(t+1)$$

Exemple. Soit $\phi : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $\phi(A) = A^T$. Trouver $c_{\phi}(t)$, le **polynôme caractéristique de T** . $\mathcal{B} = (\mathcal{E}_{11}, \mathcal{E}_{12}, \mathcal{E}_{21}, \mathcal{E}_{22})$

Posons $[\phi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8.3 Polynôme caractéristique

0, -t, 1, 0. 0, 1, -t, 0. Et ensuite, 0, 0, 0, 1 - t. Bon, on a de la chance, parce que cette matrice a beaucoup de zéros, déjà. Donc, ça, c'est la même chose que le déterminant. Bon, je développe, ici, le long de la première ligne, j'ai ce coefficient-là qui multiplie: 1 - t, qui multiplie le déterminant de ce qui reste quand je supprime la première ligne et la première colonne, donc, c'est -t, 1, 0. 1, -t, 0. 0, 0, 1 - t. Le reste est 0, donc c'est correct. Et maintenant, je vais développer ce déterminant-là par rapport à, disons, la troisième colonne. Donc, j'ai le facteur de 1 - t que j'avais avant, ensuite, j'ai plus, moins, plus, moins, plus: encore un facteur de 1 - t, et j'ai le déterminant de la matrice 2 x 2 qui est ici dans le coin, donc -t, 1 1, -t. Maintenant, je finis, j'ai (1 - t)² et puis, ici, j'ai (t² - 1). Donc, du coup, ce polynôme, je peux facilement le factoriser en facteurs linéaires. J'ai (t - 1), (t + 1). Bon, déjà, vous voyez que c'est bien un polynôme de degré 4. Comme j'ai dit avant, si vous faites ce calcul et ne trouvez pas un polynôme de degré de la taille de la matrice, il y a une erreur.

Notes

Summary



14m 43s

Définition. Soit $T : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie. On définit le **polynôme caractéristique de T** comme étant $c_A(t)$ où $A = [T]_{\mathcal{B}}$ pour une base ordonnée \mathcal{B} de V .

Notation. $c_T(t) = c_A(t)$.

$$c_{\varphi}(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t) \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= (1-t)(1-t) \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)^2 (t^2 - 1) = (1-t)^2 (t-1)(t+1)$$

Les valeurs propres de φ sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

Exemple. Soit $\phi : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $\phi(A) = A^T$. Trouver $c_{\phi}(t)$, le polynôme caractéristique de T . $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

Posons $[\phi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8.3 Polynôme caractéristique



Donc, c'est de degré 4. Ici, je connais toutes les racines, donc, les valeurs propres de φ sont $\lambda_1 = 1$, donc, là, j'ai une racine 1, là aussi, et $\lambda_2 = -1$. J'utilise ce qu'on a déjà vu, que, quand on a une application linéaire, pour trouver ses valeurs propres, on peut travailler avec la matrice qui représente l'application. Et puis, l'autre chose, c'est que si on veut les valeurs propres d'une matrice, on calcule le polynôme caractéristique et les valeurs propres sont les racines de ce polynôme. Donc, voilà, l'exemple. Je vais juste signaler encore une chose, avant de terminer. C'est que, si on a une valeur propre, on sait que quelque part, il existe un vecteur non nul qui est envoyé à ce multiple de lui-même. Je veux juste remarquer que, ici, on voyait déjà, quand on appose la matrice, on aurait pu remarquer déjà que 1 est une valeur propre, parce que le E_{11} est envoyé à lui-même. Et le E_{22} est envoyé à lui-même. Ça veut dire qu'on savait déjà, avant de faire le calcul qu'on devrait trouver comme racine du polynôme caractéristique la valeur 1.

Notes

Summary



16m 32s