



8.5 Indépendance linéaire, base de vecteurs propres



Dans cette vidéo, nous allons montrer une propriété très, très importante des vecteurs propres. Et ça, c'est si on a des vecteurs propres aux valeurs propres distinctes. Ces vecteurs propres sont linéairement indépendants. Et c'est ça qui va nous aider à trouver une bonne base par rapport à laquelle la matrice d'une application linéaire est particulièrement jolie ou bien la plus proche d'une matrice diagonale que possible. Je ferai un exemple à la fin pour vous montrer l'application de ça. Donc je commence par la proposition.

Notes

Summary



0m 04s

Proposition. Soient $\phi : V \rightarrow V$ une transformation linéaire et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ deux valeurs propres distinctes. Alors $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$.

Plus généralement, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres distinctes de ϕ et v_1, \dots, v_r des vecteurs propres correspondants. Alors v_1, \dots, v_r sont linéairement indépendants.

(Remarque: énoncés analogues pour $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ sont aussi valables.)



8.5 Indépendance linéaire, base de vecteurs propres

Je me donne une transformation linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même et puis je me donne deux valeurs propres distinctes. Alors je peux former la somme des sous-espaces propres et puis l'énoncé, c'est que cette somme-là est une somme directe. Donc je vous rappelle quelle est la définition. Ça veut dire que l'intersection des deux sous-espaces est seulement le vecteur 0. Maintenant, plus généralement que ça, on peut se donner plusieurs valeurs propres distinctes et puis des vecteurs propres pour chacune de ces valeurs propres donc ce sont des vecteurs propres non nuls. Là, v_i est envoyé à λ_i fois v_i . Et puis je prétends que v_1 jusqu'à v_r sont linéairement indépendants. Ok, donc je démontrerai les deux choses et puis je vais juste remarquer en passant qu'on a les mêmes énoncés si on commence avec une matrice et puis les espaces propres d'une matrice ou bien une matrice et les vecteurs propres pour une matrice. Donc je fais juste la remarque ici. Donc, remarque : les énoncés analogues pour une matrice sont aussi valables. Et ici, je vais juste travailler avec l'application. Donc je démontre le premier énoncé.

Notes

Summary



0m 38s

Proposition. Soient $\phi : V \rightarrow V$ une transformation linéaire et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ deux valeurs propres distinctes. Alors $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$.

Plus généralement, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres distinctes de ϕ et v_1, \dots, v_r des vecteurs propres correspondants. Alors v_1, \dots, v_r sont linéairement indépendants.

(Remarque: énoncés analogues pour $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ sont aussi valables.)

Preuve: Soit $v \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$.

$$\text{Donc } \phi(v) = \lambda_1 v$$

$$\text{et } \phi(v) = \lambda_2 v$$

$$\lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v = 0.$$

$$\text{Comme } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow v = 0.$$

$$\text{Donc } E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}.$$

8.5 Indépendance linéaire, base de vecteurs propres



Preuve : Donc je me donne un vecteur qui est dans l'intersection, donc soit v , un vecteur dont $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$. Et puis donc, par définition, comme il est dans E_{λ_1} , ça veut dire que ϕ de v est égal à $\lambda_1 v$ et aussi ϕ de v est égal à $\lambda_2 v$ parce que c'est un vecteur propre pour la valeur propre λ_1 et pour la valeur propre λ_2 . Ok, donc j'ai que $\lambda_1 v$ est égal à $\lambda_2 v$ et donc je passe tout à gauche et j'ai $\lambda_1 - \lambda_2$ qui multiplie v et qui donne zéro. Maintenant, comme λ_1 n'est pas égal à λ_2 parce que j'ai pris deux valeurs propres distinctes, $\lambda_1 - \lambda_2$ est différent de zéro et on sait que ça, ça implique que le v est égal à zéro. Donc ça implique que v est égal à zéro et donc l'intersection de ces deux espaces est que le vecteur nul. Donc ça, c'est la première chose. C'est un peu plus difficile à démontrer, l'énoncé plus général, mais c'est important pour nous, vous verrez dans l'application. Maintenant, pour le deuxième énoncé, j'ai r valeurs propres distinctes et puis je prends un vecteur propre pour chacune de ces valeurs propres. Et puis je veux montrer que ces vecteurs-là sont linéairement indépendants, donc je vais commencer avec ce qui semble être une relation de dépendance. Donc supposons que $\alpha_1 v_1$ jusqu'à $\alpha_r v_r$ soient égales à zéro pour des α_i dans \mathbb{R} .

Notes

Summary



2m 01s

Proposition. Soient $\phi : V \rightarrow V$ une transformation linéaire et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ deux valeurs propres distinctes. Alors $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$.

Plus généralement, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres distinctes de ϕ et v_1, \dots, v_r des vecteurs propres correspondants. Alors v_1, \dots, v_r sont linéairement indépendants.

(Remarque: énoncés analogues pour $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ sont aussi valables.)

Preuve: Soit $v \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$.

$$\text{Dm} \quad \phi(v) = \lambda_1 v$$

$$\text{et} \quad \phi(v) = \lambda_2 v$$

$$\lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v = 0.$$

$$\text{Comme } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow v = 0.$$

$$\text{Dm} \quad E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}.$$

Supposons que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0^*$ pour $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Sans perte de généralité, on suppose $\alpha_i \neq 0$ pour tout i et r minimal.

$$\phi(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) = \phi(0) = 0.$$

$$\alpha_1 \phi(v_1) + \dots + \alpha_r \phi(v_r)$$

$$\alpha_1 \cdot \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_r \cdot \lambda_r v_r = 0. \quad \left. \begin{array}{l} \text{On} \\ \text{soustrait} \end{array} \right\}$$

$$\lambda_1 \alpha_1 v_1 + \lambda_1 \alpha_2 v_2 + \dots + \lambda_1 \alpha_r v_r = 0$$

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) v_3 + \dots + \alpha_r (\lambda_r - \lambda_1) v_r = 0.$$

8.5 Indépendance linéaire, base de vecteurs propres



Maintenant, pas de généralité si je suppose que toutes les α_i sont non nuls, parce que s'il y a α_i qui est égale à zéro j'ai juste une expression plus courte. Donc, en fait, je vais supposer que r , c'est aussi petit que possible pour que j'aie une relation de dépendance où tous les coefficients sont non nuls. Donc sans perte de généralité, on suppose α_i différent de zéro pour tout i , et r minimal tel que j'ai une telle relation de dépendance. Maintenant, j'applique ϕ à cette égalité c'est égal à ϕ de zéro qui est zéro. Ceci est égal à $\alpha_1 \phi$ de v_1 , or ϕ de v_r parce que ϕ est linéaire. Et comme v_i est un vecteur propre pour la valeur propre λ_i , ici, j'ai $\alpha_1 \lambda_1 v_1$, or $\lambda_r v_r$ est égal à zéro. Maintenant, je vais aussi prendre cette égalité-là et multiplier par λ_1 . Alors je prends ça et je multiplie par λ_1 . Donc j'ai $\lambda_1 \alpha_1 v_1 + \lambda_1 \alpha_2 v_2 + \lambda_1 \alpha_r v_r$ égal à zéro. Ok et puis maintenant, je soustrais ici et puis j'obtiens l'égalité donc je soustrais et j'obtiens l'égalité dont le premier terme tombe donc après, bon ici peut-être, je vais écrire le deuxième terme. Je le vois donc j'ai $\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2$ plus $\alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) v_3$, or $(\lambda_r - \lambda_1) v_r$ égal à zéro.

Notes

Summary



3m 58s

Proposition. Soient $\phi : V \rightarrow V$ une transformation linéaire et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ deux valeurs propres distinctes. Alors $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$.

Plus généralement, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres distinctes de ϕ et v_1, \dots, v_r des vecteurs propres correspondants. Alors v_1, \dots, v_r sont linéairement indépendants.

On a

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + \alpha_r(\lambda_r - \lambda_1)v_r = 0.$$

une relation de dépendance de $r-1$ termes.

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

$$\alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1) \neq 0$$

\vdots

$$\alpha_r(\lambda_r - \lambda_1) \neq 0$$

Contradiction à l'hypothèse de départ. \square

8.5 Indépendance linéaire, base de vecteurs propres



Ok je reprends ça donc je redis ce que je viens de trouver. On a $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)$ qui multiplie v_2 jusqu'au bout $\alpha_r(\lambda_r - \lambda_1)v_r$ égal à zéro. Maintenant j'ai une relation de dépendance qui est plus courte que la relation que j'avais avant, ok. Donc c'est une relation de $r - 1$ termes et en plus j'ai que $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)$ est différent de zéro, $\alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)$ est différent de zéro, etc., car, par hypothèse on a supposé que tous les α_i sont différents de zéro et que toutes les valeurs propres sont distinctes, donc α_1 est différent de tous les autres α_j . Et ça, c'est une contradiction. Ça, c'est une contradiction à l'hypothèse de départ. Donc voilà. On n'a pas une relation de dépendance parmi les vecteurs v_1 jusqu'à v_r . Ok, maintenant, avec ça en tête, on peut trouver dans un certain nombre de cas, une très jolie représentation matricielle d'une application linéaire. Je vais étudier ce cas particulier maintenant. Donc voilà la proposition.

Notes

Summary



6m 25s

Proposition. Soit $\phi : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie n . Supposons que ϕ possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors il existe une base \mathcal{B} de V t. q. $[\phi]_{\mathcal{B}}$ soit une matrice diagonale.

Preuve Soit $v_i \in V$ un vecteur propre de valeur propre λ_i . $1 \leq i \leq n$.
 Par la proposition précédente, $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une famille libre.
 Mais $\dim V = n \Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$ est une base de V .



8.5 Indépendance linéaire, base de vecteurs propres



Notes

Je me donne une transformation linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie et je suppose que cette transformation possède n valeurs propres distinctes. C'est un espace de dimension n et ϕ possède n valeurs propres distinctes. Alors il existe une base de V telle que la matrice de ϕ par rapport à cette base soit une matrice diagonale. Donc c'est exactement ce qu'on visait depuis le début de ce chapitre, c'était de trouver une base par rapport à laquelle la matrice est très jolie et puis, en particulier, je considère que diagonale c'est une belle matrice. Ok donc je démontre ça. Donc c'est très facile d'après ce qu'on vient de voir. Donc pour chacune de ces valeurs propres, je vais prendre un vecteur propre. Donc soit v_i dans V , un vecteur propre de valeur propre λ_i . Donc pour chaque valeur propre, je choisis un vecteur propre. Et ça pour i entre 1 et n . Par la proposition précédente, on sait que les v_1 jusqu'à v_n est une famille libre. Mais maintenant on est dans un espace de dimension n et on a une famille de n vecteurs libres et puis ça, ça implique que c'est une base. C'est une base de V . Donc je pose ça égale à \mathcal{B} . Et puis maintenant, j'étudie la représentation matricielle de ϕ par rapport à cette base-là.

Summary



8m 00s

Proposition. Soit $\phi : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie n . Supposons que ϕ possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors il existe une base B de V t. q. $[\phi]_B$ soit une matrice diagonale.

Preuve Soit $v_i \in V$ un vecteur propre de valeur propre λ_i . $1 \leq i \leq n$.
 Par la proposition précédente, $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une famille libre.
 Mais $\dim V = n \Rightarrow B = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de V .

$$[\phi]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \phi(v_1) &= \lambda_1 v_1 \\ \phi(v_2) &= \lambda_2 v_2 \\ &\vdots \\ i\text{-ème colonne de } [\phi]_B &\text{ est } \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ème place} \end{aligned}$$

8.5 Indépendance linéaire, base de vecteurs propres



Alors ϕ appliquée à v_1 est égale à $\lambda_1 v_1$ par définition parce que v_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 . Donc quand je représente ça par rapport à la base que j'ai fixée, alors c'est juste λ_1 pour la première coordonnée et ensuite des zéros. ϕ appliquée à v_2 , c'est $\lambda_2 v_2$ et quand je représente ça par rapport à cette base-là que j'ai fixée, j'aurai zéro fois v_1 et $\lambda_2 v_2$ et ensuite des zéros. Et puis ainsi de suite, donc la i -ème colonne de cette matrice est exactement le vecteur colonne zéro λ_i zéro. Ça, c'est à la i -ème place. Donc cette matrice finalement est une matrice diagonale. Bon c'est un cas très spécial parce qu'on arrive à avoir assez de valeurs propres et assez de vecteurs propres. Donc il y a n valeurs propres et chaque valeur propre donne lieu à un vecteur propre. Ces vecteurs propres sont linéairement indépendants donc ça fait une base. Donc ça c'est un cas très particulier mais c'est déjà très joli.

Notes

Summary

