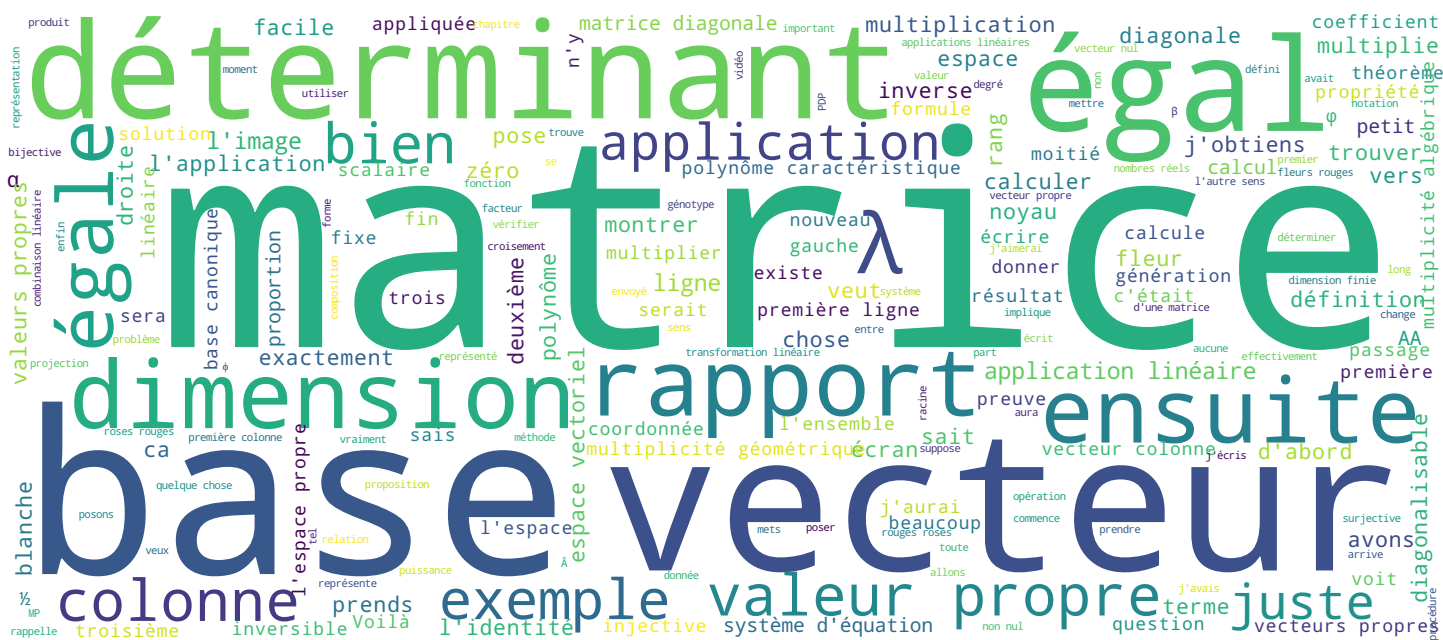


## Prof. Donna Testerman





**8.12 Appendice: application de la diagonalisation à un problème de génétique**

Dans cette vidéo, j'aimerais faire une application de la procédure de diagonalisation d'une matrice à un problème de génétique.

Notes


Summary




0m 04s

### Exemple.

- On étudie la proportion de fleurs rouges ( $a_n$ ), roses ( $b_n$ ) et blanches ( $c_n$ ) dans une ferme au bout de  $n$  générations.
- Les deux allèles responsables de la couleur des fleurs sont  $A$  et  $a$ .
- Les fleurs rouges, roses et blanches sont exprimées par les génotypes  $AA$ ,  $Aa$ ,  $aa$ .
- A chaque génération, chaque fleur est fertilisée par une fleur ayant le même génotype.
- La proportion initiale est donnée par  $a_0 = 0.05$ ,  $b_0 = 0.9$ ,  $c_0 = 0.05$ .
- **Problème : Déterminer  $a_{2015}$ ,  $b_{2015}$  et  $c_{2015}$ .**

Génotype des enfants	Génotype des parents		
	$\{AA, AA\}$	$\{Aa, Aa\}$	$\{aa, aa\}$
$AA$	1	0.25	0
$Aa$	0	0.5	0
$aa$	0	0.25	1

#### 8.12 Appendice: application de la diagonalisation à un problème de génétique



Je vous présente le problème : On va étudier la proportion de fleurs rouges, roses et blanches dans une ferme au bout de  $n$  générations. Maintenant, les deux allèles qui sont responsables de la couleur des fleurs sont  $A$  et  $a$ . Les fleurs rouges, roses et blanches sont exprimées par les génotypes  $AA$ ,  $Aa$  et  $aa$ , respectivement. Et puis à chaque génération, chaque fleur est fertilisée par une fleur ayant le même génotype. Donc ça c'est le fermier ou l'agriculteur qui décide. Donc à chaque génération, chaque fleur est fertilisée par une fleur ayant le même génotype. Ensuite, la proportion initiale est donnée par 0,05 de génotype  $AA$ , La plupart sont de génotype  $Aa$ , et puis, il y en a de type  $aa$  donc ça, c'est blanche, c'est une toute petite proportion. Donc 90% sont roses. Après, j'aimerais déterminer la proportion de fleurs roses, rouges et blanches, après 2015 générations. Donc maintenant, ça ce sont les probabilités ou proportions qui sont données donc, c'est la probabilité qu'après un certain croisement, on a tant de roses rouges, roses et blanches. Et puis de ça, on peut tirer un système d'équations.

Notes

Summary



0m 12s

## Exemple.

- On étudie la proportion de fleurs rouges ( $a_n$ ), roses ( $b_n$ ) et blanches ( $c_n$ ) dans une ferme au bout de  $n$  générations.
- Les deux allèles responsables de la couleur des fleurs sont  $A$  et  $a$ .
- Les fleurs rouges, roses et blanches sont exprimées par les génotypes  $AA$ ,  $Aa$ ,  $aa$ .
- A chaque génération, chaque fleur est fertilisée par une fleur ayant le même génotype.
- La proportion initiale est donnée par  $a_0 = 0.05$ ,  $b_0 = 0.9$ ,  $c_0 = 0.05$ .
- **Problème :** Déterminer  $a_{2015}$ ,  $b_{2015}$  et  $c_{2015}$ .

Génotype des enfants	Génotype des parents		
	$\{AA, AA\}$	$\{Aa, Aa\}$	$\{aa, aa\}$
$AA$	1	0.25	0
$Aa$	0	0.5	0
$aa$	0	0.25	1

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{4} b_{n-1}$$

$$b_n = \frac{1}{2} b_{n-1}$$

$$c_n = \frac{1}{4} b_{n-1} + c_{n-1}$$

### 8.12 Appendice: application de la diagonalisation à un problème de génétique



Donc le système est le suivant : donc si je pose  $a_n$  je veux savoir à la  $n$ -ième génération combien de roses rouges il y a. Je vois que, à chaque fois que j'avais une fleur rouge, alors, j'obtiens de nouveau, rouge. Donc j'aurais toutes les rouges de la génération précédente. Et puis, je vois qu'ici, j'obtiens un quart des fleurs qui étaient roses deviennent rouges après ce croisement. Donc, j'ai  $(1/4)b_{n-1}$ . Et puis aucune ici qui sort de ce croisement-là. Ensuite, des fleurs roses, il n'y en a aucune qui sort ici. Ici il y a la moitié de ce qui était rose avant, qui reste rose après le croisement. Et puis, il n'y a aucune qui vient de ce croisement-là. Et puis ensuite, blanches. Ici, il n'y a aucune blanche. Ici, il y a un quart de ce qui était rose avant. Et puis toutes celles qui étaient blanches avant restent blanches. Donc, ça c'est le système d'équations qu'on peut tirer de ce tableau de probabilités. Et puis maintenant, je réécris ce système d'équations sous forme matricielle.

Notes

Summary



On réécrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par exemple,  $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M \cdot M \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$



#### 8.12 Appendice: application de la diagonalisation à un problème de génétique



Voilà, on a  $(a_n, b_n, c_n)$  qui est égal à  $M$  fois le vecteur  $(a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1})$  où  $M$  est la matrice des coefficients du système d'équations que nous avons vu avant. Donc, on avait la première équation qui était  $a_{n-1} + 0,25 \cdot b_{n-1}$ . La deuxième équation était :  $0 \cdot a_{n-1} + 0,5 \cdot b_{n-1} + 0 \cdot c_{n-1}$ . Et puis, la troisième équation était :  $0 \cdot a_{n-1} + 0,25 \cdot b_{n-1} + c_{n-1}$ . Donc voilà, ça c'est le système d'équations écrit sous forme matricielle. Maintenant par exemple, on aura que  $(a_2, b_2, c_2)$ , donc après deux générations,  $(a_2, b_2, c_2) = M(a_1, b_1, c_1)$ . Et après il y a  $(a_1, b_1, c_1)$ , qu'on peut remplacer par  $M(a_0, b_0, c_0)$ . Donc on a  $M^2(a_0, b_0, c_0)$ . Et puis, ça se généralise, on peut montrer par une récurrence simple qu'en général on a :  $(a_n, b_n, c_n)$  égal à :  $M^n$  fois les proportions initiales.

Notes

Summary



3m 11s

On réécrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par exemple,  $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M \cdot M \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$

On montre que  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$  On souhaite calculer  $a_{2015}, b_{2015}, c_{2015}.$

Il faudrait calculer  $M^{2015}$  ! Astuce: On montre que  $M$  est diagonalisable. Il existe une matrice inversible  $P$  t.q.  $P^{-1}MP = D$ ,  $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & d_3 \end{pmatrix}$ .  $M = PDP^{-1}$ .  
 $M^n = (PDP^{-1})^n = P \underbrace{DP^{-1}PD^{-1}P^{-1} \dots P^{-1}PD^{-1}P^{-1}}_{D^n} = PD^nP^{-1}.$

#### 8.12 Appendice: application de la diagonalisation à un problème de génétique



Maintenant, ce qu'on souhaite trouver, c'est  $(a_{2015}, b_{2015}, c_{2015})$ , si on regarde cette formule-là, il faudrait pouvoir calculer  $M^{2015}$ , ce qui semble peu faisable. Donc il y a une astuce. D'abord on va montrer que  $M$  est diagonalisable, donc il existe une matrice inversible  $P$  tel que  $P^{-1}MP$  soit diagonale, ici égal à  $D$  qui est une matrice diagonale, avec  $d_1, d_2, d_3$  sur la diagonale et des zéros ailleurs. Et ensuite, en quoi ça nous aide ? Cela veut dire que  $M$  est égale à :  $PDP^{-1}$ , donc je multiplie à gauche ici par  $P$  et à droite par  $P^{-1}$  et j'obtiens cette équation-là. Donc  $M^n$  est égale à  $(PDP^{-1})^n$ , ce qui veut dire multiplier la matrice  $PDP^{-1}$  avec elle-même  $n$  fois et puis on voit que tout ça se simplifie tout ça, ça devient les matrices identité Et puis à la fin, il me reste un  $P$  à gauche,  $D^n$ , et puis à droite un  $P^{-1}$ . Donc, en fait, pour calculer  $M^n$ , il faudrait calculer  $D^n$  et puis, multiplier par  $P$  et son inverse.

Notes

Summary





Pour calculer  $M^n$ , on calcule  $D^n$  ← facile car  $D$  est diagonale.

$$D^n = \begin{pmatrix} d_1^n & & 0 \\ & d_2^n & \\ 0 & & d_3^n \end{pmatrix}.$$

Diagonalisation de  $M$ :  $c_m(t) = -(t-1)^2(t-\frac{1}{2})$ . Valeurs propres de  $M$ :  $\lambda_1=1$  et  $\lambda_2=\frac{1}{2}$ .

$$E_1 = \left\{ (a, 0, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \dim E_1 = 2$$

#### 8.12 Appendice: application de la diagonalisation à un problème de génétique



Donc je redis ici : Pour calculer  $M^n$ , on calcule  $D^n$  et  $D^n$  est facile, ça c'est facile car  $D$  est diagonale. Donc,  $D^n$  a pour coefficients diagonaux  $D_1^n$ ,  $D_2^n$  et  $D_3^n$ , et zéro ailleurs. Ça c'est très facile. Puis ensuite, on va multiplier à gauche et à droite par  $P$  et son inverse. Donc maintenant, comme j'aimerais vraiment avoir la réponse, je vais le faire. D'abord, je devrais faire la diagonalisation de  $M$  pour trouver le  $D$  et puis là, je vais sauter quelques étapes parce qu'on a fait beaucoup ça. Donc je vous laisse calculer que :  $c_m(t)$  donc le polynôme caractéristique de  $M$ , c'est  $c_m(t) = -(t-1)^2(t-\frac{1}{2})$  et puis donc, les valeurs propres sont 1 et  $\frac{1}{2}$ . Ensuite, je calcule l'espace propre pour la valeur propre 1 et je trouve que c'est le sous-espace des vecteurs de la forme  $(a, 0, b)$  où  $a$  et  $b$  sont les nombres réels, donc c'est de dimension deux. Donc, on voit qu'on aura une matrice effectivement diagonalisable parce que la multiplicité géométrique, c'est deux, et la multiplicité algébrique c'est également deux.

Notes

Summary



Pour calculer  $M^n$ , on calcule  $D^n$  ← facile car  $D$  est diagonale.

$$D^n = \begin{pmatrix} d_1^n & & 0 \\ & d_2^n & \\ 0 & & d_3^n \end{pmatrix}.$$

Diagonalisation de  $M$ :  $\chi_M(t) = -(t-1)^2(t-\frac{1}{2})$ . Valeurs propres de  $M$ :  $\lambda_1=1$  et  $\lambda_2=\frac{1}{2}$ .

$E_1 = \{(a, 0, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$   $\dim E_1 = 2$ , de base  $((1, 0, 0), (0, 0, 1))$

$E_{\frac{1}{2}} = \{(a, -2a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$   $\dim E_{\frac{1}{2}} = 1$ , de base  $((1, -2, 1))$ .

$B = ((1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, -2, 1))$ . Posons  $P = (id)_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  où  $C$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

$$P^{-1}MP = (id)_{BC} M_C (id)_{CB} = M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

#### 8.12 Appendice: application de la diagonalisation à un problème de génétique



Donc je me fixe déjà une base.  $((1, 0, 0), (0, 0, 1))$ . Et puis, l'espace propre pour la valeur propre  $\frac{1}{2}$ , vous pouvez calculer, c'est tous les vecteurs de la forme  $(a, -2a, a)$  où  $a$  parcourt les nombres réels, donc ici la dimension, on savait déjà que ce sera un. et puis comme base, je prends  $((1, -2, 1))$ . Alors, donc j'ai la base de vecteurs propres de l'espace  $\mathbb{R}^3$  et puis, je pose  $B = ((1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, -2, 1))$ , et puis, posons  $P$ , la matrice de changement de base de  $B$  vers  $C$  donc j'écris  $B$  en termes que la base  $C$  mais c'est déjà fait, où  $C$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Alors, à ce moment-là, on sait que si l'on écrit :  $P^{-1}MP$ , ça c'est l'identité dans l'autre sens.  $M$  qui a été créée par rapport à la base  $C$ , sans que je le dise avant, et l'identité  $B$ , c'est dans ce sens-là, donc ça serait  $M$  écrit par rapport à la base  $B$ . Et puis ça c'est effectivement la matrice diagonale, où j'aurais des valeurs propres correspondant à ces vecteurs propres. Donc ça c'était la valeur propre 1, ici aussi la valeur propre 1 et la valeur propre  $\frac{1}{2}$ . Ce vecteur là. Je reprends cette information sur la prochaine slide.

Notes

Summary





**Rappel.** On a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix}$$

On calcule  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $M = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix} P^{-1}$ .

$M^{2015} = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (1/2)^{2015} \end{pmatrix} P^{-1}$ . Posons  $\alpha = (1/2)^{2015}$

#### 8.12 Appendice: application de la diagonalisation à un problème de génétique



Donc là, je rappelle ce que c'était la matrice  $M$ . Et ensuite le  $P$  que je viens de poser, et puis, justement  $P^{-1}MP$  sera cette matrice diagonale-là. Après il faudrait quand même calculer  $P$  inverse parce que, à la fin, je vais l'utiliser. On calcule  $P$  inverse, c'est-à-dire, je l'ai calculée, je vais juste vous la donner. On va vérifier que c'est correct. [voir écran] Donc c'est effectivement l'inverse de  $P$  et puis, on a que  $M$  est égale, donc, ça c'est la matrice diagonale donc si je mets  $P$  là et  $P$  inverse, c'est égale à  $P$  fois la matrice avec diagonale  $(1, 1, 1/2)$ , fois  $P$  inverse et donc  $M^{2015} = P \dots$  puis j'élève cette matrice-là à la puissance 2015 donc j'aurai 1, 1 et  $1/2$  à la puissance 2015. Puis à droite, la matrice  $P$  inverse. Maintenant posons  $\alpha = 1/2^{2015}$ . C'est tout petit, c'est très petit comme valeur, alors à ce moment-là, vous pouvez calculer que  $M^{2015}$  est égale à...

Notes

Summary



10m 09s

**Rappel.** On a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix}$$

On calcule  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $M = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix} P^{-1}$ .

$M^{2015} = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (1/2)^{2015} \end{pmatrix} P^{-1}$ .  $P_{\text{dom}} \alpha = (1/2)^{2015}$  (très petit)

$M^{2015} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 - 1/2\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1/2 - 1/2\alpha & 1 \end{pmatrix}$ .  $\begin{pmatrix} a_{2015} \\ b_{2015} \\ c_{2015} \end{pmatrix} = M^{2015} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^{2015} \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,9 \\ 0,05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 - 0,45\alpha \\ 0,9\alpha \\ 1/2 - 0,45\alpha \end{pmatrix}$ . Après 2015 générations, à peu près la moitié des fleurs sont rouges et la moitié sont blanches.



#### 8.12 Appendice: application de la diagonalisation à un problème de génétique

(donc j'ai fait les multiplications ici, je ne vais pas le faire devant vous) [voir écran] Ça veut dire que si je reprends l'équation, que j'avais au début, que  $a^{2015}$ ,  $b^{2015}$ ,  $c^{2015}$ , donc les proportions des fleurs, de différentes couleurs après 2015 générations est égal à :  $M^{2015} \cdot (a_0, b_0, c_0)$ , donc ça c'est les proportions des fleurs, de différentes couleurs au début, et puis, ici, on nous avait dit quelles étaient ces proportions au début, j'avais 0.05, 0.9, 0.05, ensuite, on fait la multiplication des matrices, alors, cette matrice-là, et puis on obtient :  $(1/2 - 0.45\alpha, 0.9\alpha, 1/2 - 0.45\alpha)$ . Maintenant, si vous pensez que le  $\alpha$  est très très petit, ici ce serait très peu, là aussi, et ça c'est une toute petite valeur, donc la tendance, c'est d'avoir la moitié des fleurs rouges et la moitié des fleurs blanches. Donc ça tend vers... Après 2015 générations, disons, à peu près, la moitié des fleurs sont rouges et la moitié sont blanches. Donc ça, c'est une jolie application de la diagonalisation des matrices, c'est que si on veut élever une matrice à une très haute puissance, et si cette matrice est diagonalisable, alors c'est tout à fait faisable de faire cette multiplication à une très haute puissance.

Notes

Summary

