





### 8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique



Nous allons bientôt trouver un critère pour déterminer si une matrice ou bien une transformation linéaire est diagonalisable ou non. Et puis, ça serait pas dans cette vidéo mais dans la prochaine mais je dois poser encore deux définitions qui vont faire partie de ce critère.

Notes

Summary



0m 03s

### Définition.

- (1) Soit  $\phi : V \rightarrow V$  une transformation linéaire d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie  $n$ , ou soit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\phi$  (ou de  $A$ ).

Donc  $\lambda$  est une racine de  $c_\phi(t)$  (ou  $c_A(t)$ ).

On factorise  $c_\phi(t) = (t - \lambda)^m p(t)$  où  $p(\lambda) \neq 0$ , donc  $t - \lambda$  ne divise pas  $p(t)$ .

On appelle  $m$  la **multiplicité algébrique de  $\lambda$** .

- (2) Soient  $\phi, \lambda, A$  comme ci-dessus. Soit  $E_\lambda$  l'espace propre pour la valeur propre  $\lambda$ . On appelle  $\dim E_\lambda$  la **multiplicité géométrique de  $\lambda$** .

#### 8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique



Voilà... La définition, un peu une définition longue et compliquée mais on va faire des exemples après Je me donne une transformation linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $n$  Ou bien je me donne une matrice  $n \times n$ . Ok... Et puis je prends une valeur propre de la transformation linéaire ou bien de la matrice. Donc ça veut dire que cette valeur  $\lambda$  est une racine du polynôme caractéristique de l'application ou bien de la matrice. Maintenant, on factorise ce polynôme Et puis on sait que comme  $\lambda$  est une racine il y a un facteur  $t - \lambda$ , il faut juste le trouver, et puis ici je mets en évidence tous les facteurs  $t - \lambda$  possibles y compris les facteurs  $\lambda - t$  donc avec une signe là, Donc je mets en évidence tous les  $t - \lambda$ . Il y a une puissance là. Et puis ce qui me reste ici, le  $p(t)$  c'est une polynôme, qui ne possède pas  $\lambda$  comme racine donc, si je substitue  $\lambda$  ici, ça ne donne pas 0, donc  $t - \lambda$  ne divise pas ce polynôme là.

Notes

Summary



0m 24s

### Définition.

- (1) Soit  $\phi : V \rightarrow V$  une transformation linéaire d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie  $n$ , ou soit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\phi$  (ou de  $A$ ).

Donc  $\lambda$  est une racine de  $c_\phi(t)$  (ou  $c_A(t)$ ).

On factorise  $c_\phi(t) = (t - \lambda)^m p(t)$  où  $p(\lambda) \neq 0$ , donc  $t - \lambda$  ne divise pas  $p(t)$ .

On appelle  $m$  la **multiplicité algébrique de  $\lambda$** .

- (2) Soient  $\phi, \lambda, A$  comme ci-dessus. Soit  $E_\lambda$  l'espace propre pour la valeur propre  $\lambda$ . On appelle  $\dim E_\lambda$  la **multiplicité géométrique de  $\lambda$** .

#### 8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique



alors ce  $m$  qu'on voit là, est appelé la multiplicité algébrique de  $\lambda$  je ferai des exemples après, bon je pourrais déjà vous en donner ici, donc par exemple si je pose  $C_\phi(t) = (t - 1)^2(t^2 - 2t + 1)$ , et je vois que  $1$  est une racine mais il faut factoriser tant que possible donc ici j'ai :  $(t - 1)^2(t - 1)$   $(t - 1)$  donc en fait j'ai  $(t - 1)^4$  donc la multiplicité algébrique de  $1$  est  $4$  donc il faut bien factoriser jusqu'au bout, donc la multiplicité algébrique de la racine  $1$  est égale à  $4$ , Encore une exemple : Si j'ai  $C_\phi(t) = (t^2 + 1)(t^2 - 3t - 4)$ , je factorise autant que possible, j'ai  $(t^2 + 1)$ , qui ne se factorise pas car les seules racines seront  $i$  et  $-i$ , on est sur les réels ici, après j'ai :  $(t - 4)(t + 1)$  Et maintenant, donc la multiplicité algébrique de  $4$  est égale à  $1$  et la multiplicité algébrique de  $\lambda = -1$ , la racine ici, est aussi égale à  $1$ .

Notes

Summary



**Définition.**

(1) Soit  $\phi : V \rightarrow V$  une transformation linéaire d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie  $n$ , ou soit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ .  
 Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\phi$  (ou de  $A$ ).  
 Donc  $\lambda$  est une racine de  $c_\phi(t)$  (ou  $c_A(t)$ ).  
 On factorise  $c_\phi(t) = (t - \lambda)^m p(t)$  où  $p(\lambda) \neq 0$ , donc  $t - \lambda$  ne divise pas  $p(t)$ .  
 On appelle  $m$  la **multiplicité algébrique** de  $\lambda$ .  
 $c_\phi(t) = (t-1)^2(t^2-2t+1) = (t-1)^2(t-1)(t-1) = (t-1)^4$  multiplicité algébrique de la racine 1 est égale à 4.  
 $c_\phi(t) = (t^2+1)(t^2-3t-4) = (t^2+1)(t-4)(t+1)$  multiplicité algébrique de  $\lambda=4$  est égale à 1  
 " " "  $\lambda=-1$  est aussi égale à 1.

(2) Soient  $\phi, \lambda, A$  comme ci-dessus. Soit  $E_\lambda$  l'espace propre pour la valeur propre  $\lambda$ . On appelle  $\dim E_\lambda$  la **multiplicité géométrique** de  $\lambda$ .



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- Notes

Summary





Proposition Soit  $\varphi: V \rightarrow V$  une transformation linéaire d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\varphi$ . Alors

- ① La multiplicité géométrique de  $\lambda$  est  $\geq 1$ .
- ② La multiplicité géométrique de  $\lambda$   $\leq$  la multiplicité algébrique de  $\lambda$ .

Preuve ①  $\dim E_\lambda$ .  $\lambda$  est une valeur propre de  $\varphi$ , donc il existe  $v \in V, v \neq 0$   
t.q.  $\varphi(v) = \lambda v \Rightarrow v \in E_\lambda \Rightarrow \dim E_\lambda \geq 1$



### 8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique

Donc proposition: Donc je vais l'énoncer pour  $\varphi$  mais c'est pareil pour  $A$   
Soit  $\varphi: V \rightarrow V$  une transformation linéaire d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\varphi$  Alors deux choses : 1 : la multiplicité géométrique de  $\lambda$  est au moins 1 et 2 : la multiplicité géométrique de  $\lambda$  est plus petite ou égale à la multiplicité algébrique  
Donc il y a cette relation entre ces deux multiplicités. Preuve : Donc le premier énoncé, on le sait déjà parce qu'ici la multiplicité géométrique c'est la dimension de  $E_\lambda$ . Et  $\lambda$  est une valeur propre de  $\varphi$ , donc il existe un vecteur dans  $V$  non nul. tel que  $\varphi(v) = \lambda v$ , et puis ce  $v$  appartient à  $E_\lambda$ , par définition, et comme il est non nul ça implique que la dimension de  $E_\lambda$  est au moins 1. Il possède un vecteur non nul donc ce qui est linéairement indépendant, et donc la base aura au moins un vecteur dedans.

Notes

Summary



4m 44s

Proposition Soit  $\varphi: V \rightarrow V$  une transformation linéaire d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\varphi$ . Alors

- ① La multiplicité géométrique de  $\lambda$  est  $\geq 1$ .
- ② La multiplicité géométrique de  $\lambda$   $\leq$  la multiplicité algébrique de  $\lambda$ .

Preuve ①  $\dim E_\lambda$ .  $\lambda$  est une valeur propre de  $\varphi$ , donc il existe  $v \in V, v \neq 0$   
t.q.  $\varphi(v) = \lambda v \Rightarrow v \in E_\lambda \Rightarrow \dim E_\lambda \geq 1$

② Fixons une base  $(v_1, \dots, v_r)$  de  $E_\lambda$ . Donc la multiplicité géométrique de  $\lambda$  est égale à  $r$ .  
Soit  $B = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$  une base de  $V$ .

On a  $[\varphi]_B =$



#### 8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique



Notes

Maintenant, ça c'est déjà une chose que je n'avais pas encore remarqué, c'est que vous faites des calculs, vous trouvez une valeur propre, puis vous cherchez un vecteur propre, et vous trouvez que le seul vecteur qui satisfait à votre relation c'est le vecteur nul, alors vous avez fait une erreur, si c'est une valeur propre, si là il n'y a pas d'erreur, il y aura un vecteur propre non nul, par définition. Et puis maintenant : deuxième, la preuve est plus intéressante aussi, alors je fixe une base de l'espace propre, donc : fixons une base  $v_1, \dots, v_r$  de l'espace propre  $E_\lambda$ . Donc ça veut dire que la multiplicité géométrique de  $\lambda$  vaut  $r$ . Maintenant j'étends ça à une base de  $V$ . Soit  $B$  une base qui commence par ces  $r$  vecteurs là et qui continue... une base de  $V$ . Donc on sait qu'on a des vecteurs linéaires indépendants, on peut étendre à une base, compléter en une base donc je le fais. Alors maintenant, j'écris la matrice de  $\varphi$  par rapport à cette base. On a  $[\varphi]_B = \dots$  et puis ici de nouveau, je comprends bien le début de la matrice, la première colonne c'est quoi ?

Summary



6m 39s



Proposition Soit  $\varphi: V \rightarrow V$  une transformation linéaire d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\varphi$ . Alors

- ① La multiplicité géométrique de  $\lambda$  est  $\geq 1$ .
- ② La multiplicité géométrique de  $\lambda$   $\leq$  la multiplicité algébrique de  $\lambda$ .

Preuve ①  $\dim E_\lambda$ .  $\lambda$  est une valeur propre de  $\varphi$ , donc il existe  $v \in V, v \neq 0$   
t.q.  $\varphi(v) = \lambda v \Rightarrow v \in E_\lambda \Rightarrow \dim E_\lambda \geq 1$

② Fixons une base  $(v_1, \dots, v_r)$  de  $E_\lambda$ . Donc la multiplicité géométrique de  $\lambda$  est égale à  $r$ .

Soit  $B = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$  une base de  $V$ .

On a  $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & & 0 & & 0 \\ & 0 & \ddots & & & \\ & & & \lambda & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$

$\uparrow$   
r-ème colonne

$$c_\varphi(t) = \det \begin{pmatrix} \lambda - t & \dots & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda - t & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda - t & \\ \hline & & & & D \\ \hline 0 & & & & C - tI \end{pmatrix}$$

### 8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique



C'est que  $v_1$  est envoyé à  $\lambda v_1$  parce que tous ces vecteurs là appartiennent à  $E_\lambda$  donc ça c'est  $\lambda$ , et ensuite des coordonnées 0  $v_2$  est aussi envoyé à  $\lambda v_2$  parce que ça appartient à l'espace propre pour la valeur propre  $\lambda$ , 0 en bas. et puis ça continue ainsi jusqu'à la  $r^{\text{ème}}$  colonne ou je mets 0, 0...  $\lambda$  ensuite, 0. Là j'ai une matrice  $r \times r$  dans le coin. et le reste j'en ai aucune idée en fait. Donc j'ai une matrice, disons  $C$  ici, une grande matrice, et  $D$  là. Maintenant je vais calculer le déterminant de cette matrice moins  $t$  fois l'identité. Donc je fais le polynôme caractéristique, c'est le déterminant de cette matrice là, je soustrait  $t$  le long de la diagonale, donc j'ai  $\lambda - t$ ... 0, 0,  $\lambda - t$ ... 0 etc. Ici j'ai plein de 0, là je ne sais pas ce que j'ai, là j'ai un  $D$ , et là j'ai  $C$  moins  $t$  fois l'identité. Quand je vais calculer ce déterminant, je développe le long de la première colonne donc ça me donne déjà un facteur de  $\lambda - t$ ,  $\lambda - t$  fois le déterminant d'une matrice.

Notes

Summary





### Proposition

- ① La multiplicité géométrique de  $\lambda$  est  $\geq 1$ .

Preuve

- (2)

Soit  $B = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$  une base de  $V$ .

La multiplicité algébrique de  $\lambda$  est au moins  $r$ .

$$c_\varphi(t) = \det \begin{pmatrix} \lambda - t & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda - t \end{pmatrix} = (\lambda - t)^n \det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$



## 8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique

Où on a de nouveau :  $\lambda - t$ ,  $0$  etc. C'est juste la matrice que je vois là. Puis je peux encore développer le long de cette première colonne, et j'aurai  $(\lambda - t)^2$  le déterminant de notre matrice où je supprime ça et ça etc. donc je dis : etc. Et puis à la fin, quand j'arrive là en bas j'aurai  $(\lambda - t)^r$  le déterminant de la matrice  $C - t$  fois l'identité. Mais c'est pas important ce que j'ai ici, ce dont je voulais vous convaincre c'est qu'on a moins  $r$  facteurs de  $\lambda - t$  donc ça veut dire que : la multiplicité algébrique de  $\lambda$  est au moins  $r$ , C'est exactement ce qu'on a dit ici, la multiplicité géométrique c'est  $r$ , et la multiplicité algébrique au moins  $r$ , c'est peut être plus grand parce qu'il y a peut être le facteur de  $\lambda$  qu'on n'a pas vu, mais c'est au moins  $r$ .

- Notes

## Summary



**Exemple.** Trouver la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de chacune des

valeurs propres de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

D'abord on calcule  $C_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-t & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-t & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

### 8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique



Maintenant l'exemple : je me donne une matrice  $4 \times 4$ , et je cherche à trouver la multiplicité géométrique et algébrique de chacune des valeurs propres de cette matrice. Là je tiens à faire tous les détails, Donc la première chose à faire c'est de trouver les valeurs propres. Donc d'abord on cherche le polynôme caractéristique. Ça c'est le déterminant de la matrice [voir écran] C'est une matrice  $4 \times 4$ , mon but est de factoriser ce polynôme donc je vais simplifier la matrice grâce aux opérations élémentaires avant de commencer à calculer le déterminant. Donc la première chose que je fais C'est d'ajouter la deuxième ligne à la troisième et la quatrième, parce que ça va éliminer ces deux 1 qui sont là. Et ces opérations-là, on sait que ça ne change pas le déterminant. Là j'ai  $1 - t, 1, 1, 0...$  J'ajoute ici, là ça me donne  $0, 1 - t, 1 - t, 0$  et là j'ajoute à la quatrième ligne la deuxième donc j'ai :  $0, 2 - t, 0, 2 - t$  et maintenant je vais développer le long de la quatrième colonne parce que là j'ai que des 0 et ensuite un non nul à la fin, donc ceci est égal...

Notes

Summary



11m 10s

**Exemple.** Trouver la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de chacune des

valeurs propres de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

D'abord on calcule  $c_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-t & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 1-t & 0 \\ 0 & 2-t & 0 & 2-t \end{pmatrix}$

$= (2-t) \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ -1 & 2-t & 0 \\ 0 & 1-t & 1-t \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{12}(1-t)} (2-t) \det \begin{pmatrix} 0 & 1+(2-t)(1-t) & 1 \\ -1 & 2-t & 0 \\ 0 & 1-t & 1-t \end{pmatrix}$

### 8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique



là j'ai  $+$   $-$   $-$   $+$   $-$   $+$  :  $+(2-t)$  fois le déterminant de la matrice qui est là dans le coin : [voir écran] donc c'est cette matrice là dans le coin, puis de nouveau je vais simplifier ici avant de calculer le déterminant, ça c'est que je vais multiplier cette ligne là par  $1-t$  et additionner en haut, et ça va éliminer ça, ok peut être ici j'écris : donc l'opération ici c'est : j'additionne à la première ligne  $1-t$  fois la deuxième ligne. ça c'est égal à  $2-t$  le déterminant de la matrice... ici la troisième ligne ne change pas, la deuxième ligne ne change pas, et donc je multiplie par  $1-t$  donc  $-1$  fois  $1-t$  que j'additionne c'est  $0$  puis je multiplie ici par  $1-t$  et là j'aurai une composante que j'additionne en haut donc j'ai :  $1 + (2-t)(1-t)$ , puis je multiplie ici par  $1-t$  que j'additionne, ça donne  $1$ . donc je simplifie un peu, j'ai  $(2-t)$  fois le déterminant de la matrice que j'écris un peu plus grand : et dans cette composante-là ce que j'ai c'est :  $3, -3t+t^2$ , là j'ai un  $1$ ...

Notes

Summary

13m 09s



**Exemple.** Trouver la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de chacune des

valeurs propres de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \text{D'abord on calcule } \chi_A(t) &= \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-t & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 1-t & 0 \\ 0 & 2-t & 0 & 2-t \end{pmatrix} \\ &= (2-t) \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ -1 & 2-t & 0 \\ 0 & 1-t & 1-t \end{pmatrix} = (2-t) \det \begin{pmatrix} 0 & 1+(2-t)(1-t) & 1 \\ -1 & 2-t & 0 \\ 0 & 1-t & 1-t \end{pmatrix} = (2-t) \det \begin{pmatrix} 0 & 3-3t+t^2 & 1 \\ -1 & 2-t & 0 \\ 0 & 1-t & 1-t \end{pmatrix} \\ &= -(2-t)(-1) \det \begin{pmatrix} 3-3t+t^2 & 1 \\ 1-t & 1-t \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2(1-t)} = (2-t)(1-t) \det \begin{pmatrix} 3-3t+t^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (2-t)(1-t)(3-3t+t^2-1) \\ &= (2-t)(1-t)(t-1)(t-2) = (t-2)^2(t-1)^2 \end{aligned}$$

#### 8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique



et donc maintenant je peux continuer parce que là j'ai une colonne avec une seule composante non nulle donc je vais utiliser cette colonne là : j'ai :  $(2-t)$  ensuite c'est + - donc j'ai  $(-1)$  qui multiplie le déterminant de la matrice qu'on obtient si ici on supprime la deuxième ligne et la première colonne, donc ça c'est la matrice  $3-3t+t^2$ ,  $1$  et  $1-t$ ,  $1-t$  donc à la fin j'ai ici :  $(2-t)...$  Et ici je peux mettre en évidence  $1-t$  fois le déterminant de la matrice  $3-3t+t^2$ ,  $1$ ,  $1$  je vous rappelle, le but c'est de factoriser ce polynôme donc tout ce que je peux faire en avance c'est bien. Donc enfin j'ai :  $(2-t)(1-t)$ , et puis là je vais vous laisser terminer parce qu'on fait le déterminant de cette matrice là, ok, bon d'accord, je le fais, j'ai :  $(3-3t+t^2-1)$ , donc enfin je factorise et j'ai  $(2-t)(1-t)$ , après j'ai  $(t-1)(t-2)$ . Puis je peux écrire ça, l'idée étant de retrouver la multiplicité, Ici je peux tourner ces deux facteurs, multiplier chacun par  $-1$ , donc j'ai  $(t-2)^2$  là et là et j'ai  $(t-1)^2$ . Voilà le polynôme caractéristique donc ça c'est le premier calcul.

Notes

Summary



On a  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $c_A(t) = (t-1)^2(t-2)^2$ . Les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 2$ .

la multiplicité algébrique de  $\lambda_1 = 1$  est 2  
la multiplicité algébrique de  $\lambda_2 = 2$  est 2.

Multiplicité géométrique de  $\lambda_1 = 1$  :

$$(A - 1 \cdot I)X = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



#### 8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique



Notes

Donc c'est la même matrice, et j'ai déjà calculé le polynôme caractéristique donc on voit quelles sont les valeurs propres, donc les valeurs propres sont les racines de ce polynôme, donc  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 2$ . Donc multiplicité algébrique de 1 égale à 2 et multiplicité algébrique de 2 égale à 2. Et maintenant je vais calculer les multiplicités géométriques. Multiplicité... De  $\lambda_1$ . C'est la solution du système homogène où je fais  $(A - 1 \cdot I) \cdot x = 0$ . Je dois trouver l'ensemble des solutions puis calculer sa dimension. Donc je soustraits 1 le long de la diagonale, donc j'ai [voir écran]. Puis je vais échelonner cette matrice, ça prend pas beaucoup de temps. Donc je vais mettre la troisième ligne en haut là 1, -1, 0, 0. Maintenant en faisant la somme de ces deux lignes j'ai une ligne nulle que je vais déjà mettre en bas. Ensuite la première ligne je la mets en deuxième place là. Et puis j'ai cette ligne là que je n'ai pas réglée. Puis j'ai ça. Ensuite j'ajoute à la troisième ligne -1 fois la première donc j'ai : 0, 1, 0, 1... Et enfin la forme échelonnée de cette matrice...

Summary



17m 10s

On a  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $c_A(t) = (t-1)^2(t-2)^2$ . Les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 2$ .

la multiplicité algébrique de  $\lambda_1 = 1$  est 2  
la multiplicité algébrique de  $\lambda_2 = 2$  est 2.

Multiplicité géométrique de  $\lambda_1 = 1$  :

$$(A - 1 \cdot I)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \{ (\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha)^T \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

## 8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique



Ou une forme échelonnée, je devrais dire. Je vais faire -1 fois la deuxième ligne, que j'additionne à la troisième, donc j'ai 0, 0, -1, 1... Donc l'espace propre pour la valeur propre 1, c'est la solution du système homogène donc c'est le noyau de cette application, ou bien de cette matrice. Alors ici, je vois que j'ai des pivots dans la 1, 2 et 3, donc c'est la quatrième coordonnée qui est le paramètre, qui varie. Après, la troisième ça doit faire la même chose, après, la deuxième c'est - ça, et après, la première ça doit être aussi - $\alpha$ . Donc là j'obtiens :  $(-\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha)$ . où  $\alpha$  est dans  $\mathbb{R}$ , alors normalement ça devrait être les vecteurs colonnes parce qu'on a dit c'est les vecteurs colonnes tels que... donc ici je mets un *Transposé* et maintenant c'est correct. Bon, on comprend quand même parce que l'idée c'est de trouver la multiplicité géométrique donc c'est de trouver la dimension de cet espace et ça change rien si on a la transposée ou pas. Donc  $E_1$  a une base donnée par le vecteur colonne :  $(-1, -1, 1, 1)$ , ça c'est : je pose  $\alpha = 1$ , on sait que c'est le nombre de paramètres si on a bien fait le travail ici de l'échelonnage à une base et donc la multiplicité géométrique de  $\lambda_1 = 1$  est égale à 1.

Notes

Summary



19m 40s



On a  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $c_A(t) = (t-1)^2(t-2)^2$ . Les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 2$ .

la multiplicité algébrique de  $\lambda_1 = 1$  est 2  
la multiplicité algébrique de  $\lambda_2 = 2$  est 2.

Multiplicité géométrique de  $\lambda_1 = 1$  :

$$(A - 1 \cdot I)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \left\{ (\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha)^T \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}. \quad E_1 \text{ est une base } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et donc}$$

la multiplicité géométrique de  $\lambda_1 = 1$  est égale à 1.

Multiplicité géométrique de  $\lambda_2 = 2$  :

$$(A - 2I)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique



Donc on avait dit que cette multiplicité géométrique c'est au moins 1 et que ça ne dépasse pas la multiplicité algébrique, et ici on voit un exemple que c'est strictement plus petit que la multiplicité algébrique. Maintenant faisons le deuxième exemple ici. La deuxième valeur propre. Donc la multiplicité géométrique de  $\lambda_2 = 2$ . Donc j'ai le même raisonnement, je dois résoudre le système homogène où je fais  $(A - 2I)x = 0$  je ferai un peu plus rapidement car vous avez compris maintenant, donc j'ai  $(A - 2I)x = 0$ . Donc je pose la matrice  $A - 2I$  donc j'ai [voir écran] et c'est vite échelonné en fait parce qu'ici j'ai -1, 1, 1, 0 puis quand je soustrais ces deux là j'ai : 0, 1, 1, 0. Quand j'additionne la première et la troisième j'obtiens une ligne de 0 et puis si j'additionne la première et la quatrième j'obtiens exactement la ligne que j'ai là, que je peux après annuler donc je fais beaucoup d'opérations en une seule fois. Donc voilà une forme échelonnée de cette matrice et cette fois on voit qu'on a deux pivots donc il y a deux paramètres et puis je vais poser ces deux paramètres et puis on trouve que l'espace propre, pour la valeur propre 2, c'est l'ensemble...

Notes

Summary



On a  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $c_A(t) = (t-1)^2(t-2)^2$ . Les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 2$ .

la multiplicité algébrique de  $\lambda_1 = 1$  est 2  
la multiplicité algébrique de  $\lambda_2 = 2$  est 2.

Multiplicité géométrique de  $\lambda_1 = 1$  :

$$(A - 1 \cdot I)X = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_1 = \{ (\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha)^T \mid \alpha \in \mathbb{R} \}. \quad E_1 \text{ est une base } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et donc}$$

la multiplicité géométrique de  $\lambda_1 = 1$  est égale à 1.

Multiplicité géométrique de  $\lambda_2 = 2$  :

$$(A - 2I)X = 0 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \{ (0, -\alpha, \alpha, \beta)^T \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}.$$

base de  $E_2$   $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Donc la multiplicité géométrique de  $\lambda_2 = 2$  est égale à 2.

$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$   
 $-x_1 - \alpha + \alpha = 0$   
 $-x_3 = 0$



## 8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique

Donc je pose ici  $\beta$ , c'est libre. Ensuite je pose ici cette variable là  $\alpha$ . Et après, la deuxième ligne, on voit qu'on va avoir la deuxième coordonnée ici égale à  $-\alpha$ . Et après j'écris ici la relation, j'ai  $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$  donc j'ai  $-x_1 - \alpha + \alpha = 0$  donc je trouve que  $-x_1 = 0$ , donc j'ai  $x_1 = 0$ . Et ici  $\alpha$  et  $\beta$ , des valeurs réelles. Donc une base de  $E_2$ . Bon je mets de nouveau la transposée. Et une base de  $E_2$ , je pourrais poser  $\beta = 1$  et  $\alpha = 0$ , Et ensuite je peux poser  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ , ça c'est une base, et puis donc la multiplicité géométrique de la valeur propre 2 est égale à 2. Donc ça c'est un cas où la multiplicité géométrique est aussi grande que possible car on sait que ça ne peut dépasser la multiplicité algébrique, et puis pour l'autre valeur propre on a vu que la multiplicité géométrique est strictement plus petite que la multiplicité algébrique. Donc on voit que les deux choses arrivent. Et puis maintenant on arrivera à notre critère pour déterminer quand une application ou bien une matrice est diagonalisable ou non.

Notes

Summary



23m 25s