



8.4 Espaces propres



Maintenant, nous allons associer un sous espace à chacune de nos valeurs propres pour ou bien une transformation linéaire ou bien une matrice.

Notes

Summary



0m 03s

Définition.

- (1) Soit $\phi : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de ϕ . Alors $E_\lambda = \{v \in V : \phi(v) = \lambda v\}$ s'appelle l'espace propre associé à λ .

$$E_\lambda = \text{l'ensemble des vecteurs propres de } \phi \text{ correspondant à la valeur propre } \lambda \cup \{0\}.$$

- (2) $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, λ une valeur propre de A , $E_\lambda = \{X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) : AX = \lambda X\}$.

Proposition. E_λ est un sous-espace vectoriel.

8.4 Espaces propres



La définition est la suivante : je me donne une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel et je me donne une valeur propre pour cette transformation linéaire. Je pose E_λ d'être l'ensemble des éléments $v \in V$ tels que $\phi(v) = \lambda v$. Et ça, ça s'appelle : l'espace propre associé à λ . En fait, avant de continuer, je veux faire une remarque. C'est E_λ , on a l'impression que c'est l'ensemble des vecteurs propres mais le problème c'est que si je pose $v = 0$, je vais trouver cette égalité qui est vérifiée et on sait que $v = 0$ n'est pas un vecteur propre par définition. Donc ce E_λ c'est exactement l'ensemble des vecteurs propres de ϕ correspondant à la valeur propre λ réunion avec le vecteur nul. Donc ce E_λ c'est presque l'ensemble des vecteurs propres, seulement 0 n'est pas admis comme vecteur propre par définition, donc ce sont tous les vecteurs propres et aussi le vecteur 0 car, je le répète, visiblement, si vous mettez 0 ici, vous avez une égalité. Également, on fait une définition analogue pour une matrice.

Notes

Summary



0m 12s

Définition.

- (1) Soit $\phi : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de ϕ . Alors

$E_\lambda = \{v \in V : \phi(v) = \lambda v\}$ s'appelle l'espace propre associé à λ .

$E_\lambda =$ l'ensemble des vecteurs propres de ϕ correspondant à la valeur propre λ $\cup \{0\}$.

- (2) $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, λ une valeur propre de A ,
 $E_\lambda = \{X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) : AX = \lambda X\}$.

Proposition. E_λ est un sous-espace vectoriel.

Preuve (1) E_λ est non vide car
 $\phi(0) = 0 = \lambda \cdot 0$. donc $0 \in E_\lambda$.

Soient $v_1, v_2 \in E_\lambda$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Q: $\alpha v_1 + v_2 \in E_\lambda$?

8.4 Espaces propres



Je me donne une matrice $n \times n$ une valeur propre de cette matrice. Alors E_λ sera toutes les solutions de l'équation $AX = \lambda X$. De nouveau, c'est l'ensemble des vecteurs propres, auxquels on rajoute la colonne 0, i.e. le vecteur nul. Maintenant, la proposition c'est que ce E_λ est un sous-espace vectoriel. Je le fais en détails dans le cas un. Il faut voir que c'est non vide. Pour deux raisons : On sait qu'il existe un vecteur propre mais sinon, on peut mettre 0 dedans. Donc E_λ est non vide car $\phi(0)$, c'est 0 qui est aussi égal à $\lambda 0$. Donc le vecteur nul appartient à l'ensemble E_λ . Il faut maintenant montrer que c'est fermé sous les opérations qui définissent un espace vectoriel. Je me donne deux vecteurs et un scalaire. Soit $v_1, v_2 \in E_\lambda$ et soit α , un nombre réel. Je fais la combinaison linéaire de v_1 et v_2 avec ce scalaire. La question c'est : est-ce que ça appartient à E_λ ? Pour savoir si ce vecteur appartient à E_λ , je dois faire : ϕ appliquée au vecteur.

Notes

Summary



1m 27s

Définition.

- (1) Soit $\phi : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de ϕ . Alors

$E_\lambda = \{v \in V : \phi(v) = \lambda v\}$ s'appelle l'espace propre associé à λ .

$E_\lambda =$ l'ensemble des vecteurs propres de ϕ correspondant à la valeur propre λ $\cup \{0\}$.

- (2) $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, λ une valeur propre de A ,
 $E_\lambda = \{X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) : AX = \lambda X\}$.

Preuve E_λ est l'ensemble des solutions du système homogène : $(A - \lambda I)X = 0$.

Proposition. E_λ est un sous-espace vectoriel.

Preuve (1) E_λ est non vide car
 $\phi(0) = 0 = \lambda \cdot 0$. dnc $0 \in E_\lambda$.

Soient $v_1, v_2 \in E_\lambda$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Q: $\alpha v_1 + v_2 \in E_\lambda$?

$$\phi(\alpha v_1 + v_2) = \alpha \phi(v_1) + \phi(v_2) = \alpha \cdot \lambda v_1 + \lambda \cdot v_2$$

\uparrow ϕ est linéaire \uparrow car $v_i \in E_\lambda$ $i=1,2$.

$$\phi(\alpha v_1 + v_2) = \lambda(\alpha v_1 + v_2) \Rightarrow \alpha v_1 + v_2 \in E_\lambda.$$

Par conséquent, E_λ est un sous-espace vectoriel de V .

8.4 Espaces propres



Et ce système homogène c'est : $A - \lambda I$, donc c'est une matrice carrée qui multiplie les x et qui donne 0. C'est une autre façon d'écrire cette égalité. Comme E_λ est l'ensemble des solutions d'un système homogène, on sait déjà que c'est un sous-espace vectoriel. On l'a déjà vu. Faisons maintenant des exemples pour trouver l'espace propre associé à une valeur propre.

Notes

Summary



Exemples.

$$(1) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$c_B(t) = -t^3 + 2t^2 + 2t - 4$$
$$= (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})(-t + 2)$$

valeurs propres de B sont

$$\lambda_1 = \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 2$$

Déterminer l'espace propre $E_{\sqrt{2}}$.

Solution du système

$$(B - \sqrt{2}I)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & -1 & 3 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



8.4 Espaces propres

On va reprendre une matrice où on a déjà calculé le polynôme caractéristique. C'était dans la vidéo 8.2. Je vous donne une matrice 3×3 . Nous avons déjà calculé ce polynôme caractéristique et c'est ce qu'on a trouvé. On a d'ailleurs aussi pu factoriser le polynôme. Et ceci a donné : $(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})(-t + 2)$. Donc les valeurs propres de B sont $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 2$. Donc il y a trois valeurs propres. Je ne vais pas faire le calcul de tous les espaces propres mais juste un exemple : je vais chercher l'espace propre associé à la valeur propre $\sqrt{2}$. Donc déterminer l'espace propre $E_{\sqrt{2}}$. Ça, c'est la solution du système homogène, je prends $(B - \sqrt{2}I)X = 0$. Alors $B - \sqrt{2}I$, c'est la matrice [voir écran]. Maintenant je dois résoudre un système homogène donc je vais utiliser la méthode d'échelonnage pour simplifier cette matrice et après je trouverai la solution. Et on sait dans la théorie que comme $\sqrt{2}$ est une valeur propre, il existe une solution non triviale et qu'on va trouver une infinité de solutions de ce système. Alors je vais échelonner.

Notes

Summary



5m 10s

Exemples.

$$(1) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c_B(t) = -t^3 + 2t^2 + 2t - 4$$

$$= (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})(-t + 2)$$

valeurs propres de B sont

$$\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}, \lambda_3 = 2$$

Déterminer l'espace propre $E_{\sqrt{2}}$.

$$D_3(1 - \sqrt{2}) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 - \sqrt{2} & 3 + 3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1 + \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 3 - \sqrt{2} - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 - \sqrt{2} & 3 + 3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1 + \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{32}(1)} \begin{pmatrix} -1 & -1 - \sqrt{2} & 3 + 3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1 + \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution du système

$$(B - \sqrt{2}I)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & -1 & 3 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{D_1(1 + \sqrt{2})} \begin{pmatrix} -1 & -1 - \sqrt{2} & 3 + 3\sqrt{2} \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{31}(1)} \begin{pmatrix} -1 & -1 - \sqrt{2} & 3 + 3\sqrt{2} \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 - \sqrt{2} & 3 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{D_2(1 + \sqrt{2})} \begin{pmatrix} -1 & -1 - \sqrt{2} & 3 + 3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1 + \sqrt{2} \\ 0 & -1 - \sqrt{2} & 3 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

8.4 Espaces propres



D'abord je multiplie la première ligne par $1 + \sqrt{2}$ pour simplifier. Donc c'est $D_1(1 + \sqrt{2})$ Quand je fais ça, les deux dernières lignes ne changent pas. Du coup, là j'ai $1 - 2 = -1$ Ensuite j'ai $-1 - \sqrt{2}$ et j'ai $3 + 3\sqrt{2}$ Maintenant vous voyez pourquoi je l'ai fait. Je vais ici additionner la première ligne à la troisième. Je vais faire $L_{31}(1)$ donc la première ligne ne change pas la deuxième non plus et la troisième ça devient : $0, -1 - \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}$ Maintenant je vais multiplier la deuxième ligne pour les mêmes raisons, par $1 + \sqrt{2}$ pour simplifier ce terme là sinon je ne vois pas très bien ce que j'ai. Donc j'ai [voir écran] Et puis je vais aussi simplifier ce terme là, je vais multiplier par $1 - \sqrt{2}$ la troisième ligne. La première ne change pas, la deuxième non plus et la troisième devient : là j'ai $-1 + 2 = 1$, ici et là quand je multiplie, j'ai 3 là j'ai $2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -\sqrt{2}$ et après j'ai -4 donc j'ai la matrice [voir écran] Enfin, on fait encore une manipulation je rajoute la deuxième ligne à la troisième et ça nous fait la matrice [voir écran]. C'était un peu pénible mais on y est arrivé.

Notes

Summary



7m 16s

Exemples.

$$(1) B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B(t) = -t^3 + 2t^2 + 2t - 4$$

$$= (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})(-t + 2)$$

valeurs propres de B sont

$$\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}, \lambda_3 = 2$$

Déterminer l'espace propre $E_{\sqrt{2}}$.

$$D_3(1-\sqrt{2}) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1-\sqrt{2} & 3+3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 3-\sqrt{2}-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1-\sqrt{2} & 3+3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{32}(1)} \begin{pmatrix} -1 & -1-\sqrt{2} & 3+3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{\sqrt{2}} = \{ (\sqrt{2}(1+\sqrt{2})\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$$

Solution du système

$$(B - \sqrt{2}I)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & -1 & 3 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{D_1(1+\sqrt{2})} \begin{pmatrix} -1 & -1-\sqrt{2} & 3+3\sqrt{2} \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{31}(1)} \begin{pmatrix} -1 & -1-\sqrt{2} & 3+3\sqrt{2} \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1-\sqrt{2} & 3+2\sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{D_2(1+\sqrt{2})} \begin{pmatrix} -1 & -1-\sqrt{2} & 3+3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & -1-\sqrt{2} & 3+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

8.4 Espaces propres



Maintenant quand j'arrive à ça, je sais qu'il faut poser la solution du système. Je pose la troisième variable en paramètre. Et je trouve que l'espace propre $E_{\sqrt{2}}$ est égale à l'ensemble : Je pose ici α pour la troisième variable et d'après la deuxième ligne, je vois que la coordonnée ici est $(1 + \sqrt{2})\alpha$ puis, après un peu de travail, je ne donne pas les détails, vous substituez ici pour la première ligne et vous allez trouver $\alpha\sqrt{2}$ et ça, c'est pour α , n'importe quelle valeur réelle. Ça, c'est l'espace propre. Maintenant on pourrait faire un contrôle. C'est à dire, on pourrait prendre un vecteur qui est là-dedans, dans tous les vecteurs, bon tous ces vecteurs sont multiples d'un vecteur, et multiplier par cette matrice, et voir que effectivement on obtient le multiple $\sqrt{2}$ je vais le faire ici : Je reprends la matrice là et je multiplie par un vecteur ici, je vais poser $\alpha = 1$ J'aurais ici $\sqrt{2}$, aussi $1 + \sqrt{2}$ et 1. Je fais la multiplication et là j'ai $\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} + 3$ donc là j'obtiens 2 et ici j'ai $1 + \sqrt{2} + 1$ donc ça fait $2 + \sqrt{2}$ Et puis ici j'obtiens $\sqrt{2}$ Et ceci est égal à $\sqrt{2}(\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1, 1)$.

Notes

Summary



Solution du système

Exemples.

$$(1) B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (B - \sqrt{2}I)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & -1 & 3 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{D_1(1+\sqrt{2})} \begin{pmatrix} -1 & -1-\sqrt{2} & 3+3\sqrt{2} \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$c_B(t) = -t^3 + 2t^2 + 2t - 4$$

$$= (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})(-t + 2)$$

valeurs propres de B sont

$$\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}, \lambda_3 = 2$$

Déterminer l'espace propre $E_{\sqrt{2}}$.

$$D_3(1-\sqrt{2}) \begin{pmatrix} -1 & -1-\sqrt{2} & 3+3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 3-\sqrt{2}-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1-\sqrt{2} & 3+3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{32}(1)} \begin{pmatrix} -1 & -1-\sqrt{2} & 3+3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{\sqrt{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

8.4 Espaces propres



Notes

Effectivement, on a que cette matrice multiplie ce vecteur et ça donne $\sqrt{2}$ fois le vecteur. C'est un exemple un peu compliqué mais c'est très bien car vous voyez qu'on n'aurait pas pu deviner, ce ne sont pas des vecteurs qui sortent facilement mais, on a tout fait correctement, à la fin on peut vérifier que cet espace là c'est l'ensemble des vecteurs qui sont renvoyés à ce multiple là. C'est un peu compliqué, mais c'est un bon exemple.

Summary



12m 36s

Exemples.

(2) $\phi : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \phi(A) = A^T,$

$$[\phi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c_{\phi}(t) = (t-1)^3(t+1)$$

valeurs propres de ϕ sont

$$\lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = -1.$$

Déterminer l'espace propre E_{-1}
associé à la valeur propre -1 .

E_{-1} = l'ensemble des solutions du système

$$([\phi]_{\mathcal{B}} - (-1)I)X = 0.$$

$$([\phi]_{\mathcal{B}} + I)X = 0$$



8.4 Espaces propres



Cette fois, les calculs seront un peu plus faciles et c'est parce qu'en fait, les valeurs propres sont plus faciles. On a déjà calculé le polynôme caractéristique de cette application linéaire et on a trouvé que le polynôme caractéristique c'est $(t-1)^3(t+1)$. Donc les valeurs propres de ϕ sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$. Cette fois je vais trouver l'espace propre qui correspond à la valeur propre -1 . Déterminer l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 . Je dois trouver la solution du système homogène. Je fais attention parce que ça doit être interprété après en termes de matrice mais pour le moment je résous un système homogène et ça c'est le système : ϕ représenté par rapport à la base B qu'on a fixé $-(-1)I$ fois le vecteur X . Donc j'ai ϕ cette matrice plus l'identité multiplié par X . Je pose la matrice et cette fois, je soustrais -1 donc j'ajoute un sur la diagonale donc j'ai la matrice [voir écran] Je vais échelonner la matrice et cette fois l'échelonnage est très simple.

Notes

Summary



13m 07s

Exemples.

(2) $\phi : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \phi(A) = A^T,$

$$[\phi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c_{\phi}(t) = (t-1)^3(t+1)$$

valeurs propres de ϕ sont

$$\lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = -1.$$

Déterminer l'espace propre E_{-1}
associé à la valeur propre -1 .

E_{-1} = l'ensemble des solutions du système

$$([\phi]_{\mathcal{B}} - (-1)\mathbb{I})X = 0.$$

$$([\phi]_{\mathcal{B}} + \mathbb{I})X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{34}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(0, -\alpha, \alpha, 0)$ interprété en termes de la base \mathcal{B} !!

$$E_{-1} = \left\{ -\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

8.4 Espaces propres



La première ligne ne change pas, la deuxième non plus ensuite j'additionne : moins un fois la deuxième ligne à la troisième ligne, j'obtiens une ligne de 0 et enfin j'échange la troisième et la quatrième ligne. J'ai fait une erreur ici, je reviens, donc là j'ai gardé la deuxième ligne et j'arrive à cette matrice là qui est échelonnée. Maintenant on voit qu'il y a trois pivots et il y a juste la troisième variable qui n'a pas de pivot. Je vois que l'ensemble des solutions du système homogène ça serait les vecteurs comme ceci : la dernière coordonnée doit être 0 et ici je pose α , la deuxième coordonnée doit être $-\alpha$ et la première coordonnée c'est 0 mais ça, il faut interpréter en termes de la base. C'est très important. Donc E_{-1} c'est l'ensemble (car on s'attend à trouver un ensemble de matrices). Donc c'est l'ensemble des matrices où j'aurai : $-\alpha$ fois le deuxième vecteur de base, plus α fois le troisième vecteur de base, et α un nombre réel. Donc je dis que c'est l'ensemble, l'espace propre correspond à la valeur propre -1 c'est toutes les matrices de la forme $[0, -\alpha; \alpha, 0]$, avec α un nombre réel.

Notes

Summary



Exemples.

(2) $\phi : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \phi(A) = A^T,$

$$[\phi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c_{\phi}(t) = (t-1)^3(t+1)$$

valeurs propres de ϕ sont

$$\lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = -1.$$

Déterminer l'espace propre E_{-1}
associé à la valeur propre -1 .

$$\phi \left(\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre pour la valeur propre -1 .

E_{-1} = l'ensemble des solutions du système

$$([\phi]_{\mathcal{B}} - (-1)\mathbb{I})X = 0.$$

$$([\phi]_{\mathcal{B}} + \mathbb{I})X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{34}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(0, -\alpha, \alpha, 0)$ interprété en termes de la base \mathcal{B} !!

$$E_{-1} = \left\{ -\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

8.4 Espaces propres



Notes

Et on va maintenant vérifier que ça joue vraiment. Si je prends ϕ de la matrice $[0, -\alpha; \alpha, 0]$. Par définition, c'est la transposée donc c'est $[0, \alpha; -\alpha, 0]$. Et ceci c'est moins une fois la matrice originale. Effectivement, cette matrice-là est bien un vecteur propre pour la valeur propre -1 . En fait on a trouvé l'ensemble des vecteurs propres et on a aussi mis 0 dedans. Ça c'est deux bons exemples de calculs d'espaces propres associés à une valeur propre donnée.

Summary

