



riel de dimension finie,  $\phi: V \rightarrow V$  une transformation



- Notes



Soient  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\phi : V \rightarrow V$  une transformation linéaire ou  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

- ① Calculer le polynôme caractéristique  $c_\phi(t)$ , ou  $c_A(t)$ .
- ② Si  $c_\phi(t)$  possède un facteur de degré deux qui n'a aucune racine réelle, alors  $\phi$  n'est pas diagonalisable.

#### 8.10 Diagonalisation: marche à suivre



Donc on se donne un  $R$ -espace vectoriel de dimension finie, et puis une transformation linéaire de cet espace, ou bien on se donne une matrice  $n \times n$ , à coefficients réels. Maintenant, cette matrice  $A$ , je vais penser que ça représente une transformation linéaire de l'espace  $R^n$  par rapport à la base canonique  $C$ . Donc on veut déterminer si  $\phi$ , ou bien  $A$ , est diagonalisable; et au cas où  $\phi$  ou  $A$  sont diagonalisables, on veut trouver une matrice qui fait la diagonalisation. Donc la première étape - une liste d'étapes - c'est de calculer le polynôme caractéristique, ou bien  $C_\phi(t)$ , ou  $C_A(t)$ . Maintenant, (2) on peut montrer que tout polynôme sur  $R$  peut être factorisé en un produit de facteurs linéaires et de facteurs de degré 2. Et si ce polynôme possède un facteur de degré 2 qui n'a pas de racine réelle, alors  $A$  ou  $\phi$  n'est pas diagonalisable. Donc si - bon, ici, je vais arrêter de parler des deux, je vais juste parler de  $\phi$ . Donc si  $C_\phi(t)$  possède un facteur de degré 2, qui n'a aucune racine réelle, alors  $\phi$  n'est pas diagonalisable. Donc on continue.

Notes

Summary



0m 31s

Soient  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\phi : V \rightarrow V$  une transformation linéaire ou  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

- ① Calculer le polynôme caractéristique  $c_\phi(t)$ , ou  $\chi_A(t)$ .
- ② Si  $c_\phi(t)$  possède un facteur de degré deux qui n'a aucune racine réelle, alors  $\phi$  n'est pas diagonalisable.
- ③ On factorise  $c_\phi(t)$  en facteurs linéaires et les racines de  $c_\phi(t)$  sont les valeurs propres de  $\phi$ .
- ④ Pour chaque valeur propre de  $\phi$ , on trouve sa multiplicité algébrique.
- ⑤ Pour chaque valeur propre  $\lambda$ , on cherche l'espace propre  $E_\lambda = \{v \in V \mid (\phi - \lambda \cdot \text{id})v = 0\}$ .
- ⑥ On calcule  $\dim E_\lambda$ , c'est la multiplicité géométrique de  $\lambda$ .  
Si  $\text{mult. géom. de } \lambda = \text{mult. alg. de } \lambda$ , pour toutes les valeurs propres  $\lambda$ , c'est bon.



#### 8.10 Diagonalisation: marche à suivre

On va supposer qu'on peut factoriser, donc on suppose qu'on peut factoriser  $C_\phi(t)$  en facteur linéaire. Et on trouve ces racines les racines de  $C_\phi(t)$  sont les valeurs propres de  $\phi$ . Maintenant, (4) pour chaque racine, pour chaque valeur propre, on trouve sa multiplicité algébrique, qui est, tout simplement, le nombre de fois que le facteur linéaire associé apparaît dans la factorisation de  $C_\phi(t)$ . Et puis maintenant, pour chaque valeur propre  $\lambda$ , on cherche l'espace propre  $E_\lambda$ , qui est l'ensemble des solutions du système homogène associé à  $\lambda$ . Maintenant, on va comparer ces deux valeurs-là; on cherche l'espace propre, après, on va calculer sa dimension. Donc on calcule la dimension de  $E_\lambda$ , c'est-à-dire la multiplicité géométrique de  $\lambda$ , et puis on va comparer avec la multiplicité algébrique. Donc si la multiplicité géométrique de  $\lambda$  est égale à sa multiplicité algébrique, pour toutes les valeurs propres,  $\lambda$  et... (on est dans le cas où on pouvait factoriser  $C_\phi(t)$ ) et  $C_\phi(t)$  se factorise en produit de facteurs linéaires, alors  $\phi$  est diagonalisable.

Notes

Summary



Soient  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\phi : V \rightarrow V$  une transformation linéaire ou  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

- ① Calculer le polynôme caractéristique  $c_\phi(t)$ , ou  $\chi_A(t)$ .
- ② Si  $c_\phi(t)$  possède un facteur de degré deux qui n'a aucune racine réelle, alors  $\phi$  n'est pas diagonalisable.
- ③ On factorise  $c_\phi(t)$  en facteurs linéaires et les racines de  $c_\phi(t)$  sont les valeurs propres de  $\phi$ .
- ④ Pour chaque valeur propre de  $\phi$ , on trouve sa multiplicité algébrique.
- ⑤ Pour chaque valeur propre  $\lambda$ , on cherche l'espace propre  $E_\lambda = \{v \in V \mid (\phi - \lambda \cdot \text{id})v = 0\}$ .
- ⑥ On calcule  $\dim E_\lambda$ , c'est la multiplicité géométrique de  $\lambda$ .  
Si mult. géom de  $\lambda$  = mult. alg. de  $\lambda$ , pour toutes les valeurs propres  $\lambda$ , et  $c_\phi(t)$  se factorise en un produit de facteurs linéaires, alors  $\phi$  est diagonalisable.
- ⑦ Si  $\phi$  est diagonalisable, on cherche une base  $B$  formée de vecteurs propres de  $\phi$  et  $[\phi]_B$  est diagonale.  
Si  $C$  est une base quelconque de  $V$ , on a  $[\phi]_B = [\text{id}]_{B,C} [\phi]_C [\text{id}]_{C,B}$ .

#### 8.10 Diagonalisation: marche à suivre



Donc en fait, dès le moment que vous trouvez une seule valeur propre, si ça arrive que vous trouviez une seule valeur propre, où la multiplicité géométrique n'est pas égale à la multiplicité algébrique, alors on sait que  $\phi$  n'est pas diagonalisable. Et puis maintenant, dernière chose : supposons que  $\phi$  est diagonalisable. Si  $\phi$  est diagonalisable, on cherche une base  $B$ , formée de vecteurs propres de  $\phi$ , et la matrice de  $\phi$ , par rapport à cette base-là, est diagonale. Et puis normalement, ce qui fait le passage, donc si  $C$  est une base quelconque de  $V$ , on a, comme d'habitude, que la matrice de  $\phi$  par rapport à la base  $B$  se calcule à partir de la matrice de  $\phi$  par rapport à  $C$ , en faisant ce changement de base-là. Donc après, on comprend ce qu'il faut poser comme matrice  $P$ , qui fait la diagonalisation de la matrice  $[\Phi]_C$ . Donc voilà, ça, c'est la procédure.

Notes

Summary

