ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

L'angle et sa mesure

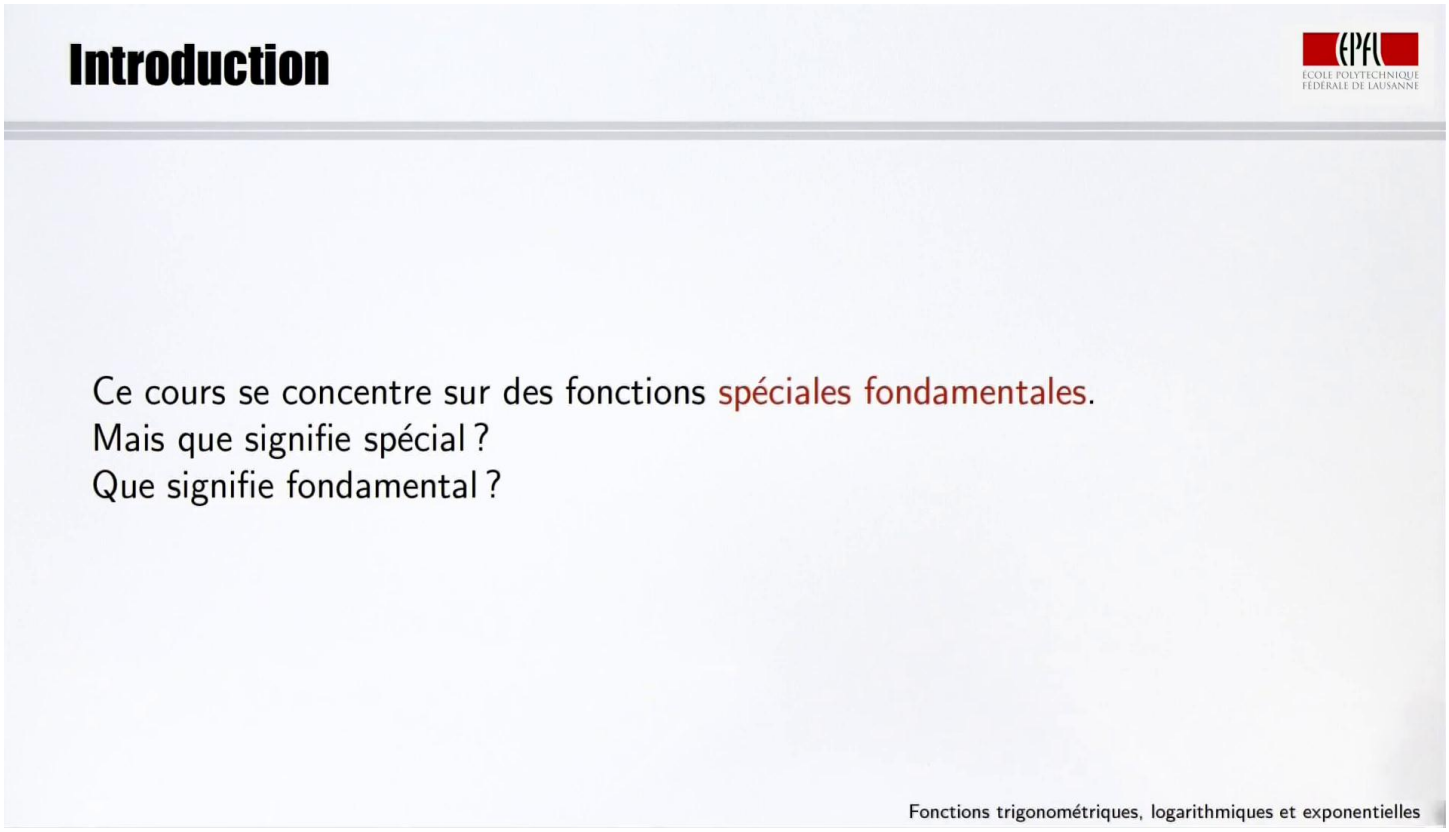
1.1 L'angle

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

EPFL



Meine Damen und Herren, Ich lade Sie ein zum folgenden Kurs: "Trigonometrische, logarithmische und exponentielle Funktionen." Aber zuerst: worum handelt es sich wenn wir über trigonometrische, logarithmische und exponentielle Funktionen sprechen? Man kann sagen, dass von Funktionen die Rede ist, die als "elementare spezielle" Funktionen bezeichnet werden. Was bedeuten diese beiden Begriffe?

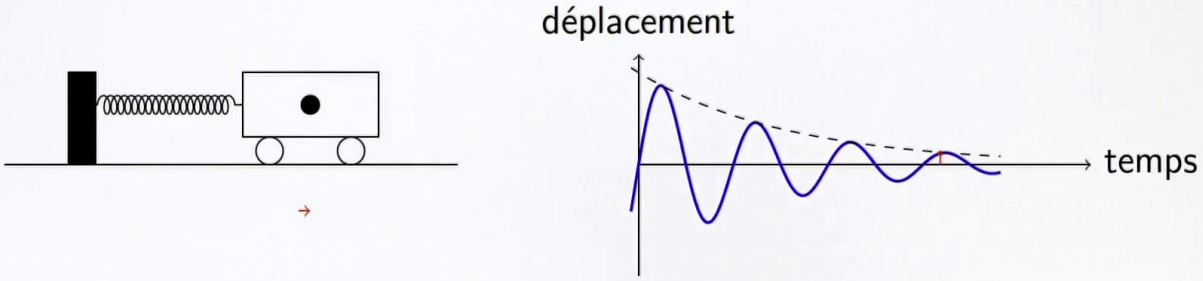
Notes

Summary

0m 04s

Introduction : Que signifie “fonction spéciale”

Fonctions avec des propriétés particulièrement adaptées à des applications.
Exemple : wagon qui se déplace (avec frottements) sur un plan horizontal tout en étant rattaché à un mur par un ressort :



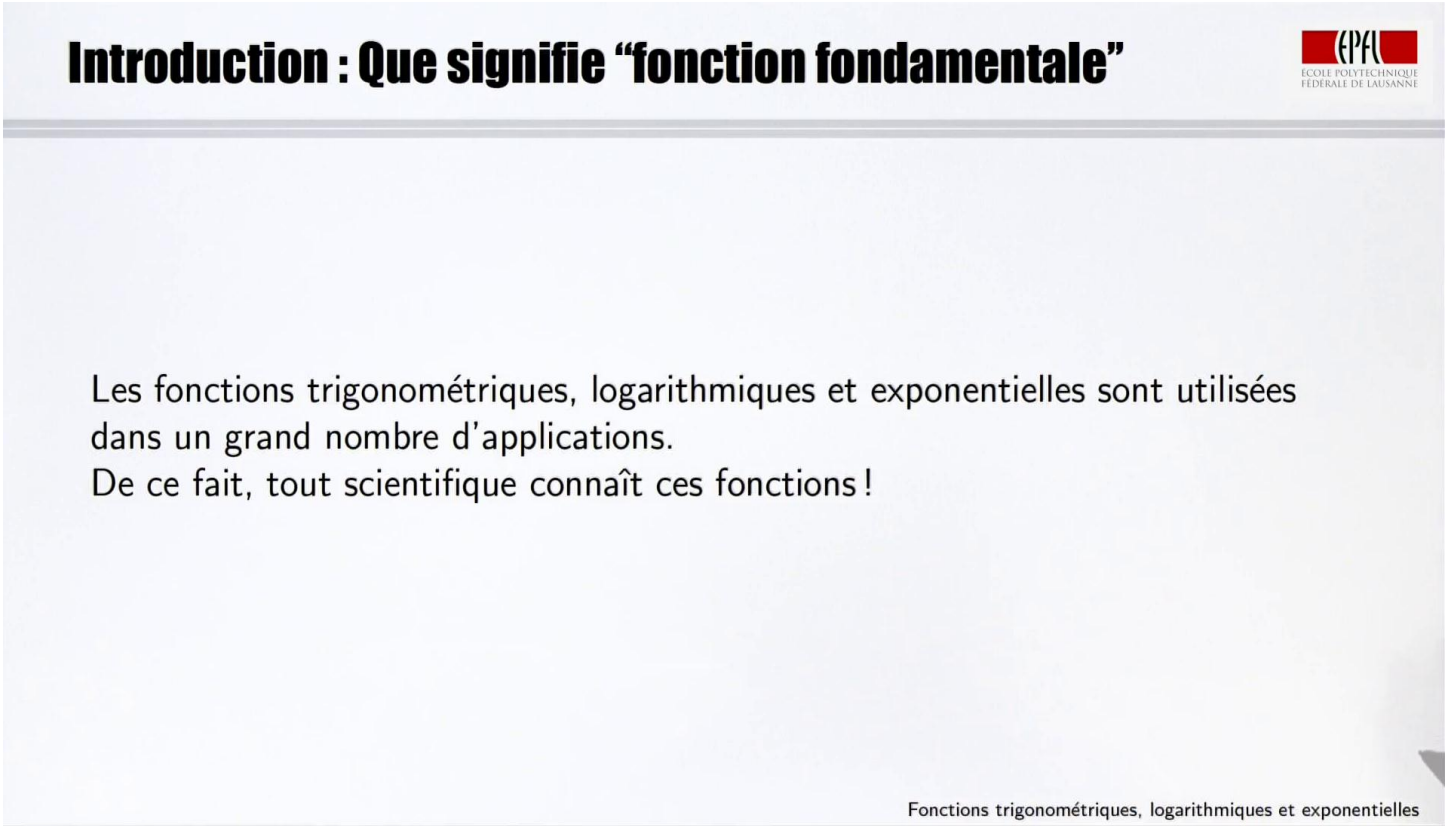
Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Man sagt, eine Funktion ist speziell wenn sie Eigenschaften hat, die man gut anwenden kann, sei es in der Mathematik oder in der Wissenschaft allgemein. Ein Beispiel: es gibt einen Waggon, der sich horizontal bewegt; er fährt ohne Reibung und ist durch eine Feder mit einer Mauer verbunden. Nun zeichnen wir die Bewegungen dieses Waggons auf, und zwar in Bezug auf die Gleichgewichtsposition. Wir erhalten den Graph einer Funktion und um ihn zu beschreiben, brauchen wir trigonometrische Funktionen, aber diese Funktionen werden uns nicht nur den Funktionsgraph geben, sie werden uns ebenfalls helfen zu verstehen, wie dieses System funktioniert, sowie seine Eigenschaften zu erkennen, insbesondere durch die Eigenschaften der Ableitungen dieser Funktionen. Also ist die "reibungslose" Hypothese stark mit einem konkreten Modell verbunden: wenn Reibungen auftreten, werden die Hin- und Rückbewegungen gedämpft sein. Der Waggon bewegt sich mit der Zeit immer weniger: hier hat die Bewegung die Tendenz, dass sie immer geringer wird. Die gedämpfte Schwingung wird durch eine exponentielle Funktion beschrieben mit der man auch den Mechanismus dieser Dämpfung erklären kann. Die Endbewegung wird hier von einer Verbindung trigonometrischer und exponentieller Funktionen beschrieben.

Notes

Summary

0m 27s



Die Funktionen, die wir vorstellen sind nicht nur "speziell". Sie sind auch "elementar". Wieso? Sie sind elementar weil sie in vielen Bereichen verwendet werden. Und jeder Wissenschaftler kennt diese Funktionen.

Notes

Summary

2m 13s

Introduction

Nous allons commencer notre étude par celle des fonctions trigonométriques.
Commençons par une “brique fondamentale” : l’angle et sa mesure.

Zuerst schauen wir uns die trigonometrischen Funktionen an, im zweiten Teil werden wir über logarithmische und exponentielle Funktionen sprechen Um über trigonometrische Funktionen zu lernen, brauchen wir etwas Grundwissen über den Winkel und sein Maß.

Notes

Summary

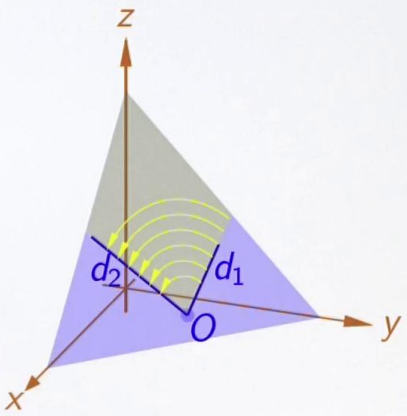
2m 28s

Notion d'angle

Un angle est défini par deux demi-droites d_1 et d_2 issues d'un même point O.

Définition

L'angle défini par d_1 et d_2 est la portion de plan limitée par les deux demi-droites d_1 et d_2 (dans le plan passant par ces deux demi-droites).



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Ein Winkel wird durch zwei Halbgeraden festgelegt, die wir hier als d1 und d2 bezeichnen. Sie beginnen in demselben Punkt. Wir haben hier diese Situation im Raum: man kann die passende Figur auf der Ebene haben. Es gibt den Punkt O und zwei Halbgeraden. Wir sagen, dass der von d1 und d2 festgelegte Winkel der von den zwei Halbgeraden eingegrenzte Teil der Ebene ist. Dieser eingegrenzte Teil der Ebene ist also dieser graue Bereich.

Notes

Summary

2m 45s

Remarques sur la notion d'angle

- Si les deux demi-droites d_1 et d_2 coïncident, alors on dira que la portion de plan limitée par d_1 et d_2 est la demi-droite $d_1 = d_2$. Mais on pourrait aussi prendre tout le plan !

Unsere Definition bedarf einiger Bemerkungen: die erste Bemerkung betrifft den Fall wo die Halbgeraden d1 und d2 sich überlagern. Wo ist also der beschränkte Teil der Ebene? Die erste mögliche Antwort wäre, man würde sagen, dass der beschränkte Teil die Halbgerade selbst ist; wenn ich entlang dieser Halbgeraden spaziere, durchquere ich nie die Beschränkung d1 und d2. Man kann aber auch eine zweite Antwort geben, Man kann sagen "nein, nein, nein" es ist der äußere Teil. Solange ich mich in diesem Bereich bewege, durchquere ich die Beschränkung d1 und d2 ebenfalls nicht.

Notes

Summary

3m 16s

Remarques sur la notion d'angle

- Si les deux demi-droites d_1 et d_2 coïncident, alors on dira que la portion de plan limitée par d_1 et d_2 est la demi-droite $d_1 = d_2$. Mais on pourrait aussi prendre tout le plan !
- Pour tout angle, il existe en effet deux portions de plan limitées par les demi-droites d_1 et d_2.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Es gibt diese zwei Möglichkeiten Hier haben wir d1 und d2, die sich nicht überlagern, sie sind nicht deckungsgleich, aber es gibt zwei Bereiche der Ebene, die durch verschiedene Farben gekennzeichnet sind.

Notes

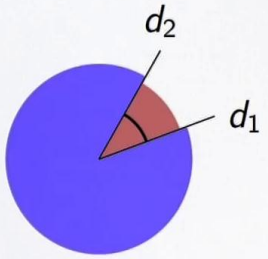
Summary

3m 53s

Remarques sur la notion d'angle

- Si les deux demi-droites d_1 et d_2 coïncident, alors on dira que la portion de plan limitée par d_1 et d_2 est la demi-droite $d_1 = d_2$. Mais on pourrait aussi prendre tout le plan !
- Pour tout angle, il existe en effet deux portions de plan limitées par les demi-droites d_1 et d_2.

Il y a ambiguïté sur le choix de la portion. On lève cette ambiguïté en indiquant dans un dessin le choix fait.



Wir können die Zweideutigkeit aufheben wie hier mit einem Kreisbogen, der sich auf dem Abschnitt wiederfindet, den wir berücksichtigen wollen.

Notes

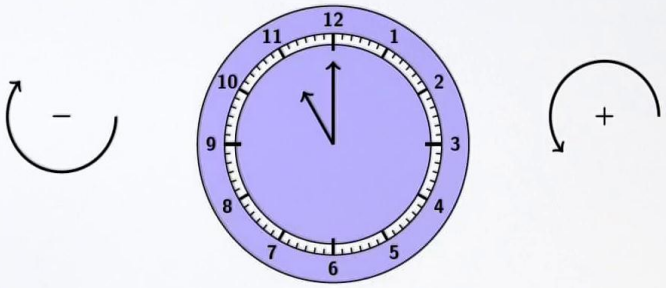
Summary

4m 05s

Sens de rotation dans le plan

Dans le plan, un mouvement de rotation va

- dans le sens positif, s'il va dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, et
- dans le sens négatif, s'il va dans le sens des aiguilles d'une montre.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Führen wir an dieser Stelle einen zweiten Grundbegriff ein, den Begriff der Drehrichtung in der Ebene. Um dies zu tun, platzieren wir eine Uhr in der Ebene, eine gewöhnliche Uhr, und wir sagen, dass wir eine positive Drehrichtung haben, wie hier angezeigt, wenn wir gegen den Uhrzeigersinn drehen; und wir haben eine negative Drehrichtung wenn wir im Uhrzeigersinn drehen.

Notes

Summary

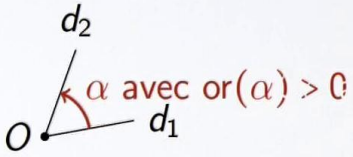
4m 15s

Notion d'angle orienté dans le plan

Définition

On dit que l'angle α formé par deux demi-droites d_1 et d_2 du plan est un angle orienté positif si on considère la portion du plan balayée lorsqu'on ramène d_1 sur d_2, par une rotation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On note cet angle orienté

$$\alpha = \measuredangle(d_1, d_2) \quad \text{avec} \quad \text{or}(\alpha) > 0.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir können hier diese beiden Konzepte verbinden, den Winkel und die Ausrichtung und einen Begriff einführen, mit dem man orientierte Winkel beschreibt. Diese Winkel werden sehr oft mit griechischen Buchstaben benannt. hier: α.

Notes

Summary

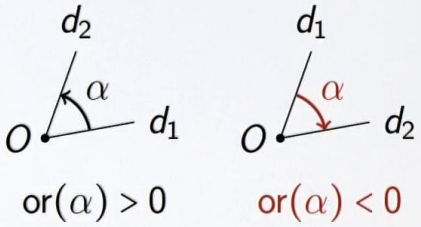
4m 46s

Notion d'angle orienté dans le plan

Définition

Si on considère la portion du plan balayée lorsqu'on ramène d_1 sur d_2, par une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre, on parlera d'un angle orienté négatif et on notera

$$\alpha = \measuredangle(d_1, d_2) \quad \text{avec} \quad \text{or}(\alpha) < 0.$$



Si $d_1 = d_2$ et si on choisit cette même demi-droite comme portion de plan on posera $\text{or}(\alpha) = 0$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Es gibt die zwei Halbgeraden, die denselben Ausgangspunkt O haben und wir bezeichnen nun den Winkel als positiv orientiert, wenn man den Teil der Ebene berücksichtigt während d1 auf d2 aufgelegt wird und zwar mittels einer Rotation gegen den Uhrzeigersinn. Wir notieren das mit α = Winkel (d1, d2), die Reihenfolge ist wichtig, wenn ich d1 in Richtung d2 drehe, und hier mit der Ausrichtung, sage ich, dass ich gegen den Uhrzeigersinn drehe. Man kann ebenfalls von einer negativen Winkelorientierung sprechen. Es wird die Schreibweise α und der Winkel d1 in Richtung d2 verwendet, mit einer negativen Ausrichtung: diesmal wird d1 in Richtung d2 gedreht, gegen den Uhrzeigersinn Wir bemerken, dass die zwei Halbgeraden d1 und d2 deckungsgleich sind. Und wenn wir die Wahl treffen und diese Halbgerade selbst als Teil der Ebene betrachten, sagen wir, dass die Ausrichtung des Winkels 0 ist.

Notes

Summary

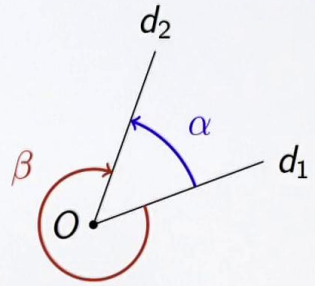
5m 02s

Ambiguïté sur le choix de l'angle levée

Si on considère l'angle $\measuredangle(d_1, d_2)$ comme portion de plan balayée en ramenant la demi-droite d_1 sur la demi-droite d_2, il existe toujours (sauf si $d_1 = d_2$)

- un angle α orienté positif et
- un angle β orienté négatif

Cela lève, du moins partiellement, l'ambiguïté sur le choix de l'angle.



$\text{or}(\alpha) > 0$, $\text{or}(\beta) < 0$

$\alpha = \measuredangle(d_1, d_2)$ avec $\text{or}(\alpha) > 0$
$\beta = \measuredangle(d_1, d_2)$ avec $\text{or}(\alpha) < 0$

Die zwei Möglichkeiten der Winkelwahl, von denen wir gesprochen haben, ist nun ein bisschen klarer geworden: Wenn wir nämlich die Situation d1 und d2 nehmen, die vom Punkt O ausgehen, gibt es stets einen positiv orientierten und einen negativ orientierten Winkel. Das hebt etwas die eingangs besprochene Zweideutigkeit auf.

Notes

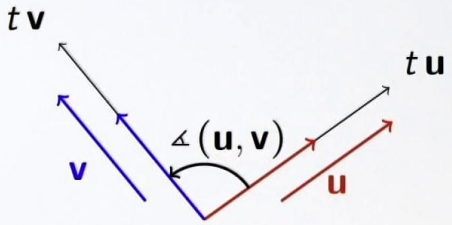
Summary

6m 08s

Notion d'angle orienté entre deux vecteurs du plan

Considérons deux vecteurs **u** et **v** du plan.
On conviendra de considérer comme angle entre **u** et **v** l'angle orienté entre les deux demi-droites

$t\,\mathbf{u} \quad (t \geq 0)$ et $t\,\mathbf{v} \quad (t \geq 0)$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Abschließend führen wir den Begriff des Winkels ein, der zwischen zwei Vektoren orientiert ist: wenn ich einen Vektor u und einen zweiten Vektor v in der Ebene nehme, sie sind hier: u und v, kann man immer zwei Halbgeraden berücksichtigen. Die erste von ihnen wird als Gleichung t x u haben, sie fängt beim Ursprung an; die zweite Halbgerade, t x v, fängt ebenfalls beim Ursprung an und der Winkel zwischen den Halbgeraden wird der Winkel zwischen den 2 Vektoren sein.

Notes

Summary

6m 32s

La notion d'angle

Ce que nous avons appris :

- L'angle comme portion de plan ;
- L'orientation d'un angle.

Prochaine étape :
Comment mesurer des angles.

Fassen wir also diese erste Lektion zusammen: was wir gelernt haben: der Winkel als Teil der Ebene, Wir wissen, was die Orientierung eines Winkels ist. Beim nächsten Mal werden wir lernen, wie man einen Winkel messen kann. Ich bedanke mich für Ihre Aufmerksamkeit und wünsche Ihnen einen schönen Tag. Danke.

Notes

Summary

7m 07s