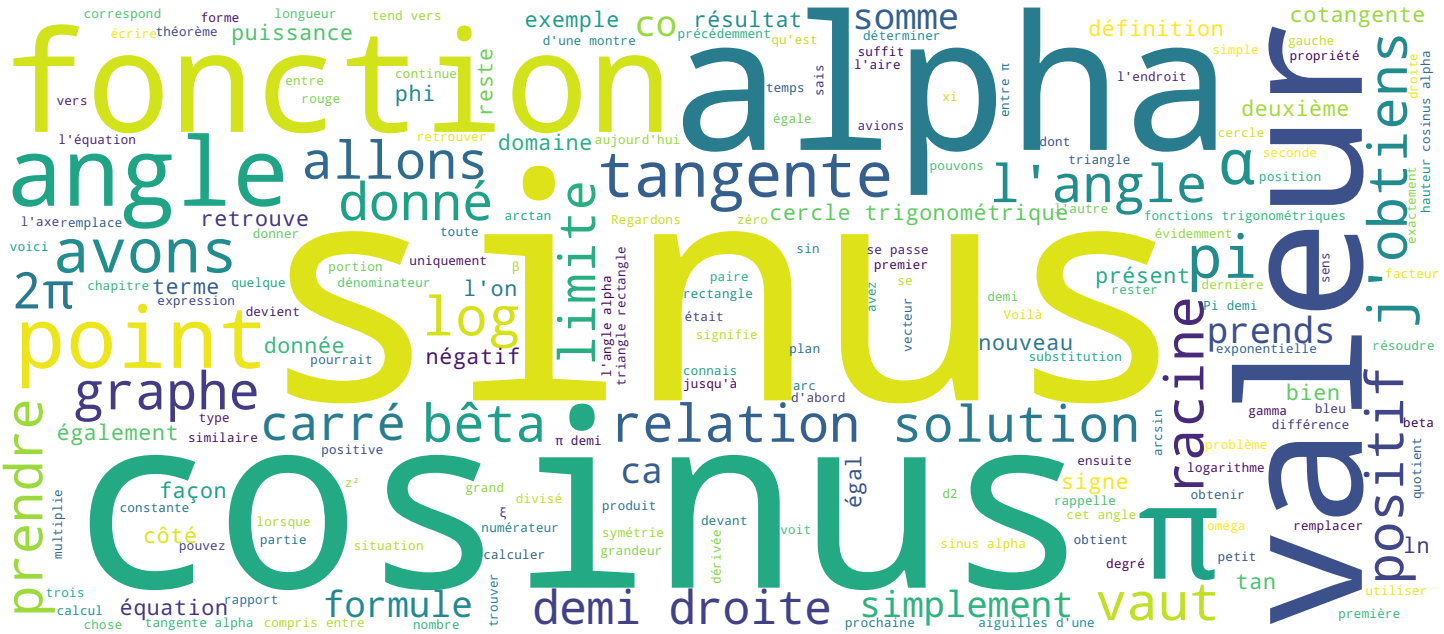
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

L'angle et sa mesure

1.1 L'angle

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

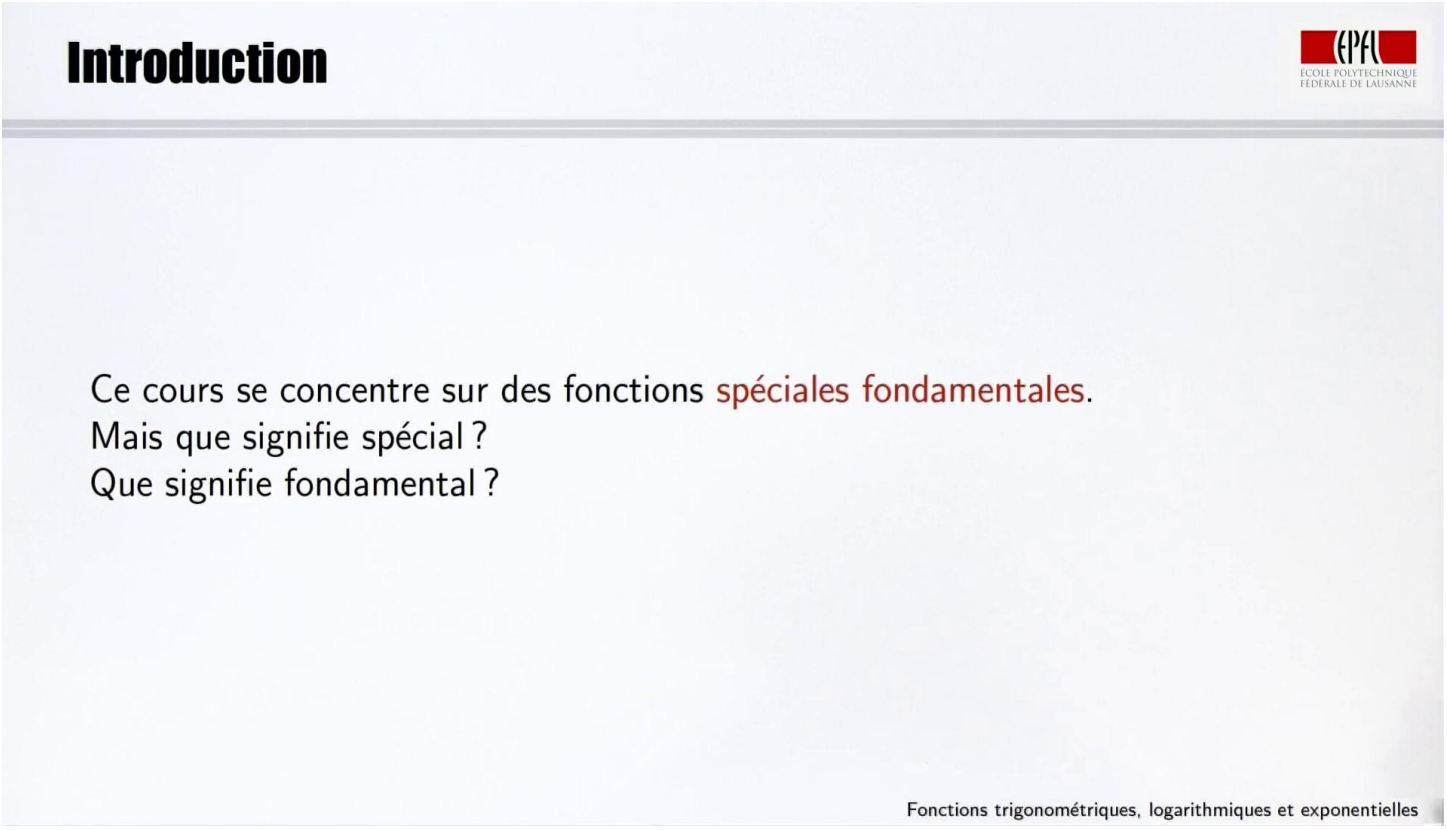
Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

Video

EPFL



Madame, Monsieur, Je vous souhaite la bienvenue au cours intitulé : "Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles." Mais, au fond, de quoi s'agit quand on parle de fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles ? On pourrait dire que, là, nous parlons de fonctions que l'on peut qualifier de "spéciales fondamentales". Clarifions quelques peu ces deux termes.

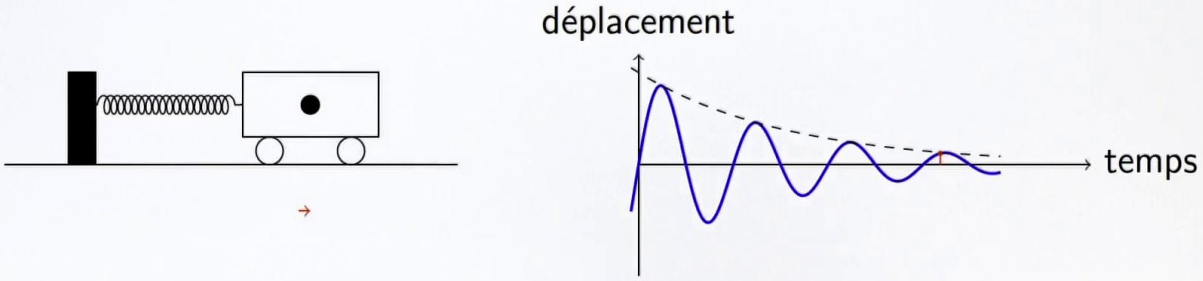
Notes

Summary

0m 04s

Introduction : Que signifie “fonction spéciale”

Fonctions avec des propriétés particulièrement adaptées à des applications.
Exemple : wagon qui se déplace (avec frottements) sur un plan horizontal tout en étant rattaché à un mur par un ressort :



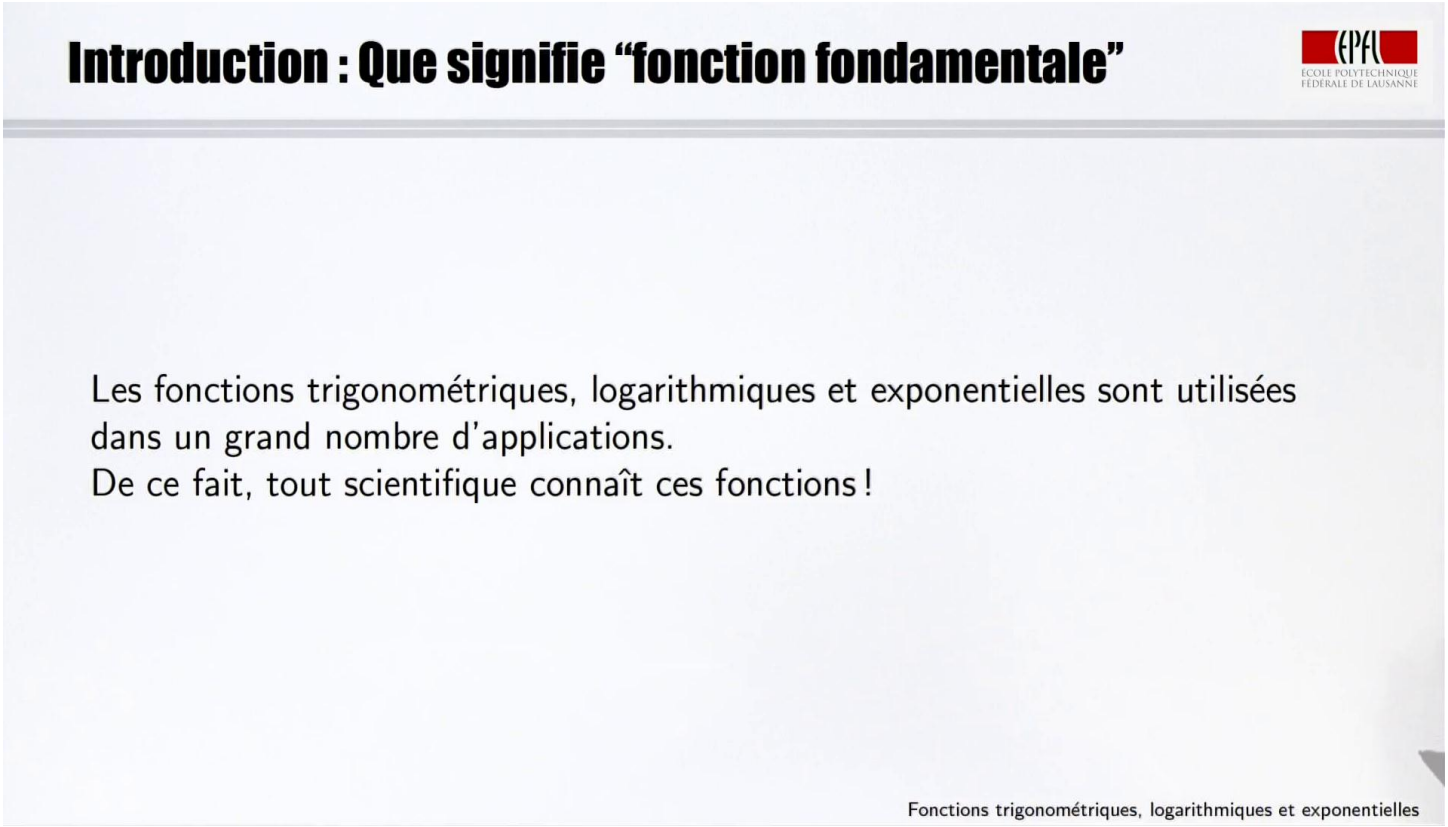
Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous dirons qu'une fonction est "spéciale" si elle a des propriétés particulièrement bien adaptées à des applications, que ce soit dans un domaine mathématique ou dans un domaine scientifique. A titre d'exemple, considérons un wagon qui se déplace sur un plan horizontal; il se déplace sans frottements, il est rattaché à un mur par un ressort. Et enregistrons le mouvement d'aller-retour de ce chariot par rapport à la position d'équilibre. On obtient ici le graphe d'une fonction et pour décrire ce graphe, on aura besoin de fonctions trigonométriques, d'autant bien que ces fonctions ne vont pas seulement donner le graphe qu'il nous fallait, ils vont également t'aider à comprendre le fonctionnement de ce système, de part leurs propriétés, notamment par des propriétés liées aux dérivées de ces fonctions. Alors, évidement, l'hypothèse du "sans frottements", elle est forte par rapport à un modèle concret : si l'on fait intervenir des frottements, le mouvement d'aller-retour se trouve amorti. On bouge de moins en moins avec le temps : ici, le mouvement a tendance à devenir de plus en plus petit. L'amplitude amortie ici va être décrite par une fonction exponentielle qui elle aussi permettra d'expliquer le mécanisme derrière cet amortissement. Le mouvement final, ici, sera décrit par une combinaison de fonctions trigonométriques et exponentielles.

Notes

Summary

0m 27s

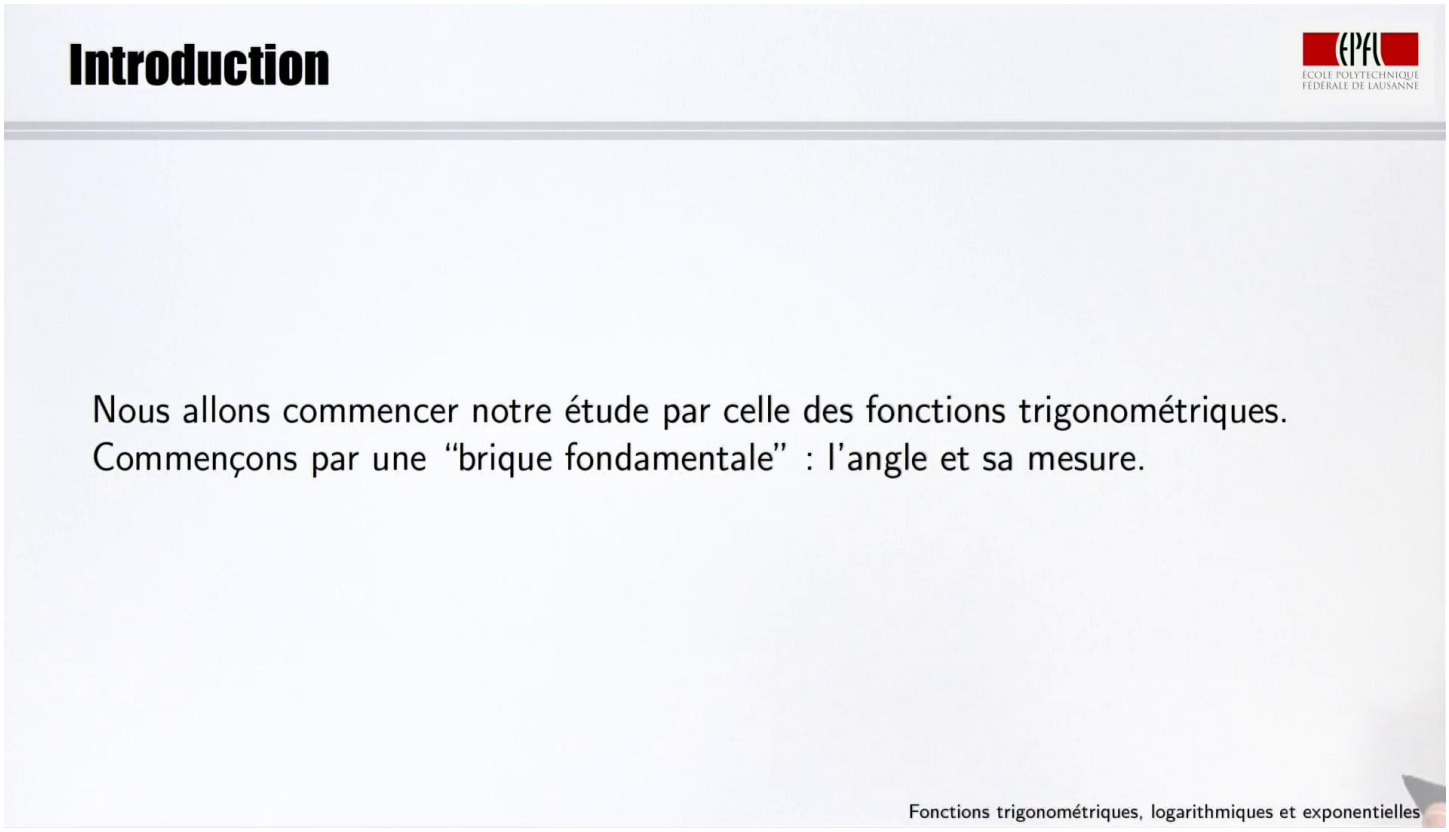


Les fonctions que nous allons présenter ne sont pas seulement "spéciales", elles sont aussi "fondamentales". Pourquoi ? Elles sont fondamentales car utilisées dans un grand nombre d'applications, si bien que tout scientifique connait ces fonctions.

Notes

Summary

2m 13s



Nous verrons d'abord les fonctions trigonométriques; dans une deuxième phase, nous allons parler de fonctions logarithmiques et exponentielles. Pour l'étude des fonctions trigonométriques, nous aurons besoin d'une "brique fondamentale" qui est l'angle et sa mesure.

Notes

Summary

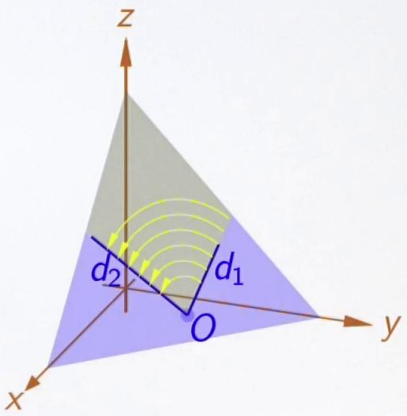
2m 28s

Notion d'angle

Un angle est défini par deux demi-droites d_1 et d_2 issues d'un même point O.

Définition

L'angle défini par d_1 et d_2 est la portion de plan limitée par les deux demi-droites d_1 et d_2 (dans le plan passant par ces deux demi-droites).



Un angle est défini par deux demi-droites, que nous nommons d1 et d2, issues d'un même point. Ici, nous avons la situation dans l'espace : on peut avoir la figure correspondante dans le plan, tout à fait. On a le point O, on a les deux demi-droites. Nous dirons que l'angle défini par d1 et d2 est la portion de plan limité par ces deux demi-droites. Donc, la portion de plan limité par ces deux demi-droites, c'est la partie grise ici.

Notes

Summary

2m 45s

Remarques sur la notion d'angle

- Si les deux demi-droites d_1 et d_2 coïncident, alors on dira que la portion de plan limitée par d_1 et d_2 est la demi-droite $d_1 = d_2$. Mais on pourrait aussi prendre tout le plan !

Notre définition nécessite quelques remarques : la première remarque concerne le cas où les deux demi-droites, d1 et d2, se superposent. Où est alors la portion de plan limité ? Une première réponse possible serait de dire que la portion limitée est la demi-droite elle-même; si je me promène le long de cette demi-droite, je ne transgresse jamais la limitation d1 et d2. Mais on peut tout à fait donner une deuxième réponse, on peut dire "Non, non, non, c'est la partie extérieure. Tant que je bouge dans cette partie, là aussi je ne transgresse pas les limites d1 et d2.

Notes

Summary

3m 16s

Remarques sur la notion d'angle

- Si les deux demi-droites d_1 et d_2 coïncident, alors on dira que la portion de plan limitée par d_1 et d_2 est la demi-droite $d_1 = d_2$. Mais on pourrait aussi prendre tout le plan !
- Pour tout angle, il existe en effet deux portions de plan limitées par les demi-droites d_1 et d_2.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Cette ambiguïté, on l'a toujours : ici, on a d1 et d2 qui cette fois-ci, ne se superposent pas, ils ne coïncident pas, mais, on a deux portions de plan qui sont ici indiqués par des coloris différents.

Notes

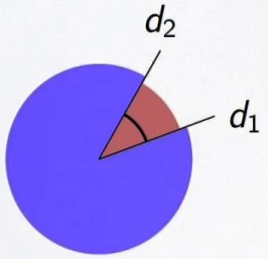
Summary

3m 53s

Remarques sur la notion d'angle

- Si les deux demi-droites d_1 et d_2 coïncident, alors on dira que la portion de plan limitée par d_1 et d_2 est la demi-droite $d_1 = d_2$. Mais on pourrait aussi prendre tout le plan !
- Pour tout angle, il existe en effet deux portions de plan limitées par les demi-droites d_1 et d_2.

Il y a ambiguïté sur le choix de la portion. On lève cette ambiguïté en indiquant dans un dessin le choix fait.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

On peut lever l'ambiguïté dans le dessin, nous l'avons fait ici avec un arc de cercle que nous mettons sur la portion que nous voulons considérer.

Notes

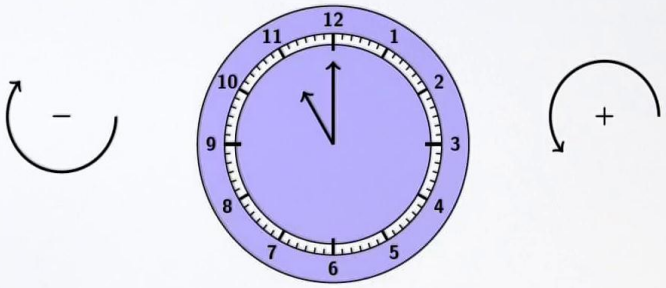
Summary

4m 05s

Sens de rotation dans le plan

Dans le plan, un mouvement de rotation va

- dans le sens positif, s'il va dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, et
- dans le sens négatif, s'il va dans le sens des aiguilles d'une montre.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Introduisons à présent une deuxième notion fondamentale, c'est celle du sens de rotation dans le plan. Pour le faire, nous allons placer une montre dans le plan, une montre usuelle, et nous allons dire que nous avons un sens de rotation positif, comme indiqué ici, si nous tournons en sens contraire des aiguilles d'une montre; et nous allons parler d'un sens négatif ici, si nous tournons dans le sens des aiguilles d'une montre.

Notes

Summary

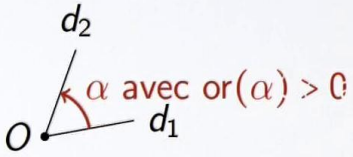
4m 15s

Notion d'angle orienté dans le plan

Définition

On dit que l'angle α formé par deux demi-droites d_1 et d_2 du plan est un angle orienté positif si on considère la portion du plan balayée lorsqu'on ramène d_1 sur d_2, par une rotation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On note cet angle orienté

$$\alpha = \measuredangle(d_1, d_2) \quad \text{avec} \quad \text{or}(\alpha) > 0.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous pouvons à présent marier ces deux concepts, celui de l'angle et celui du sens d'orientation, et introduire une notion qu'on qualifie d'angle orienté.

Notes

Summary

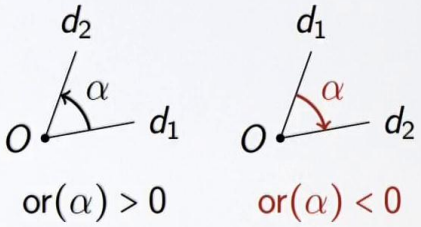
4m 46s

Notion d'angle orienté dans le plan

Définition

Si on considère la portion du plan balayée lorsqu'on ramène d_1 sur d_2, par une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre, on parlera d'un angle orienté négatif et on notera

$$\alpha = \measuredangle(d_1, d_2) \quad \text{avec} \quad \text{or}(\alpha) < 0.$$



Si $d_1 = d_2$ et si on choisit cette même demi-droite comme portion de plan on posera $\text{or}(\alpha) = 0$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Ces angles, on les dénomme très souvent par une lettre grecque, α ici, on a les deux demi-droites issues du point commun O, et on va dire qu'on considère l'angle orienté positif si l'on considère la portion du plan balayé lorsque l'on ramène d1 sur d2 par une rotation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On va noter ceci avec α = angle (d1, d2), l'ordre joue un rôle, je vais tourner d1 sur d2, et ici avec l'orientation, je dis que je tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On peut tout aussi bien parler d'une angle orienté négatif. On utilise la notation α et l'angle d1 vers d2, avec orientation négative : cette fois-ci, on va tourner d1 sur d2 dans le sens des aiguilles d'une montre. Notons que, si les deux demi-droites d1 et d2 coïncident, et si l'on fait le choix de prendre comme portion de plan cette demi-droite elle-même, alors on dira que l'orientation de cet angle est nul.

Notes

Summary

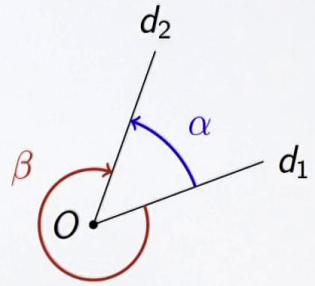
4m 57s

Ambiguïté sur le choix de l'angle levée

Si on considère l'angle $\measuredangle(d_1, d_2)$ comme portion de plan balayée en ramenant la demi-droite d_1 sur la demi-droite d_2, il existe toujours (sauf si $d_1 = d_2$)

- un angle α orienté positif et
- un angle β orienté négatif

Cela lève, du moins partiellement, l'ambiguïté sur le choix de l'angle.



$\text{or}(\alpha) > 0$, $\text{or}(\beta) < 0$

$\alpha = \measuredangle(d_1, d_2)$ avec $\text{or}(\alpha) > 0$
$\beta = \measuredangle(d_1, d_2)$ avec $\text{or}(\alpha) < 0$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

L'ambiguïté sur le choix de l'angle dont nous avons parlé précédemment, se trouve quelque peu levée à présent : en effet, si l'on prend la situation d1 et d2, partant depuis O, on a toujours un angle orienté positif et un angle orienté négatif. Cela va lever en quelque sorte l'ambiguïté sur ce choix.

Notes

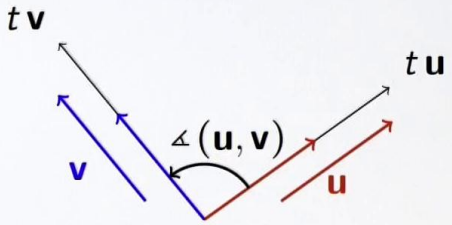
Summary

6m 08s

Notion d'angle orienté entre deux vecteurs du plan

Considérons deux vecteurs **u** et **v** du plan.
On conviendra de considérer comme angle entre **u** et **v** l'angle orienté entre les deux demi-droites

$t\,\mathbf{u} \quad (t \geq 0)$ et $t\,\mathbf{v} \quad (t \geq 0)$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Introduisons, pour finir, une notion d'angle orienté entre deux vecteurs du plan : si je considère un vecteur u et un deuxième vecteur v dans le plan, ils sont ici, u et v, on peut toujours considérer deux demi-droites. La première de ces demi-droites aura comme équation t x u, elle part donc depuis l'origine; la deuxième demi-droite, t x v, une demi-droite qui part aussi depuis l'origine, et l'angle entre ces deux demi-droites sera l'angle entre les deux vecteurs.

Notes

Summary

6m 32s

La notion d'angle

Ce que nous avons appris :

- L'angle comme portion de plan ;
- L'orientation d'un angle.

Prochaine étape :
Comment mesurer des angles.

Faisons le bilan de cette première séance : ce que nous avons appris, c'est l'angle comme portion de plan; nous aurons appris ce qu'est l'orientation d'un angle. Ce que nous allons faire la prochaine fois, ce sera de nous intéresser à comment mesure un angle. Je vous remercie pour votre attention, et vous souhaite une bonne journée. Merci.

Notes

Summary

7m 07s