



8.9 Exemples

Alors dans la vidéo précédente, j'ai établi un critère pour déterminer si une matrice ou bien une application linéaire de V dans V est diagonalisable ou non. Et puis, ici je vais appliquer ce critère à plusieurs exemples.

Notes

Summary



0m 04s

Exemple 1. Montrer que $\phi : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\phi(p(x)) = xp(0) - x^2p'(0) + x^3p(1)$$

n'est pas diagonalisable.

$$\text{Base } C = (1, x, x^2, x^3).$$

$$\phi(1) = x - x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 = x + x^3$$

$$\phi(x) = x \cdot 0 - x^2 \cdot 1 + x^3 \cdot 1 = -x^2 + x^3$$



8.9 Exemples



Voilà le premier exemple. Ici, je veux montrer que l'application linéaire des polynômes de degré au plus trois, dans les polynômes de degré au plus trois, qui est donnée par cette formule-là, $\Phi(p(x))$ est égal à : $xp(0) - x^2 p'(0) + x^3 p(1)$ n'est pas diagonalisable. Donc je vais travailler avec la matrice parce que j'ai besoin du polynôme caractéristique de cette transformation linéaire. Donc je calcule d'abord une matrice de cette application linéaire. Donc d'abord, je fixe une base C . Et puis, je vais calculer les images de cette base par rapport à Φ , donc je fais Φ de 1 est égal à $x \cdot 1 - x^2$ fois le dérivé de 1, qui est zéro, plus $x^3 \cdot 1$ donc ça c'est $x + x^3$. Et puis, $\Phi(x)$ est égal à $x \cdot 0$, moins x^2 fois la dérivée de x c'est 1, évalué en 0, c'est 1, plus $x^3 \cdot 1$ donc ça c'est moins $x^2 + x^3$. Ensuite, $\Phi(x^2)$ est égal à $x \cdot 0$ moins $x^2 \cdot 2x$ évalué en 0, c'est 0, plus $x^3 \cdot 1$ donc ça c'est x^3 .

Notes

Summary



0m 20s

Exemple 1. Montrer que $\phi : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\phi(p(x)) = xp(0) - x^2p'(0) + x^3p(1)$$

n'est pas diagonalisable.

$$\text{Base } C = (1, x, x^2, x^3).$$

$$\phi(1) = x - x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 = x + x^3$$

$$\phi(x) = x \cdot 0 - x^2 \cdot 1 + x^3 \cdot 1 = -x^2 + x^3$$

$$\phi(x^2) = x \cdot 0 - x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 = x^3$$

$$\phi(x^3) = x \cdot 0 - x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 = x^3$$

$$[\phi]_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_\phi(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -t & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= (-t)^3(1-t) = -t^3(1-t)$$

$$\text{Valeurs propres } \lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = 1.$$

8.9 Exemples

Et puis, $\Phi(x^3)$ c'est $x \cdot 0$ moins $x^2 \cdot 0$ plus x^3 , donc c'est x^3 . Alors, maintenant, ça veut dire que la matrice de Φ par rapport à cette base C est la matrice suivante. Donc, j'ai $(0 \ 1 \ 0 \ 1)$. Donc j'écris la colonne qui représente cet élément-là par rapport à la base que j'ai fixée. Ensuite, $(0 \ 0 \ -1 \ 1)$ Ensuite, $(0 \ 0 \ 0 \ 1)$ et $(0 \ 0 \ 0 \ 1)$. Je calcule le polynôme caractéristique de Φ , donc si $C_\Phi(t)$, c'est le déterminant de la matrice que j'obtiens si je soustrais t le long de la diagonale ici, donc j'ai $(-t \ 0 \ 0 \ 0)$, $(1 \ -t \ 0 \ 0)$ $(0 \ -1 \ -t \ 0)$ et $(1 \ 1 \ 1 \ 1-t)$. Maintenant, c'est une matrice qui est triangulaire inférieure et donc calculer son déterminant, c'est facile. C'est juste le produit des coefficients le long de la diagonale, donc c'est : $(-t)^3(1-t)$, donc c'est $-t^3(1-t)$. Et les valeurs propres donc, sont $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=1$. Maintenant, quel était le critère pour déterminer si la matrice est diagonalisable ou non ? Une transformation.

Notes

Summary



2m 09s

Exemple 1. Montrer que $\phi : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\phi(p(x)) = xp(0) - x^2p'(0) + x^3p(1)$$

n'est pas diagonalisable.

$$\text{Base } C = (1, x, x^2, x^3).$$

$$\phi(1) = x - x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 = x + x^3$$

$$\phi(x) = x \cdot 0 - x^2 \cdot 1 + x^3 \cdot 1 = -x^2 + x^3$$

$$\phi(x^2) = x \cdot 0 - x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 = x^3$$

$$\phi(x^3) = x \cdot 0 - x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 = x^3$$

$$[\phi]_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_\phi(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -t & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= (-t)^3(1-t) = -t^3(1-t) \quad \text{o.k. facteurs linéaires.}$$

Valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$.

multiplicité algébrique = 3

multiplicité algébrique = 1.

Sans calcul:

**8.9 Exemples**

Alors, je dois d'abord voir que le polynôme caractéristique se factorise en facteurs linéaires, ce qui est le cas ici, donc ça c'est ok. Donc ça c'est ok, facteurs linéaires. Et puis ensuite, pour chacune des valeurs propres je dois déterminer si sa multiplicité algébrique est égale à sa multiplicité géométrique. Ici la multiplicité algébrique, c'est 3, et ici la multiplicité algébrique est égale à 1. Comme on sait que la multiplicité géométrique est au moins 1, et que ça ne dépasse pas la multiplicité algébrique, alors ici je sais que la multiplicité géométrique est égale à 1, ainsi que la multiplicité algébrique. Je n'ai rien à vérifier pour cette valeur propre-là. Ça c'est important, parce qu'on gagne du temps. Par contre, ici il se peut que la multiplicité géométrique soit moins que 3, et puis, je dois faire un calcul pour déterminer; il n'y a aucune façon pour déterminer ça sans faire un calcul. Donc ici, sans calcul, je sais... Je sais que la dimension de l'espace propre pour la valeur propre 1, qui est ce qu'on appelle la multiplicité géométrique est égale à 1, donc par l'argument que je viens de faire.

Notes

Summary



4m 05s

Exemple 1. Montrer que $\phi : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\phi(p(x)) = xp(0) - x^2p'(0) + x^3p(1)$$

n'est pas diagonalisable.

$$\text{Base } C = (1, x, x^2, x^3).$$

$$\phi(1) = x - x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 = x + x^3$$

$$\phi(x) = x \cdot 0 - x^2 \cdot 1 + x^3 \cdot 1 = -x^2 + x^3$$

$$\phi(x^2) = x \cdot 0 - x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 = x^3$$

$$\phi(x^3) = x \cdot 0 - x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 = x^3$$

$$[\phi]_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_\phi(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -t & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= (-t)^3(1-t) = -t^3(1-t) \quad \text{o.k. facteurs linéaires.}$$

Valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$.

multiplicité algébrique = 3

multiplicité algébrique = 1.

Sans calcul: $\dim E_1 = 1$. $\dim E_0 = ?$ il faut calculer. $E_0 = \ker(\phi)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.9 Exemples

Et puis, par contre, pour calculer la dimension de l'espace propre pour la valeur propre 0, il faut calculer. Donc le E_0 , c'est le noyau de normalement Φ moins zéro fois l'identité, donc de noyau de Φ , donc je prends l'application, et puis, ici je dois... l'échelonner. Donc je vais tout de suite mettre le zéro en bas. La ligne de zéro. Ensuite la deuxième ligne, je vais la monter. Ensuite la troisième ligne, je vais la mettre en deuxième place. Et ensuite, j'ai cette ligne-là, et puis maintenant, je fais encore une étape ici. Donc ici, je soustrais la première ligne de la troisième. Donc j'ai $(0 \ 1 \ 1 \ 1)$. Et enfin, j'ajoute la deuxième à la troisième. Maintenant, la matrice est échelonnée, puis je regarde le nombre d'échelons, ici j'en ai 3. Donc ça veut dire qu'il y a un seul paramètre, donc un paramètre dans l'ensemble des solutions, donc ça, ça implique que la dimension de l'ensemble des solutions, donc la dimension de E_0 est égale à 1, qui est plus petit que 3, donc pas égal à 3, et donc cette matrice, elle n'est pas diagonalisable, et donc la transformation linéaire, elle n'est pas diagonalisable.

Notes

Summary



5m 27s

Exemple 1. Montrer que $\phi : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\phi(p(x)) = xp(0) - x^2p'(0) + x^3p(1)$$

n'est pas diagonalisable.

$$\text{Base } C = (1, x, x^2, x^3).$$

$$\phi(1) = x - x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 = x + x^3$$

$$\phi(x) = x \cdot 0 - x^2 \cdot 1 + x^3 \cdot 1 = -x^2 + x^3$$

$$\phi(x^2) = x \cdot 0 - x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 = x^3$$

$$\phi(x^3) = x \cdot 0 - x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 = x^3$$

$$[\phi]_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_\phi(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -t & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= (-t)^3(1-t) = -t^3(1-t) \quad \text{o.k. facteurs linéaires.}$$

Valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$.multiplicité
algébrique = 3

multiplicité algébrique = 1.

Sans calcul: $\dim E_1 = 1$. $\dim E_0 = ?$ il faut calculer.

$$E_0 = \ker(\phi)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 paramètre \Rightarrow

$$\dim E_0 = 1 < 3$$

mult. géométrique \neq mult. alg de 0Donc ϕ n'est pas diagonalisable.**8.9 Exemples**

Notes

Donc ça, c'est égal multiplicité géométrique de 0. Et ça, c'est égal multiplicité algébrique de 0, non égal, donc ϕ n'est pas diagonalisable. Donc ça c'est le premier exemple. Voilà un deuxième exemple.

Summary



Exemple 2. Démontrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

$$C_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} = t^2 + 1 \quad \text{ne se factorise pas en facteurs linéaires!}$$

Par conséquent, A n'est pas diagonalisable.

8.9 Exemples



Je refais la même procédure. D'abord je dois calculer le polynôme caractéristique, donc ici le $C_A(t)$, c'est le déterminant de la matrice que j'obtiens quand je soustrais t le long de la diagonale. Et puis, ce déterminant, c'est une petite matrice, une matrice 2×2 , donc c'est $t^2 + 1$, donc $t^2 - (-1)$, donc $+1$. Et puis, ceci ne se factorise pas en facteurs linéaires, il n'y a aucun nombre réel qui est une racine à ce polynôme, donc ne se factorise pas. Donc par le premier point de notre critère, alors par conséquent A n'est pas diagonalisable. Maintenant, passons à un troisième exemple.

Notes

Summary



7m 37s

Exemple 3. Démontrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et trouver P inversible

t. q. $P^{-1}AP$ soit diagonale.

$$C_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix}$$



8.9 Exemples



Alors ici, il s'agit de montrer que cette matrice est diagonalisable et de trouver une matrice inversible, qui fait la diagonalisation. Alors cette matrice P , elle va être une matrice de changement de base. Donc d'abord, je dois trouver une base... si cette matrice, elle est diagonalisable ça veut dire qu'il existe une base par rapport à laquelle l'application linéaire, qui est représentée par A devient une matrice diagonale. Donc ça, c'est l'idée. Bon d'abord, de toute façon, je dois avoir les valeurs propres pour pouvoir faire le travail. Donc, tout d'abord, je dois calculer le polynôme caractéristique. Donc $C_A(t)$, comme dans les deux exemples précédents, donc c'est le déterminant de... Ici, j'ai $(1-t \ 1 \ 0 \ 0) (1 \ 1-t \ 0 \ 0) (0 \ 0 \ 1-t \ 1) (0 \ 0 \ 1 \ 1-t)$. Maintenant, je crois bien que dans un exercice, vous avez pu voir que quand on fait le déterminant d'une matrice comme ça, qui est une matrice en blocs, qu'on pourrait faire le déterminant de ce bloc-là fois le déterminant de ce bloc-là. Mais, je ne vais pas utiliser ce fait. C'est vrai, mais je ne vais pas l'utiliser. Et c'est parce que je veux plutôt exercer les manipulations avec les lignes.

Notes

Summary



8m 35s

Exemple 3. Démontrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et trouver P inversible

t. q. $P^{-1}AP$ soit diagonale.

$$\begin{aligned}
 c_A(t) &= \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ajouter } (t-1) \times L_2 \text{ à } L_1} \det \begin{pmatrix} 0 & 1+t-1(1-t) & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\
 &= -(1+(t-1)(1-t)) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} = -(-1)
 \end{aligned}$$

8.9 Exemples



Donc ici pour simplifier, je vais additionner $t-1$ fois cette ligne-là à la première ligne pour éliminer ici en haut. Donc ici, je vais rajouter $t-1$ fois la ligne 2 à la ligne 1. Commencer cette opération élémentaire ne change pas le déterminant, mais ça simplifie quand même la matrice. Donc ici, j'ai $t-1$ fois ça plus ça, c'est 0. Ici, j'aurai $1+(t-1)$ fois $(1-t)$. Ensuite $0+0$ et $0+0$. Très bien. Et puis, la deuxième ligne, je ne vais pas la changer. Et après, je ne change pas la suite non plus. Et puis, maintenant je vais développer le long de la première ligne, donc ceci est égal. Donc j'ai plus moins, donc j'ai moins ce coefficient-là, fois le déterminant de la matrice 3×3 , que j'obtiens si je supprime la première ligne et la deuxième colonne. Et puis donc ça, ça me laisse - première ligne, deuxième colonne - donc ça, ça me laisse $(1 \ 0 \ 0) \ (0 \ 1-t \ 1)$ et $(0 \ 1 \ 1-t)$. Et puis maintenant, je développe le long de la première ligne, puis, j'ai... Bon ici, je vais simplifier un petit peu ce que j'ai à l'intérieur, donc j'ai moins... ici j'ai $-t^2$ Et après, j'ai $+t+t$, donc $+2t$.

Notes

Summary



10m 01s

Exemple 3. Démontrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et trouver P inversible

t. q. $P^{-1}AP$ soit diagonale.

$$\begin{aligned}
 c_A(t) &= \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rajouter } (t-1) \times L_2 \text{ à } L_1} \det \begin{pmatrix} 0 & 1+t-1)(1-t) & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\
 &= -(1+(t-1)(1-t)) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} = -(-t^2+2t) \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} \\
 &= (t^2-2t) [(1-t)^2 - 1] = (t^2-2t)(t^2-2t) \\
 &= t(t-2)t(t-2) \\
 &= t^2(t-2)^2
 \end{aligned}$$

8.9 Exemples



Et après, j'ai $-1+1$, donc j'ai que ça. Et ensuite, j'ai fois 1 fois le déterminant de la matrice 2×2 que j'obtiens si je supprime la première ligne et la première colonne, donc $(1-t \ 1) \ (1 \ 1-t)$. Donc enfin, ici je trouve que j'ai t^2-2t . Donc là, j'ai distribué le $-1...$ fois $(1-t)^2-1$, et puis après simplification, ça, c'est aussi t^2-2t fois t^2-2t . Donc si je factorise en facteurs linéaires, j'ai $t(t-2) \ t(t-2)$, donc $t^2(t-2)^2$. Donc le premier point du critère est satisfait, c'est-à-dire je peux factoriser le polynôme caractéristique en produit de facteurs linéaires.

Notes

Summary



12m 09s

Exemple 3 (suite). On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $c_A(t) = t^2(t-2)^2$. Valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$.
La multiplicité algébrique de chaque valeur propre est égale à 2.

$\dim E_0$: E_0 l'ensemble des solutions du système $AX=0$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8.9 Exemples

Maintenant, la suite, donc voilà, on a cette matrice, on a calculé le polynôme caractéristique, et puis donc les valeurs propres sont $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=2$. Valeurs propres 0 et 2. Et puis, pour chacune de ces valeurs propres, la multiplicité algébrique est égale à 2. Donc, multiplicité algébrique de chaque valeur propre est égale à 2. Maintenant, je dois calculer la multiplicité géométrique, c'est-à-dire la dimension de l'espace propre correspondant à chacune des valeurs propres. Et puis, il faut espérer que je trouve, à chaque fois, une dimension 2. Donc la dimension pour la valeur propre 0. Donc dimension de E_0 , c'est... Donc E_0 , c'est l'ensemble des solutions du système homogène $AX=0$. Donc ici, je prends cette matrice et je vais l'échelonner, et puis c'est très rapide, parce que la deuxième ligne, c'est pareil que la première, donc quand je fais la soustraction, j'ai ça. Et puis ici, pareil. Donc la forme échelonnée de la matrice est ça. Maintenant, on voit qu'il y a deux variables libres, donc deux paramètres, donc la dimension de l'espace et solution est égale à 2.

Notes

Summary



Exemple 3 (suite). On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $c_A(t) = t^2(t-2)^2$. Valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$.
La multiplicité algébrique de chaque valeur propre est égale à 2.

$\dim E_0$: E_0 l'ensemble des solutions du système $AX=0$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2 paramètres donc $\dim E_0 = 2$.

$\dim E_2$: E_2 l'ensemble des solutions du système $(A-2I)X=0$. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2 paramètres donc $\dim E_2 = 2$.

Pour chaque valeur propre, la multiplicité géométrique est égale à 2 et donc est égale à la multiplicité algébrique. \Rightarrow

8.9 Exemples

Donc deux paramètres. Très bien. Et puis, la dimension de l'espace propre, la valeur propre 2. Donc ici, E_2 , c'est l'ensemble des solutions du système $(A-2I)X=0$. Donc cette fois, je prends la matrice, je soustrais deux fois l'identité, donc j'aurai $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Je vais échelonner la matrice. Donc j'ai $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quand je fais la somme de ces deux lignes-là, j'ai une ligne de zéros, que je vais tout de suite mettre en bas. Ensuite, la troisième, je mets ici. Et la somme de ces deux lignes-là, c'est aussi une ligne de zéros. Donc voilà, une forme échelonnée de la matrice. Et de nouveau, on voit qu'il y a deux paramètres, donc de nouveau la dimension est égale à 2. Ça veut dire que pour chacune des valeurs propres, la multiplicité géométrique, 2 et 2, est égale à la multiplicité algébrique, qui était pour chaque valeur propre aussi égale à 2, et donc la matrice, elle est diagonalisable. La multiplicité géométrique est égale à 2 et donc est égale à la multiplicité algébrique. Et en plus, le polynôme se factorisait en facteurs linéaires, donc A est diagonalisable.

Notes

Summary



Exemple 3 (suite). On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $c_A(t) = t^2(t-2)^2$. Valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$.
La multiplicité algébrique de chaque valeur propre est égale à 2.

$\dim E_0$: E_0 l'ensemble des solutions du système $AX=0$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2 paramètres donc $\dim E_0 = 2$.

$\dim E_2$: E_2 l'ensemble des solutions du système $(A-2I)X=0$. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2 paramètres donc $\dim E_2 = 2$.

Pour chaque valeur propre, la multiplicité géométrique est égale à 2 et donc est égale à la multiplicité algébrique. $\Rightarrow A$ est diagonalisable.

Pour trouver P , il faut trouver une base de vecteurs propres.

$$E_0 = \{ d_1, -d_1 \}$$



8.9 Exemples

Maintenant si la question était simplement de démontrer que A est diagonalisable, on a fini le problème. Mais je voulais aussi trouver la matrice P qui fait la diagonalisation de A . Cette matrice P , elle va être une matrice de changement de base entre la base C , qu'on a fixée au début, et puis, une base de vecteurs propres pour cette matrice, donc il faut, en fait, pour chacun de ces espaces propres que je trouve une base de l'espace propre. Comme j'ai déjà échelonné les matrices, ça ne serait pas trop difficile, donc une base... On peut déjà faire la remarque quand même, donc pour trouver la matrice P , qui est demandée dans l'exercice, alors il faut trouver une base de vecteurs propres. Donc d'abord je fais une base de E_0 , donc le E_0 ici, c'est l'ensemble... Bon ici, je vais les écrire comme des vecteurs par rapport à la base canonique. Donc ici, on voit qu'il faut, si je mets les deux paramètres α et β . Donc α et β , il faut que les deux premiers termes soient de signe opposé. Donc ici, j'aurai α et ensuite $-\alpha$. Et ici aussi, β , et $-\beta$.

Notes

Summary



Exemple 3 (suite). On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $c_A(t) = t^2(t-2)^2$. Valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$. La multiplicité algébrique de chaque valeur propre est égale à 2.

$\dim E_0$: E_0 l'ensemble des solutions du système $AX=0$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2 paramètres donc $\dim E_0 = 2$.

$\dim E_2$: E_2 l'ensemble des solutions du système $(A-2I)X=0$. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2 paramètres donc $\dim E_2 = 2$.

Pour chaque valeur propre, la multiplicité géométrique est égale à 2 et donc est égale à la multiplicité algébrique. $\Rightarrow A$ est diagonalisable.

Pour trouver P , il faut trouver une base de vecteurs propres.

$E_0 = \{(\alpha, -\alpha, \beta, -\beta)_C \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ $C = (e_1, e_1, e_3, e_4)$ base canonique de \mathbb{R}^4 . base de $E_0 = ((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$
 $E_2 = \{(\alpha, \alpha, \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ base de $E_2 = ((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$

8.9 Exemples



Notes

Et tout ça, c'est des vecteurs vus par rapport à la base C . Et α et β sont des nombres réels, ici C c'est la base canonique de \mathbb{R}^4 . Donc tout ça, pour moi, quand j'ai une matrice je pense que ça représente une application linéaire de \mathbb{R}^4 . Alors, on a ça. Et donc, une base de E_0 , je peux poser $\alpha=1$ et $\beta=0$ et puis, je trouve $(1 \ -1 \ 0 \ 0)$. Ensuite, je change et je pose $\alpha=0$ et $\beta=1$. Comme ça. Et puis, maintenant E_2 , c'est presque pareil. Ici on voit que les deux coordonnées, les deux premières doivent être égales, ainsi que la troisième et la quatrième. De nouveau, ce sont des vecteurs par rapport à la base canonique. Et puis ici, une base de E_2 , donc je choisis $\alpha=1$, et $\beta=0$, donc j'ai $(1 \ 1 \ 0 \ 0)$, et ensuite $\alpha=0$ et $\beta=1$, ça donne ça. Donc ça, c'est une nouvelle base, je vais les mettre ensemble.

Summary



18m 42s

Exemple 3 (fin). Une base de E_0 est $((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$ et une base de E_2 est $((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$. Finalement, une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 est $\mathcal{B} = ((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$.

Sont $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire telle que $[\varphi]_c = A$.
 $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ est une matrice diagonale; $[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

8.9 Exemples



Donc c'est ce que je viens de faire, on a une base de E_0 , qui est donnée par ces deux vecteurs-là. Et puis, une base de E_2 , qui est donnée par ces deux vecteurs-là. Et finalement, on met ces bases ensembles et on trouve une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 , qui est l'ensemble de ces quatre vecteurs. Et puis, maintenant je sais que si je représente... Si Φ représente une application linéaire, donc soit : Φ de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 , l'application linéaire telle que, quand je représente Φ par rapport à la base canonique de \mathbb{R}^4 , j'obtiens la matrice A . Maintenant je sais que j'ai trouvé ici une base de vecteurs propres, donc ça, c'est la base \mathcal{B} , donc je sais que Φ par rapport à \mathcal{B} est diagonale, car c'est exactement ça, quand on a une base de vecteurs propres, la matrice qui représente l'application par rapport à cette base devient une matrice diagonale. Et d'ailleurs, même sans faire un calcul, je sais que pour cette matrice, c'est : Φ par rapport à \mathcal{B} . Il suffit de regarder quels sont les vecteurs propres et leurs valeurs propres.

Notes

Summary



20m 10s

Exemple 3 (fin). Une base de E_0 est $((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$ et une base de E_2 est $((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$. Finalement, une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 est $\mathcal{B} = ((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$.

Sont $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire telle que $[\varphi]_C = A$.
 $[\varphi]_B$ est une matrice diagonale; $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$[\varphi]_B = [id]_{BC} [\varphi]_C [id]_{CB}$$

Posons $P = [id]_{CB}$

8.9 Exemples



Donc ça, c'était un vecteur propre à la valeur propre 0. Donc il est envoyé à zéro fois lui-même. Ça c'était aussi un vecteur propre à la valeur propre 0, qui est envoyé à zéro. Ce vecteur, c'est un vecteur propre pour la valeur propre 2, et donc qui est envoyé à deux fois lui-même. Et puis, celui-là un vecteur propre aussi pour la valeur propre 2, qui est envoyé à deux fois lui-même. Et puis, l'autre relation, c'est que maintenant je sais aussi que Φ par rapport à B , je pourrais commencer avec Φ par rapport à C , et puis ici, je devrais faire un changement de base, donc je mets ici l'identité. Bon cette matrice-là, elle sait prendre un vecteur écrit par rapport à B , donc je dois d'abord mettre B et ensuite je transforme vers C . Et ensuite, comme ceci ce côté gauche me donne un résultat en termes de B , je dois revenir après vers B , et donc ça, c'est ce que je cherche ici, donc posons B égal à la matrice identité CB . Donc, ça c'est la matrice qui est facile à écrire, parce que je dois juste écrire la base B en termes de la base C , et comme C est la base canonique, c'est facile.

Notes

Summary



21m 28s

Exemple 3 (fin). Une base de E_0 est $((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$ et une base de E_2 est $((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$. Finalement, une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 est $\mathcal{B} = ((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$.

Sont $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire telle que $[\varphi]_C = A$.
 $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ est une matrice diagonale; $[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = [id]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} [\varphi]_C [id]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$$

Posons $P = [id]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A vérifier : $P^{-1} = [id]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = [id]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} [\varphi]_C [id]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



8.9 Exemples

Donc je prends ces vecteurs-là, je les écris dans les colonnes, donc j'ai $(1 \ -1 \ 0 \ 0) \ (0 \ 0 \ 1 \ -1) \ (1 \ 1 \ 0 \ 0) \ (0 \ 0 \ 1 \ 1)$ Et puis après, je vous laisse vérifier, donc je dis « à vérifier » : deux choses, deux calculs que j'ai déjà faits. À vérifier que P inverse, qui est donc l'identité dans l'autre sens, BC est égale à un demi fois cette matrice-là. Bon, en fait, je vais vite vérifier parce que c'est pas difficile. Je dois multiplier ces deux matrices-là, donc là, j'ai $1+1$, ça fait 2 , fois $1/2$, $-1+1$, ça fait 0 , ça c'est 0 , et ça c'est 0 . Ensuite j'ai $-1+1$, c'est 0 , $1+1$ c'est 2 , 0 , 0 . Ensuite, c'est 0 , 0 , ensuite 2 comme avant, et puis 0 , oui, c'est O.K. Donc c'est très similaire à chaque ligne. Donc c'est bien l'inverse, et puis donc ça, on l'a vérifié, mais ce qu'on n'a pas vérifié, c'est que si on fait $P^{-1}AP$, ce qui revient à faire ce que j'ai écrit ici : l'identité BC , Φ par rapport à C , l'identité CB , que c'est bien la matrice diagonale, que j'ai écrite là-haut. Donc ça, je vous laisse vérifier. Donc ça, c'est tout un long exemple, qui montre toutes les étapes de la diagonalisation d'une matrice ou bien d'une transformation linéaire.

Notes

Summary

