



8.8 Critère de diagonalisabilité

Après beaucoup de travail, on arrive enfin à notre critère pour déterminer si une transformation ou bien une matrice est diagonalisable ou non. Et puis, ça dépendra de ce qu'on vient de définir : cette multiplicité géométrique et algébrique. Pour vous montrer un peu d'où vient le théorème, je vais comparer deux exemples, d'une matrice diagonalisable et une autre matrice qui ne l'est pas, et comme ça, vous comprendrez d'où vient le critère.

Notes

Summary



0m 04s

Deux exemples à comparer.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$

$$c_A(t) = -(t-2)^2(t-3).$$

La multiplicité de la valeur propre $\lambda=3$ est égale à 1.
 \Rightarrow La multiplicité géométrique de $\lambda=3$ est aussi 1.

(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$

$$c_B(t) = -(t-2)^2(t-3).$$

La multiplicité géométrique de $\lambda=2$ est égale à 2.

Car l'ensemble des solutions de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est de dimension 2.

La multiplicité algébrique de $\lambda=2$ est égale à 2

8.8 Critère de diagonalisabilité



Donc voilà les deux exemples à comparer. Là, je me donne deux matrices de taille 3×3 . Et les deux sont triangulaires supérieures, donc c'est facile à calculer leur polynôme caractéristique. Donc, je soustrais t fois l'identité, et puis les deux fois, ça donne un polynôme caractéristique, qui a deux racines : 2 et 3. Et puis ici, la multiplicité algébrique de la valeur propre $\lambda = 3$, est égale à un. Ça, ça implique que la multiplicité géométrique est aussi égale à un, parce que la multiplicité géométrique, c'est au moins un et ça ne peut pas dépasser un. Donc ça, ça implique que la multiplicité géométrique de $\lambda = 3$ est aussi un. Dans les deux cas. Et maintenant pour la valeur propre deux, dans les deux cas, la multiplicité algébrique de la valeur propre $\lambda = 2$, est égale à deux car le facteur apparaît deux fois. Puis, on se demande quelle est la multiplicité géométrique. Ici, c'est facile à résoudre, donc ici la multiplicité géométrique de $\lambda = 2$ est égale à deux, car si on soustrait deux le long de la diagonale, on a cette matrice-là. L'ensemble des solutions de ce système est de dimension deux. Car on a deux paramètres là.

Notes

Summary



Deux exemples à comparer.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$

$$c_A(t) = -(t-2)^2(t-3).$$

La multiplicité de la valeur propre $\lambda=3$ est égale à 1.
 \Rightarrow La multiplicité géométrique de $\lambda=3$ est aussi 1.

(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$

$$c_B(t) = -(t-2)^2(t-3).$$

La multiplicité géométrique de $\lambda=2$ est égale à 2.

Car l'ensemble des solutions de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est de dimension 2.

La multiplicité algébrique de $\lambda=2$ est égale à 2

Pour la matrice A:

la multiplicité géométrique de $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = 0, \text{ ce système a l'ensemble des solutions de dimension 1.}$$

La multiplicité géométrique de $\lambda=2$ est égale à 1.

B est diagonalisable.

A est-elle diagonalisable ?

8.8 Critère de diagonalisabilité



Donc ça, c'est facile. Et puis, maintenant dans ce cas-ci, on va calculer, donc pour la matrice A, je veux calculer la multiplicité géométrique de la valeur propre $\lambda = 2$. Donc je soustrais deux le long de la diagonale. Oops, j'ai fait une erreur ici en bas. Donc je reviens ici, je vais corriger l'erreur. Quand je soustrais le deux ici, j'ai oublié de changer cette valeur-là. Ça ne change pas la suite, mais ça devrait être un 1 ici. Donc là, je soustrais deux le long de la diagonale, j'obtiens ça. Ensuite, je vois qu'il y a deux pivots, donc je peux réarranger, mais je vois qu'il y aura deux pivots, un paramètre. Donc ce système a un ensemble des solutions de dimension un. Donc, la multiplicité géométrique est égale à un. On a deux cas de figure différents là. Ici, la multiplicité algébrique de deux est égale à deux. Ici aussi. Mais, par contre, ici la multiplicité géométrique de deux est égale à seulement un, et là, c'est égal à deux. B est une matrice diagonalisable, car B est déjà une matrice diagonale. Donc B est diagonalisable. Et la question que je me pose, c'est est-ce que A est diagonalisable ? Je me pose la question : est-ce que A est diagonalisable ? Donc A est-elle diagonalisable ? Je travaille un petit peu pour le voir.

Notes

Summary



Deux exemples à comparer.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$
 $c_A(t) = -(t-2)^2(t-3).$

(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$
 $c_B(t) = -(t-2)^2(t-3).$

Existe-t-il une matrice inversible P telle que

$P^{-1}AP$ soit diagonale?

$$c_{P^{-1}AP}(t) = c_A(t) = -(t-2)^2(t-3).$$

Si P existe, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$

Pour chacune de ces matrices, la multiplicité géométrique de la valeur propre $\lambda=2$ est égale à 2.

8.8 Critère de diagonalisabilité



Voilà, je reprends la matrice A , la B , j'ai déjà réglé, je n'avais pas vraiment besoin de répéter, mais bon, la matrice A , elle est là. Puis, la question c'est : existe-t-il une matrice, donc existe-t-il une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Alors, si ça existe, alors on sait que le polynôme $c_{P^{-1}AP}(t)$. C'est la même chose que $c_A(t)$. qui est $-(t-2)^2(t-3)$. Donc si un tel P existe, on sait que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale, et le polynôme caractéristique, c'est ça. J'ai deux fois deux et un trois. Donc ou bien j'ai deux et deux, trois; ou bien, j'ai deux, trois, deux; ou bien j'ai trois, deux, deux. Et donc, c'est une de ces trois matrices-là. Et puis, dans tous les cas ici, la multiplicité géométrique de la valeur propre deux serait égale à deux. Donc, pour chacune de ces matrices, la multiplicité géométrique de la valeur propre $\lambda=2$ est égale à deux. Donc essentiellement la même raison ici, une de ces matrices est carrément la matrice B . Le même calcul, ça donne dimension deux pour les trois matrices.

Notes

Summary



4m 13s

Deux exemples à comparer.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$
 $c_A(t) = -(t-2)^2(t-3).$

(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$
 $c_B(t) = -(t-2)^2(t-3).$

Existe-t-il une matrice inversible P telle que

$P^{-1}AP$ soit diagonale?

$$c_{P^{-1}AP}(t) = c_A(t) = -(t-2)^2(t-3).$$

Si P existe, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$

Pour chacune de ces matrices, la multiplicité géométrique de la valeur propre $\lambda=2$ est égale à 2.

Sont X un vecteur propre pour la valeur propre 2 pour la matrice $P^{-1}AP$.

Alors $P^{-1}APX = 2X$

$$APX = 2PX$$

PX est un vecteur propre de valeur propre 2 pour la matrice A .

$$P : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_2 & \longrightarrow & \mathcal{E}_2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ P^{-1}AP & & A \end{array}$$

8.8 Critère de diagonalisabilité

Et maintenant, ça, ça pose un problème, parce que si je prends x , un vecteur propre pour la valeur propre deux pour la matrice $P^{-1}AP$. Alors, ça veut dire que $P^{-1}AP$ fois X est égal à deux fois X . Ça veut dire que $APX = 2PX$, je passe le P de l'autre côté. Ça veut dire que PX est un vecteur propre de valeur propre deux pour la matrice A . Mais P est une application inversible, ou c'est une matrice inversible. Donc P va envoyer l'espace propre pour la valeur propre deux. Ici, pour la matrice $P^{-1}AP$, de façon bijective sur l'espace propre de la valeur propre deux pour la matrice A . Donc je prends un vecteur propre à la valeur propre deux pour cette matrice-là. Et puis, j'applique P à ce vecteur propre. Et puis, ça me donne, par ce calcul-là, un vecteur propre pour la matrice A , mais de façon bijective, donc P fait ça de façon bijective. Donc P est inversible, et donc ces deux espaces propres pour la valeur propre deux pour ces deux matrices différentes ont la même dimension.

Notes

Summary



5m 57s

Deux exemples à comparer.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$
 $c_A(t) = -(t-2)^2(t-3).$

(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$
 $c_B(t) = -(t-2)^2(t-3).$

Une telle matrice P n'existe pas et
 donc A n'est pas diagonalisable.

Existe-t-il une matrice inversible P telle que

$P^{-1}AP$ soit diagonale?

$$c_{P^{-1}AP}(t) = c_A(t) = -(t-2)^2(t-3).$$

Si P existe, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$

Pour chacune de ces matrices, la multiplicité géométrique de la valeur propre $\lambda=2$ est égale à 2.

Sont X un vecteur propre pour la valeur propre 2 pour la matrice $P^{-1}AP$.

Alors $P^{-1}APX = 2X$

$$APX = 2PX$$

PX est un vecteur propre de valeur propre 2 pour la matrice A .

$P : E_2 \longrightarrow E_2$
 $\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $P^{-1}AP \quad \quad A$
 $\longleftarrow \quad \longrightarrow$

P est inversible et donc \dim (l'espace propre pour la valeur propre 2 pour $P^{-1}AP$) = mult. géom de 2 pour A .



8.8 Critère de diagonalisabilité

Et donc, la dimension de l'espace propre pour la valeur propre deux pour la matrice $P^{-1}AP$ devrait être égale à multiplicité géométrique de deux pour la matrice A . Donc, la multiplicité géométrique de deux pour la matrice A . Ça, c'est un problème parce qu'ici on a constaté que la valeur propre deux pour ces trois matrices-là est de multiplicité géométrique deux. Et par contre, ici, c'était de multiplicité géométrique un, donc ça, c'est une contradiction. Ça, c'est une contradiction. Donc une telle matrice P n'existe pas. Donc A n'est pas diagonalisable. Donc maintenant on arrive enfin à notre critère, donc ça c'était vraiment pour comparer deux exemples. Alors, le critère est dans le théorème suivant.

Notes

Summary



Théorème. Soit $\phi : V \rightarrow V$ un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie n (ou soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$). Alors ϕ est diagonalisable si et seulement si :
 $c_\phi(t)$ est un produit de facteurs linéaires

$$c_\phi(t) = a(t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ distincts, } a \in \mathbb{R}$$

et pour tout λ_i , la multiplicité algébrique de λ_i est égale à la multiplicité géométrique, i.e.

$$m_i = \dim E_{\lambda_i}. \quad \text{pour } 1 \leq i \leq r.$$



8.8 Critère de diagonalisabilité

Je vais donner une esquisse de preuve de ce théorème après. C'est l'énoncé qui est vraiment important. Donc, je me donne un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n . Ou bien, je me donne une matrice $n \times n$ à coefficients réels. C'est pareil. Alors cette transformation est diagonalisable, si et seulement si on a les deux conditions suivantes qui sont satisfaites. Déjà la première chose, c'est qu'il faut pouvoir factoriser le polynôme caractéristique comme un produit de facteurs linéaires. Donc ça c'est déjà une condition, on sait qu'on ne peut pas toujours faire ça sur \mathbb{R} . Et pour chacune des valeurs propres, la multiplicité algébrique de la valeur propre doit être égale à la multiplicité géométrique. Donc ici, je dois rajouter, ça c'est pour toute i . Donc pour chaque valeur propre, sa multiplicité algébrique doit être égale à sa multiplicité géométrique. Donc, ça c'est l'énoncé. Maintenant, je vais faire une esquisse de preuve. D'abord avant de faire ça, je vais juste remarquer que dans nos exemples, ça jouait.

Notes

Summary



8m 50s

Théorème. Soit $\phi : V \rightarrow V$ un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie n (ou soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$). Alors ϕ est diagonalisable si et seulement si :
 $c_\phi(t)$ est un produit de facteurs linéaires

$$c_\phi(t) = a(t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ distincts, } a \in \mathbb{R}$$

et pour tout λ_i , la multiplicité algébrique de λ_i est égale à la multiplicité géométrique, i.e.

$$m_i = \dim E_{\lambda_i}. \quad \text{pour } 1 \leq i \leq r.$$

8.8 Critère de diagonalisabilité



On avait la matrice B , qui était une matrice diagonale, donc diagonalisable, la multiplicité algébrique de trois est égale à un, est égale à la multiplicité géométrique, et la multiplicité algébrique de deux est égale à deux, est égale à la multiplicité géométrique. Par contre, la matrice A avait les mêmes multiplicités algébriques, mais la multiplicité géométrique de la valeur propre deux était seulement un, donc ce n'était pas assez grand. Maintenant, je fais une esquisse de preuve et puis, c'est dans les vidéos qui suivent que je vais appliquer ce théorème. Donc la vidéo a déjà été assez longue.

Notes

Summary



10m 01s

Preuve (esquisse) Supposons que φ soit diagonalisable. Par définition, il existe une base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de V formée de vecteurs propres de φ .

$$[\varphi]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$c_\varphi(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \cdots (\lambda_n - t) \quad (\text{facteurs linéaires!})$$

$$\dim E_{\lambda_i} \leq \text{mult. alg. de } \lambda_i = \text{nombre de fois que } (\lambda_i - t) \text{ apparaît comme facteur}$$

8.8 Critère de diagonalisabilité



Donc, je vais d'abord faire une esquisse de preuve. Donc d'abord, je suppose que φ est diagonalisable. Donc, par définition, ça veut dire qu'il existe une base B de V formée de vecteurs propres pour φ . Donc maintenant, ça veut dire que quand j'écris la matrice de φ par rapport à cette base. Ça, on l'a vu plusieurs fois. J'aurais une matrice diagonale. Donc j'aurais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Je ne dis pas que tous les λ_i sont distincts, on ne sait pas. Mais, j'aurais une matrice diagonale. Et donc, le polynôme caractéristique de φ , je peux utiliser cette matrice-là pour le calculer. Et ça serait $(\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \cdots (\lambda_n - t)$. Donc effectivement, on a la première condition, c'est que le polynôme caractéristique se factorise en facteurs linéaires. Et ça, c'était la première condition. Et puis aussi, je sais que la dimension de E_{λ_i} est plus petit ou égal à la multiplicité algébrique, ça on l'a déjà vu. Et ça, c'est exactement le nombre de fois que je vois le facteur de λ_i . Ici.

Notes

Summary



10m 39s

Preuve (esquisse) Supposons que φ soit diagonalisable. Par définition, il existe une base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de V formée de vecteurs propres de φ .

$$[\varphi]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \neq \quad c_\varphi(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t) \quad (\text{facteurs linéaires!})$$

$\dim E_{\lambda_i} \leq \text{mult. alg. de } \lambda_i = \text{nombre de fois que } (\lambda_i - t) \text{ apparaît comme facteur } \neq.$

Pour chaque facteur $(\lambda_i - t)$, $v_i \in E_{\lambda_i}$. Donc $\dim E_{\lambda_i} \geq \text{mult. alg. de } \lambda_i$

$\Rightarrow \dim E_{\lambda_i} = \text{mult. alg. de } \lambda_i$ (2^{ème} condition).

Supposons que $c_\varphi(t) = \pm(t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_r)^{m_r}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ distinctes. $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$

8.8 Critère de diagonalisabilité

Mais de l'autre côté, à chaque fois que j'ai un facteur $\lambda_i - t$, j'ai un élément v_i , qui est un vecteur propre. Donc pour chaque i , chaque facteur, pas pour chaque i , mais pour chaque facteur, $\lambda_i - t$, le vecteur v_i appartient à E_{λ_i} . Donc, la dimension de E_{λ_i} , c'est au moins la multiplicité algébrique de λ_i . Et on sait que c'est au plus... Donc ça, ça implique que la dimension de E_{λ_i} est égale à la multiplicité algébrique de λ_i . Donc ça c'était la deuxième condition. Maintenant, dans l'autre direction, supposons que je peux factoriser en facteurs linéaires et que j'ai que les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont distinctes. Et puis comme je sais que le degré de ce polynôme est n , j'ai que $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$. Et puis en fait, on voit comment former une base de vecteurs propres, parce que je sais que m_1 est égal à la dimension de E_{λ_1} , ça c'est la condition qu'on s'est imposée.

Notes

Summary



Preuve (esquisse) Supposons que φ soit diagonalisable. Par définition, il existe une base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de V formée de vecteurs propres de φ .

$$[\varphi]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad * \quad c_\varphi(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t) \quad (\text{facteurs linéaires!})$$

$\dim E_{\lambda_i} \leq \text{mult. alg. de } \lambda_i = \text{nombre de fois que } (\lambda_i - t) \text{ apparaît comme facteur } *$.

Pour chaque facteur $(\lambda_i - t)$, $v_i \in E_{\lambda_i}$. Donc $\dim E_{\lambda_i} \geq \text{mult. alg. de } \lambda_i$.

$\Rightarrow \dim E_{\lambda_i} = \text{mult. alg. de } \lambda_i$ (2ème condition).

Supposons que $c_\varphi(t) = \pm(t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_r)^{m_r}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ distinctes. $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$.
 $m_1 = \dim E_{\lambda_1}$ base de E_{λ_1} (v_1, \dots, v_{m_1})
 $m_2 = \dim E_{\lambda_2}$ base de E_{λ_2} ($v_{m_1+1}, \dots, v_{m_1+m_2}$)
 etc. $(v_1, \dots, v_{m_1}, v_{m_1+1}, \dots, v_{m_1+m_2}, \dots, v_n)$ est une base de V .

8.8 Critère de diagonalisabilité



Et puis, donc je trouve une base de E_{λ_1} , disons $v_{1_1}, \dots, v_{1_{m_1}}$. Et m_2 également est la dimension de E_{λ_2} , parce que la multiplicité algébrique, c'est la multiplicité géométrique, c'est la condition qui est imposée. Donc je prends une base de E_{λ_2} : $v_{2_1}, v_{2_2}, \dots, v_{2_{m_2}}$. Je mets toutes ces bases ensembles : [voir écran] Et ça, c'est une base d'une base de V . Pourquoi ? Déjà, il y a bon nombre, parce que là, la somme de tous les m_i est égale à n . Et puis, par le résultat qui dit que les vecteurs propres de valeurs propres différentes sont linéairement indépendants. On sait que ça... qu'il n'y aura pas de relation de dépendances entre les espaces propres, puis là, à l'intérieur des espaces propres, on a choisi des bases. Bon ça c'est la partie un petit peu esquissée, il faudrait écrire plus de détails. Mais en tout cas, ça, ça fait une base de V , et donc V possède une base de vecteurs propres pour φ .

Notes

Summary



Preuve (esquisse) Supposons que φ soit diagonalisable. Par définition, il existe une base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de V formée de vecteurs propres de φ .

$$[\varphi]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \neq \quad c_\varphi(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t) \quad (\text{facteurs linéaires!})$$

$\dim E_{\lambda_i} \leq \text{mult. alg. de } \lambda_i = \text{nombre de fois que } (\lambda_i - t) \text{ apparaît comme facteur } \neq.$

Pour chaque facteur $(\lambda_i - t)$, $v_i \in E_{\lambda_i}$. Dnc $\dim E_{\lambda_i} \geq \text{mult. alg. de } \lambda_i$

$\Rightarrow \dim E_{\lambda_i} = \text{mult. alg. de } \lambda_i$ (2ème condition).

Supposons que $c_\varphi(t) = \pm(t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_r)^{m_r}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ distinctes. $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$.

$m_1 = \dim E_{\lambda_1}$ base de E_{λ_1} $(v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1})$

$m_2 = \dim E_{\lambda_2}$ base de E_{λ_2} $(v_{2,1}, \dots, v_{2,m_2})$

etc.

$(v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1}, \dots, v_{r,1}, \dots, v_{r,m_r})$ est une base de V .

V possède une base de vecteurs propres pour φ .

8.8 Critère de diagonalisabilité



Notes

Donc ce qui n'est pas mal ici, c'est que non seulement on a la démonstration du théorème, mais cette partie-là nous montre comment trouver une base de vecteurs propres, c'est qu'on factorise le polynôme entièrement en facteurs linéaires pour chaque valeur propre, on va aller chercher une base de l'espace propre pour cette valeur propre. S'il y en a assez, c'est-à-dire si la dimension de l'espace propre est égale à la multiplicité algébrique, alors on met toutes ces bases ensemble, et puis ça forme une base de V , qui est une base de vecteurs propres pour la transformation linéaire. Et ça, c'est la définition d'être diagonalisable. Donc après, dans les vidéos qui suivent, je vais faire plusieurs exemples, et puis, après à la fin, je résume la méthode que nous avons développée.

Summary



15m 28s