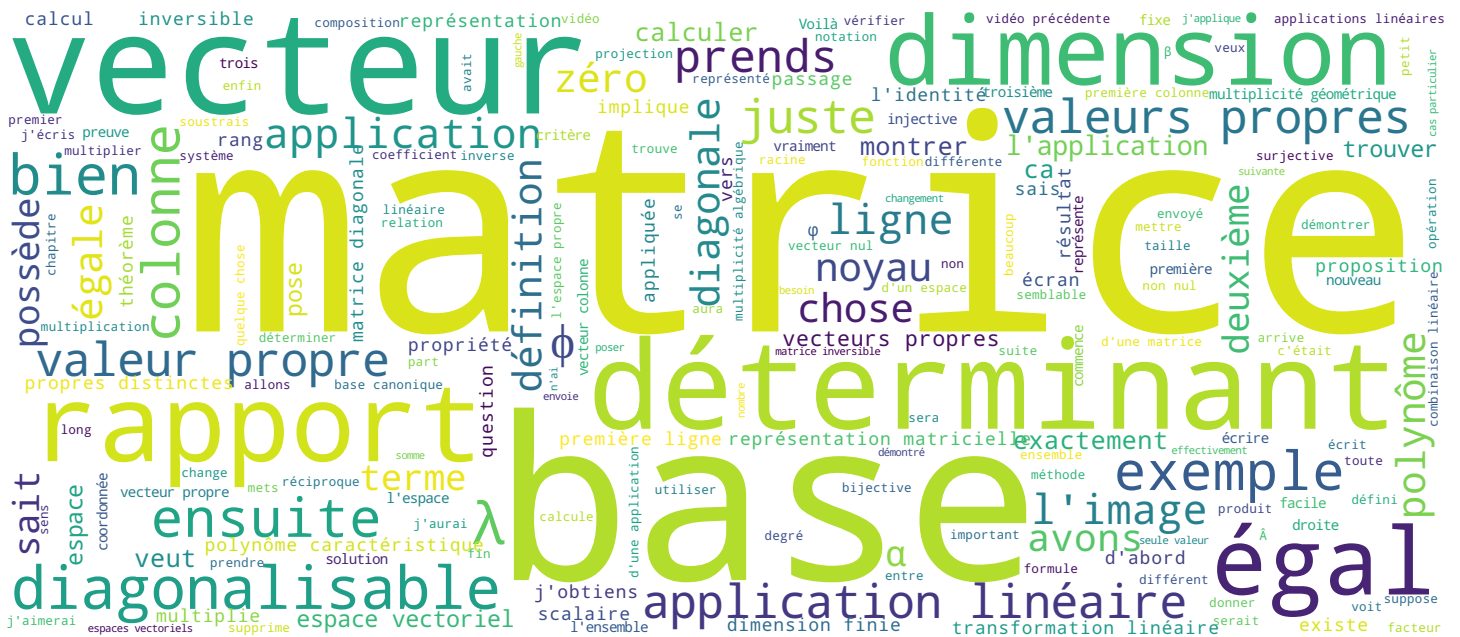


Chapitre 8 : Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation

8.6 Matrices diagonalisables, transformations linéaires diagonalisables

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC



Video





8.6 Matrices diagonalisables, transformations linéaires diagonalisables



Nous avons vu dans la vidéo précédente un cas particulier d'une application linéaire qui possède une représentation matricielle diagonale. Et cette représentation matricielle venait parce qu'il existait une base de vecteurs propres pour l'application linéaire. Maintenant, je veux formaliser ça, je vais faire une définition qui est basée sur cet exemple-là, sur ce cas particulier.

Notes

Summary



0m 04s

Définition.

- (1) Soit $\phi : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie. On dit que ϕ est **diagonalisable** si V possède une base de vecteurs propres de ϕ .

Sont B une base de vecteurs propres de ϕ .

$$\text{Alors } [\phi]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Sont C une autre base de V .

$$[\phi]_C = P^{-1} [\phi]_B P, \quad P \text{ une matrice inversible.}$$

$$\text{DmC} \quad P[\phi]_C P^{-1} = [\phi]_B \text{ diagonale.}$$

8.6 Matrices diagonalisables, transformations linéaires diagonalisables



Je me donne une transformation linéaire d'un espace vectoriel V de dimension finie et on dit que ϕ est diagonalisable si V possède une base de vecteurs propres de ϕ . Maintenant, je remontre ce que cela veut dire, par la proposition que nous venons de voir. Il existe une base de vecteurs propres de ϕ , soit B une base de vecteurs propres de ϕ . Et si je fais la représentation matricielle de ϕ par rapport à cette base, je vais avoir une matrice diagonale. Ça, c'est par le même raisonnement que nous avons vu dans la vidéo précédente. Alors, on a ça. Et maintenant, si je prends une autre représentation de ϕ , soit C une autre base de V . Si je veux trouver la représentation matricielle de ϕ par rapport à cette base, on sait que je prends la représentation que j'ai, et je fais $P[\phi]_B P^{-1}$, où P est une matrice inversible, une matrice de changement de bases. Donc maintenant, je passe à l'autre côté, j'ai que $P[\phi]_C P^{-1}$ est égal à cette matrice-là, qui est une matrice diagonale. C'est ça qui va me donner l'idée pour définir ce qu'est une matrice diagonalisable.

Notes

Summary



Définition.

- (1) Soit $\phi : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie. On dit que ϕ est **diagonalisable** si V possède une base de vecteurs propres de ϕ .
- (2) Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On dit que A est **diagonalisable** si A est semblable à une matrice diagonale, i.e. il existe $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversible t. q. $P^{-1}AP$ soit diagonale.

8.6 Matrices diagonalisables, transformations linéaires diagonalisables



Là, je me donne une matrice $n \times n$, et on va dire que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale, donc justement, il existe un P inversible tel que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. Alors ici, l'idée, c'est qu'on a une représentation matricielle d'une transformation qui n'est pas forcément diagonale, mais éventuellement, en changeant de base, on trouve une autre représentation, qui est diagonale, et on dit que l'application est diagonalisable, ou bien on dit que la matrice qui représente l'application est diagonalisable, ou bien, tout simplement, on commence avec une matrice, et on dit que cette matrice-là, elle est diagonalisable, si on peut faire cette manipulation-là et la rendre diagonale.

Notes

Summary



2m 11s

Premier résultat.

- (1) Si $\dim V = n$ et $\phi : V \rightarrow V$ possède n valeurs propres distinctes, alors ϕ est diagonalisable.
- (2) Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.



8.6 Matrices diagonalisables, transformations linéaires diagonalisables

On a un premier résultat que nous avons déjà démontré, c'est le résultat suivant : si j'ai un espace de dimension n , une transformation linéaire qui possède n valeurs propres distinctes, alors ϕ est diagonalisable, c'est exactement ce qu'on a vu dans la vidéo précédente, c'est qu'ayant n valeurs propres distinctes, on prend un vecteur propre pour chaque valeur propre, et ça fait une base, parce que c'est le même nombre ici que la dimension. Et puis c'est une matrice qui représente ϕ qui est diagonale. Et de même, si on a une matrice $n \times n$ qui possède n valeurs propres distinctes, alors cette matrice est aussi diagonalisable, on fait associer à cette matrice une application linéaire, et après, on utilise le numéro (1). Donc ça, on l'a déjà démontré, donc ça, on le déduit de la proposition qu'on a vue avant. Et maintenant, ce serait très joli si ces deux résultats, on avait si et seulement si. Mais ce n'est pas vrai, je veux juste vous le montrer, donc la question que je pose, c'est : «Et puis la réciproque ??» C'est-à-dire, si je me donne une application qui est diagonalisable, est-ce que cela implique qu'il existe n valeurs propres distinctes ?

Notes

Summary



3m 00s

Premier résultat.

(1) Si $\dim V = n$ et $\phi : V \rightarrow V$ possède n valeurs propres distinctes, alors ϕ est diagonalisable.

(2) Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Et puis la réciproque??

Fausse : exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A est diagonalisable car $I^{-1}AI$ est diagonale.

Quelles sont les valeurs propres de A ?

$c_A(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)^3$. A possède une seule valeur propre, $\lambda = 2$.

8.6 Matrices diagonalisables, transformations linéaires diagonalisables



si je me donne une matrice qui est diagonalisable, est-ce que cela implique que cette matrice possède n valeurs propres distinctes ? La réponse est non. Donc la réciproque est fausse. Et je vous donne un exemple. Je prends la matrice, je donne un exemple de matrice, je prends la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est diagonalisable, parce qu'elle est diagonale. Je n'ai pas besoin de changer de base, donc je peux juste dire $I^{-1}AI$ est diagonale. Donc elle est diagonale, elle est diagonalisable. Maintenant, cherchons des valeurs propres. Quelles sont les valeurs propres ? Alors je calcule le polynôme caractéristique de cette matrice, donc c'est le déterminant de la matrice où je soustrais t le long de la diagonale. Et puis, ce déterminant, c'est $(2 - t)^3$. Donc il a une seule valeur propre. A possède une seule valeur propre, $t = 2$. La réciproque est fausse, on peut très bien avoir une matrice diagonalisable, même diagonale, mais qui ne possède pas du tout n valeurs propres, où n est la taille de la matrice. Donc ce qu'on cherche maintenant, c'est un critère si et seulement si, donc quelque chose qui est équivalent à être diagonalisable. Et pour ça, on doit juste faire encore quelques définitions, ce n'est pas tout de suite qu'on aura ce critère, mais on l'aura très bientôt.

Notes

Summary

