



8.11 Appendice: valeurs propres complexes



Dans cette vidéo, nous allons faire un petit détour vers l'algèbre linéaire sur le corps des nombres complexes. Et puis, je voudrais vous rendre attentif au fait que la théorie que nous avons vue se généralise, ça devient particulièrement intéressant de faire cette généralisation quand on parle de la diagonalisation des applications linéaires.

Notes

Summary



0m 04s

Soit $c_\phi(t) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ ou $c_A(t) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Alors $c_A(t)$ se factorise en facteurs linéaires (de degré 1) et facteurs de degré 2 ne possédant aucune racine réelle. On a

$$c_A(t) = \pm(t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r} (t^2 + a_1 t + b_1) \cdots (t^2 + a_s t + b_s)$$

où $a_i^2 - 4b_i < 0$.

Si de tels facteurs existent, alors A n'est pas diagonalisable.

8.11 Appendice: valeurs propres complexes



Je me donne un polynôme... En fait il s'agit ici des questions sur le polynôme caractéristique Je me donne un polynôme de degré n à coefficients réels. Je suppose que ce polynôme est venu comme polynôme caractéristique alors je peux factoriser ce polynôme. Ça c'est un résultat de l'algèbre. On peut factoriser ce polynôme en facteurs linéaires, là j'en ai plusieurs, et en facteur de degré 2, qui ne possèdent aucune racine réelle. Peut-être je n'ai pas ces facteurs-là, peut-être que je n'ai pas de facteurs linéaires mais on peut factoriser jusqu'à avoir des facteurs de degré au plus 2. On peut factoriser à ce point-là. Maintenant, ici c'est la condition qui montre que chacun de ces facteurs-là ne possède aucune racine réelle. Si ces facteurs-là existent, s'il existe des facteurs de degrés 2 ici, alors on sait que A ou bien le ϕ n'est pas diagonalisable. Si de tels facteurs existent, alors A n'est pas diagonalisable. Mais il y aura un autre point de vue. Ce serait le point de vue que cette matrice A représente une transformation linéaire de l'espace vectoriel C^n pas R^n , mais C^n , les nombres complexes Soit C , écrit comme ça, l'ensemble des nombres complexes $a+bi$ où a et b sont réels.

Notes

Summary



0m 26s

Soit $c_\phi(t) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ ou $c_A(t) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Alors $c_A(t)$ se factorise en facteurs linéaires (de degré 1) et facteurs de degré 2 ne possédant aucune racine réelle. On a

$$c_A(t) = \pm(t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r} (t^2 + a_1 t + b_1) \cdots (t^2 + a_s t + b_s)$$

où $a_i^2 - 4b_i < 0$.

Si de tels facteurs existent, alors A n'est pas diagonalisable.

Sont \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes $\{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

On peut définir "C-espace vectoriel" et $\mathbb{C}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{C}\}$ est un

8.11 Appendice: valeurs propres complexes

Si vous n'avez pas vu la théorie sur les nombres complexes, ou bien ça veut dire que vous n'en avez pas besoin, donc vous pouvez sauter cette vidéo. Ou bien, si vous voulez, vous irez lire sur les nombres complexes, la théorie des nombres complexes ce n'est pas très compliqué ce dont on a besoin ici. Alors c'est comme l'ensemble des nombres réels, on peut additionner, on peut multiplier, on peut diviser un nombre complexe par un nombre complexe non nul. Ça se comporte comme les nombres réels, il y a des règles de distributivité et tout ça... Je continue comme si vous les connaissiez déjà. Soit \mathbb{C} , l'ensemble des nombres complexes, on peut former ce que l'on appelle les \mathbb{C} -espaces vectoriels. On peut définir "C-espace vectoriel" avec presque la même liste d'axiomes que pour un \mathbb{R} -espace vectoriel mais à chaque fois qu'on a un scalaire λ ce sera un scalaire qui sera pris dans le corps de nombres complexes au lieu des nombres réels. A ce moment-là c'est \mathbb{C}^n qui sera les n -uplets comme ça, où α_i est maintenant un nombre complexe. Ce sera un exemple de \mathbb{C} -espace vectoriel.

Notes

Summary



Soit $c_\phi(t) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ ou $c_A(t) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Alors $c_A(t)$ se factorise en facteurs linéaires (de degré 1) et facteurs de degré 2 ne possédant aucune racine réelle. On a

$$c_A(t) = \pm(t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r} (t^2 + a_1 t + b_1) \cdots (t^2 + a_s t + b_s)$$

où $a_i^2 - 4b_i < 0$.

Si de tels facteurs existent, alors A n'est pas diagonalisable.

Sont \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes $\{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

On peut définir "C-espace vectoriel" et $\mathbb{C}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{C}\}$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

On peut regarder A comme étant la matrice d'une transformation linéaire de \mathbb{C}^n (par rapport à la base canonique).

8.11 Appendice: valeurs propres complexes



Maintenant les nombres réels sont compris dans les nombres complexes parce que je pourrais mettre le $b = 0$ et ça c'est juste un nombre réel. Cette matrice A est une matrice à coefficients complexes et donc elle représente une transformation linéaire de \mathbb{C}^n . On peut regarder A, la matrice A, comme étant la matrice d'une transformation linéaire de l'espace vectoriel \mathbb{C}^n par rapport à, de nouveau, la base canonique. Ce qui change c'est que le corps des nombres complexes a une propriété que n'ont pas les nombres réels et ça c'est dans le théorème suivant, qui s'appelle le théorème fondamental de l'algèbre.

Notes

Summary



3m 45s

Théorème fondamental de l'algèbre. Tout polynôme à coefficients dans \mathbb{C} (en particulier à coefficients réels) se factorise en facteurs linéaires.

$$\text{Donc } \zeta_A(t) = \pm (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r} (t - \mu_1)^{l_1} \cdots (t - \mu_{2s})^{l_{2s}}$$

$\lambda_i \in \mathbb{R} \qquad \mu_i \in \mathbb{C}.$

8.11 Appendice: valeurs propres complexes



Si je me donne un polynôme à coefficients dans les nombres complexes, (en particulier à coefficients réels) on peut le factoriser en produit de facteurs linéaires. On n'aura plus le problème d'avoir les facteurs de degré 2 qui ne se factorisent pas plus bas. Ici, ça veut dire que dans notre cas, le polynôme caractéristique qu'on avait $C_A(t)$, ce serait plus ou moins, donc on aura au début tous les facteurs linéaires que vous voyez. Donc les λ_i ici appartiennent aux nombres réels. Ensuite, tous les facteurs de degré 2, je peux les factoriser plus loin. $(t - \mu_1)^{l_1} \cdots (t - \mu_{2s})^{l_{2s}}$ en fait comme il y a un facteur linéaire ici, j'ai 2s. Je dois avoir le double du nombre de facteurs linéaires parce que j'avais s facteurs de degré 2. Et ici, les μ_i , par contre, sont des nombres complexes parce que je savais que ces polynômes de degré 2 n'avaient pas de racine réelle. En plus, il y a un truc qui n'est pas nécessaire mais je vais faire la remarque.

Notes

Summary



4m 34s

Théorème fondamental de l'algèbre. Tout polynôme à coefficients dans \mathbb{C} (en particulier à coefficients réels) se factorise en facteurs linéaires.

$$\text{Donc } c_A(t) = \pm (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r} (t - \mu_1)^{l_1} \cdots (t - \mu_{2s})^{l_{2s}}$$

$\lambda_i \in \mathbb{R} \qquad \mu_i \in \mathbb{C}.$

(En plus, si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $c_A(t) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, alors pour chaque $1 \leq i \leq 2s$, μ_i et $\bar{\mu}_i$ sont des racines de $c_A(t)$.)

Critère de diagonalisabilité : $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{C} \iff$ pour chaque valeur propre λ de A , la multiplicité géométrique de λ est égale à la multiplicité algébrique de λ .



8.11 Appendice: valeurs propres complexes

En plus, comme le A ici qu'on a pris est une matrice $m \times n$ à coefficients réels $c_A(t)$ est un polynôme à coefficients réels alors à chaque fois qu'on a une racine, on a son conjugué complexe. Pour chaque i entre 1 et $2s$, μ_i et le conjugué complexe de μ_i sont des racines de ce polynôme. Ça c'est juste une remarque, on n'en a pas vraiment besoin. Maintenant, dans ce cas, notre critère de diagonalisabilité va changer. Je n'aurai plus besoin de me poser la question, est-ce que le polynôme caractéristique se factorise en facteurs linéaires parce que tout polynôme se factorise en facteurs linéaires, si je me permets d'avoir des facteurs linéaires avec des racines complexes. Donc maintenant le nouveau critère de diagonalisabilité d'une matrice A devient A est diagonalisable sur \mathbb{C} si et seulement si pour chaque valeur propre λ de A la multiplicité géométrique de λ est égale à la multiplicité algébrique de λ . Enfin, je veux terminer avec un exemple.

Notes

Summary



5m 59s

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$c_A(t) = t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$. Valeurs propres i et $-i$.

La multiplicité algébrique de $\lambda_1 = i$ est égale à 1 et donc la multiplicité géométrique est aussi égale à 1.
 " " $\lambda_2 = -i$ " " " " " "

Cherchons P inversible t.q. $P^{-1}AP$ soit diagonale.

8.11 Appendice: valeurs propres complexes



Je pose A la matrice ici, et puis je calcule d'abord le polynôme caractéristique donc $c_A(t)$, je vous dis, vous faites le calcul, c'est $t^2 + 1$. C'est l'exemple qu'on avait avant. Et puis, ce que j'avais remarqué avant, c'est qu'il n'y avait pas de racine réelle. C'est vrai. Mais sur les nombres complexes, on peut factoriser. C'est $(t - i)(t + i)$, donc les valeurs propres sont i et $-i$. A chaque fois, la valeur propre i est de multiplicité algébrique 1 et donc de multiplicité géométrique 1. La multiplicité algébrique de $-i$ est aussi 1 et donc la multiplicité géométrique est égale à 1. Donc j'utilise un résultat, c'est important. On sait que cette matrice est diagonalisable. Ça je vais l'écrire. La multiplicité algébrique de $\lambda_1 = i$ est égale à 1 donc la multiplicité géométrique est aussi égale à 1. Pareil pour $\lambda_2 = -i$, c'est la même chose. On sait que cette matrice est diagonalisable mais je vais chercher un P . Donc cherchons P inversible, tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Je dois faire le travail de trouver une base de chacun de ces espaces propres.

Notes

Summary



8m 00s

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$c_A(t) = t^2 + 1 = (t-i)(t+i)$. Valeurs propres i et $-i$.

La multiplicité algébrique de $\lambda_1 = i$ est égale à 1 et donc la multiplicité géométrique est aussi égale à 1.
 " " $\lambda_2 = -i$ " " " " " "

Cherchons P inversible t.q. $P^{-1}AP$ soit diagonale.

$E_i = \ker(A - iI) \quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 + (i)L_1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 + iL_1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_i = \{(-\alpha i, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$
 base de $E_i = \{(-i, 1)\}$.

$E_{-i} = \ker(A + iI) \quad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 + (-i)L_1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - iL_1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

8.11 Appendice: valeurs propres complexes



Ça ne va pas être une grande base, parce que les espaces sont de dimension 1. L'espace propre pour la valeur propre i , je dois faire le noyau de $(A - iI)$ je soustrais i le long de la diagonale. Je dois échelonner la matrice. D'abord je vais échanger et multiplier par -1 . Ensuite je vais additionner i fois la première ligne à la deuxième. Donc c'est la ligne 2 qui va changer. j'additionne i fois la première. $i \cdot i = -1$. Donc $i \cdot i = -1$. Ca c'est aussi 0. Donc il y a un paramètre. Donc une base E_i est égale à l'ensemble des vecteurs. Donc j'ai un paramètre. Si je pose le paramètre ici, alors ici, c'est égal à $-\alpha i$ où α est un nombre complexe, parce que maintenant tout se passe dans \mathbb{C}^2 , l'espace vectoriel \mathbb{C}^2 et puis une base donc de E_i je peux prendre, je pose $\alpha = 1$ et j'ai $(-i, 1)$. L'espace propre pour la valeur propre $-i$, c'est égal au noyau de $A + iI$ donc j'ai $\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$ j'échange les lignes, maintenant je vais additionner i fois la première ligne à la deuxième. J'ai $(0 \ 0)$.

Notes

Summary



Exemple. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$c_A(t) = t^2 + 1 = (t-i)(t+i)$. Valeurs propres i et $-i$.

La multiplicité algébrique de $\lambda_1 = i$ est égale à 1 et donc la multiplicité géométrique est aussi égale à 1.
 " " $\lambda_2 = -i$ " " " " " "

Cherchons P inversible t.q. $P^{-1}AP$ soit diagonale.

$E_i = \ker(A - iI) \quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \times (-i)} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 + iL_1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_i = \{(-\alpha i, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$
 base de $E_i = \{(-i, 1)\}$.

$E_{-i} = \ker(A + iI) \quad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \times (-i)} \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 + iL_1} \begin{pmatrix} -1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{-i} = \{(\alpha i, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$
 base de $E_{-i} = \{(i, 1)\}$.

Puisons $P = [id]_{CB}$. Alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \{(-i, 1), (i, 1)\}$

8.11 Appendice: valeurs propres complexes



Donc l'espace propre pour la valeur propre $-i$, c'est l'ensemble des vecteurs où ici, cette fois j'ai $(\alpha i, \alpha)$ α est de nouveau un nombre complexe. et une base de l'espace propre pour la valeur propre $-i$, Je peux prendre $(i, 1)$. Voilà. Enfin, je sais que si je pose P , la matrice qui fait le changement de base depuis la base B vers la base C , où C est la base canonique de l'espace vectoriel \mathbb{C}^2 , alors à ce moment-là on a que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale et c'est la matrice où d'abord ça c'est un vecteur propre pour la valeur propre i et ça c'est un vecteur propre pour la valeur propre $-i$. Ici, le P c'est la matrice, juste pour terminer, c'est la matrice $\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Notes

Summary

