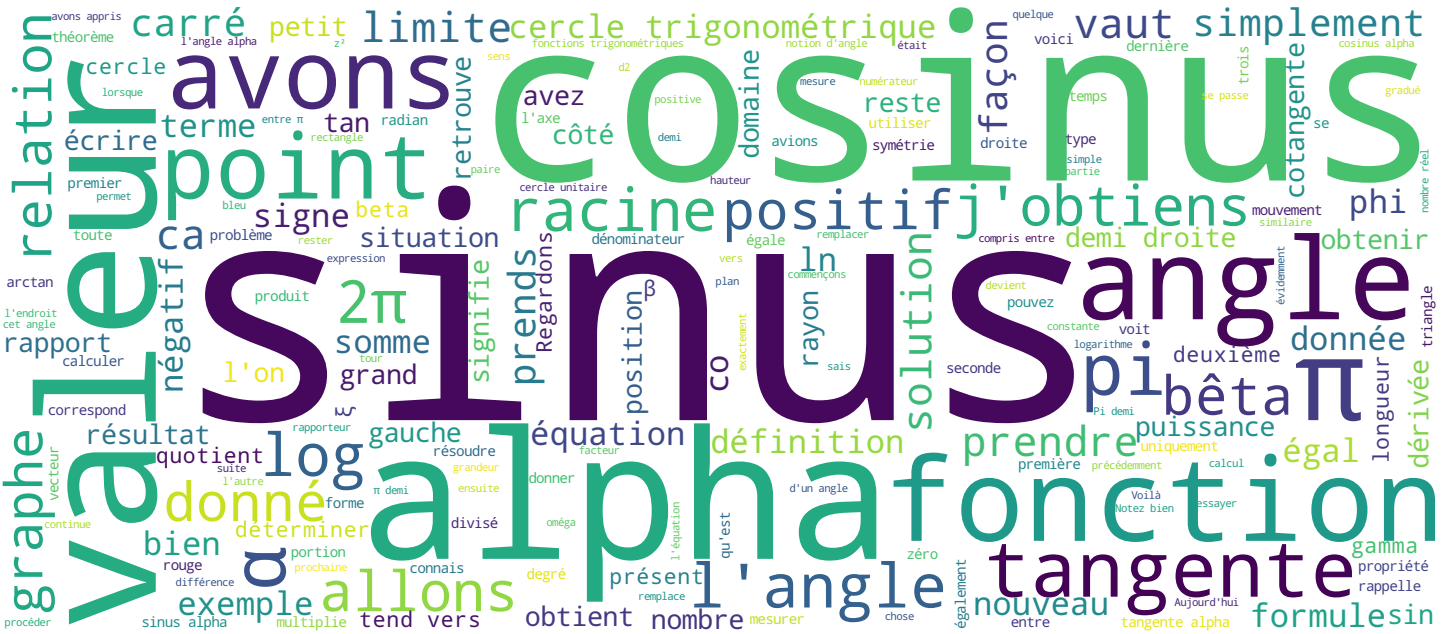
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

L'angle et sa mesure

1.2 La mesure de l'angle, l'angle trigonométrique

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

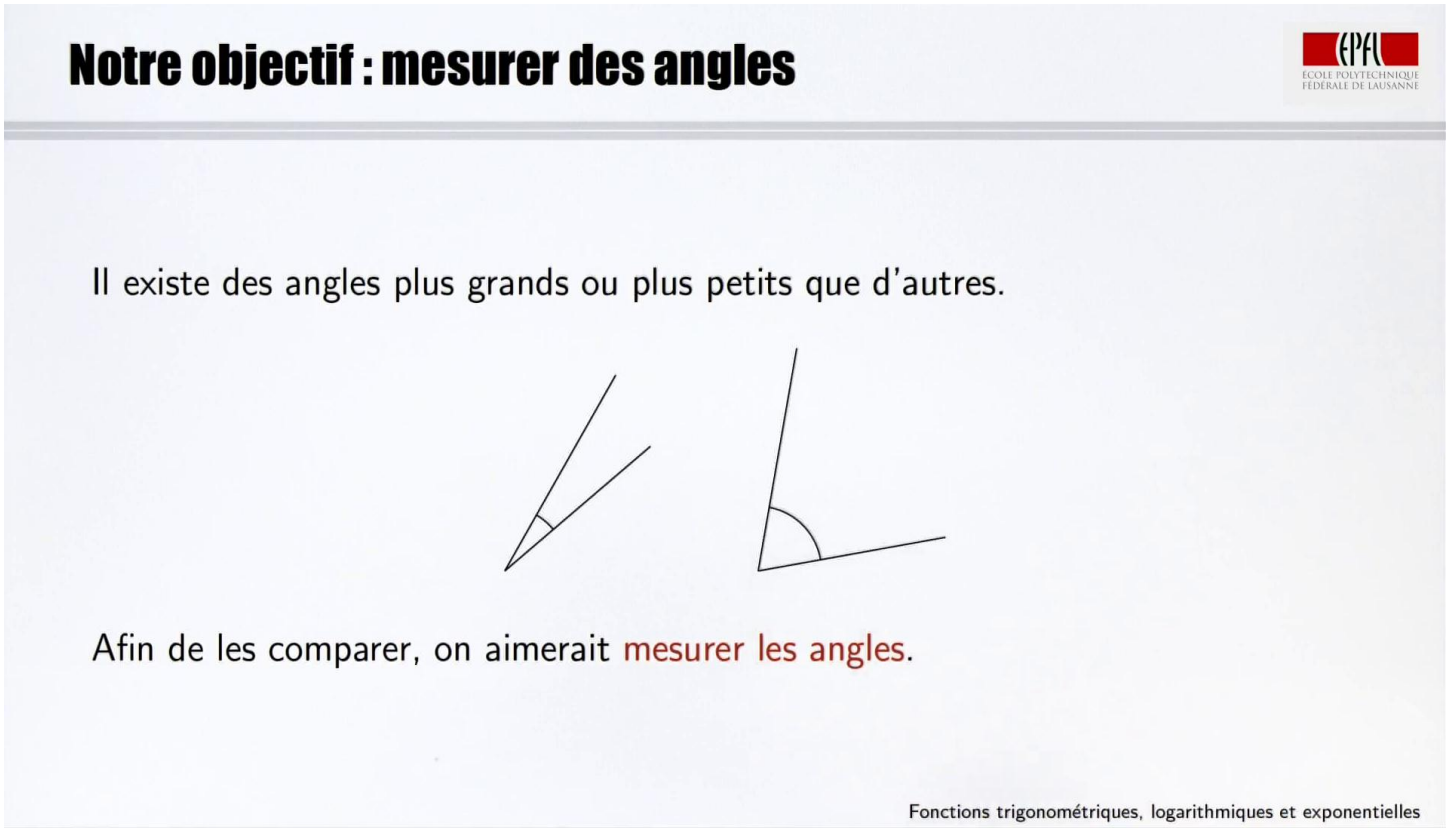
Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

Video

EPFL



Madame, monsieur. Je vous souhaite la bienvenue au cours intitulé «Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles». La dernière fois, nous avions parlé de la notion d'angle. Nous avons parlé aussi de la notion d'angle orienté. Aujourd'hui, nous allons nous intéresser à la façon de mesurer un angle. Nous allons également généraliser cette notion d'angle. Si on considère la situation dessinée ici, avec un angle à gauche et un deuxième angle à droite, on voit tout de suite que l'angle sur la gauche semble être plus petit que l'angle sur la droite. Mais, pour pouvoir mesurer entièrement, pour pouvoir comparer entièrement ces mesures, il faudrait pouvoir les mesurer pour pouvoir décider lequel est plus grand lequel est plus petit.

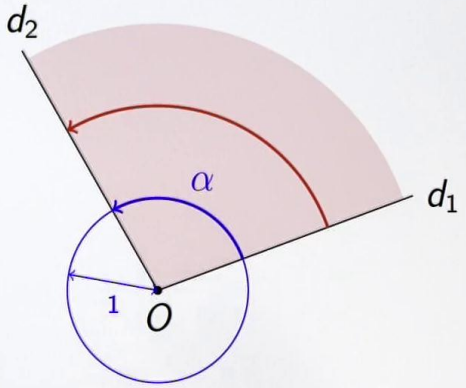
Notes

Summary

0m 04s

La mesure d'un angle : notre outil

- Pour mesurer l'angle $\measuredangle(d_1, d_2)$, nous allons nous servir d'un cercle unitaire (c.à.d. de rayon 1).
- Nous plaçons le centre de ce cercle en O.
- Comme mesure de l'angle, nous prenons la longueur de l'arc découpé par l'angle en question.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Or, comment procéder pour mesurer un angle ? Nous avons ici un angle donné par les deux demi-droites d1 et d2 issues du point commun O. Là, la portion de plan considérée avec un sens de rotation. Pour mesurer nous allons nous servir d'un cercle qu'on qualifie d'unitaire, c'est à dire un cercle qui a un rayon de 1. Nous commençons par déposer le centre de ce cercle sur le point O d'où partent les deux demi-droites d1 et d2. Nous constatons alors que la portion de plan qui correspond à l'angle va découper sur ce cercle unitaire un arc, et nous prenons comme mesure de l'angle la longueur de cet arc.

Notes

Summary

0m 51s

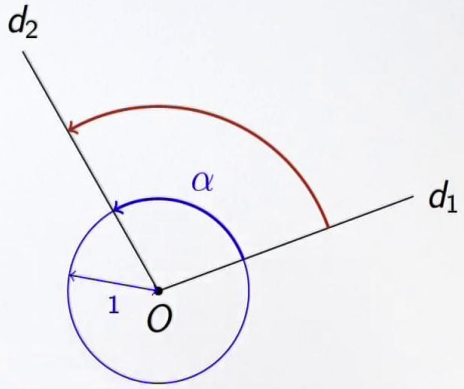
Définition de la mesure d'un angle

Définition

Pour mesurer la grandeur d'un angle $\alpha = \measuredangle(d_1, d_2)$, on place le centre d'un cercle unitaire au point O.

La *grandeur de l'angle α mesurée en radians* est la longueur de l'arc découpé par la portion du plan correspondant à l'angle α.

On affecte cette longueur du signe +, si α est d'orientation positive, et du signe – dans le cas contraire.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous retenons donc que pour mesurer la grandeur d'un angle, on place le centre d'un cercle unitaire au point d'origine de l'angle O et on mesure la grandeur de l'angle en radians en mesurant la longueur de l'arc découpée par la portion du plan sur le cercle unitaire. On affecte cette longueur du signe + si alpha est positif, comme dans le cas présent. Si l'angle est orienté négatif, on affecte alors la réponse mesurée d'un signe moins.

Notes

Summary

1m 42s

Remarque :

Nous avons distingué

- l'angle α (en tant que portion de plan)
- et sa mesure (comme longueur d'un arc découpé par cette portion de plan sur un cercle unitaire).

Usuellement on dénomme par α aussi bien l'angle que sa mesure.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous distinguons usuellement l'angle en tant que portion de plan et sa mesure telle que nous avons expliqué cela avec le cercle unitaire. Cependant, on utilise usuellement pour les deux notions la même lettre, souvent c'est une lettre grec, comme alpha ici et nous suivrons cette convention par le suite.

Notes

Summary

2m 12s

Remarque :

Remarquons que, si les demi-droites d_1 et d_2 coïncident et qu'on prend comme portion de plan cette même demi-droite, on dira que l'angle $\measuredangle(d_1, d_2)$ vaut 0.

Si on choisit dans ce cas comme angle tout le plan, l'angle $\measuredangle(d_1, d_2)$ vaut, selon l'orientation choisie, 2π ou -2π.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Une remarque s'impose si les deux demi-droites d1 et d2 coïncident et si on prend comme portion de plan délimitée par ces deux demi-droites la demi-droite elle même. Dans ce cas là on dira que l'angle alpha vaut 0. Evidemment, on peut prendre aussi la portion de plan à l'extérieur et dans ce cas là, nous dirons que la portion de plan mesurée vaut 2π ou -2π selon l'orientation choisie.

Notes

Summary

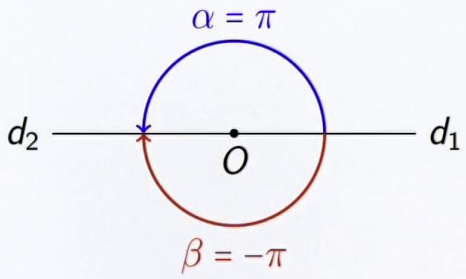
2m 34s

Remarque :

Si les demi-droites d_1 et d_2 issues d'un point commun pointent dans des directions opposées, on dira que l'angle $\measuredangle(d_1, d_2)$ vaut

- π (longueur d'un demi-cercle) ou
- $-\pi$,

le signe étant choisi en fonction de l'orientation de l'angle.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

La deuxième remarque concerne le cas où les deux demi-droites pointent dans des directions opposées. On pourra alors dire que l'angle vaut π si on tourne dans le sens positif ou -π dans le cas contraire.

Notes

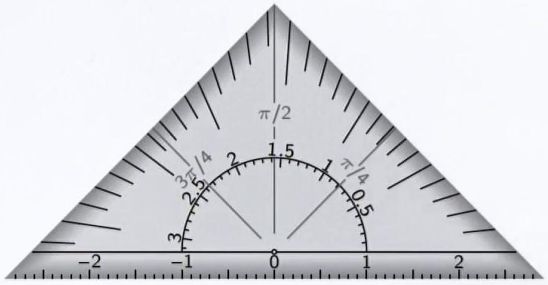
Summary

3m 00s

Mesure de l'angle avec un rapporteur

Pour mesurer des angles, on peut s'aider d'un rapporteur

- contenant un cercle de rayon 1 cm,
- gradué en cm le long de sa circonférence.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Pour mesurer les angles usuellement on se sert de ce qu'on appel un rapporteur. Un rapporteur contient typiquement un cercle de rayon 1 qui est gradué.

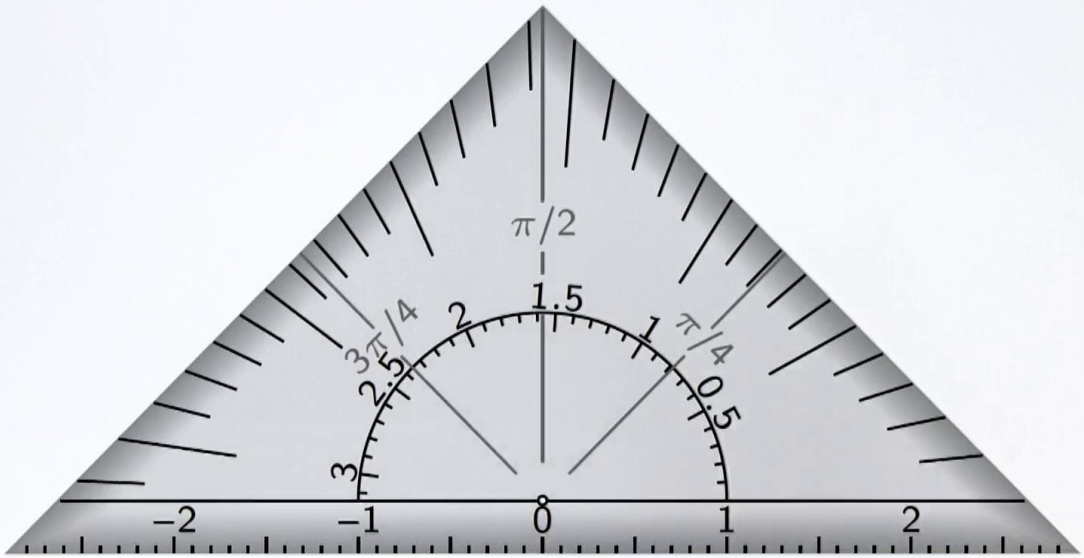
Notes

Summary

3m 16s

Mesure de l'angle avec un rapporteur

circonférence.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Ici, nous avons ce rapporteur. On a ici une unité. Usuellement c'est des centimètres; et ici on a ce demi-cercle qui est gradué avec cette même longeur donc nous avons la longueur de ce demi-cercle qui correspond à π.

Notes

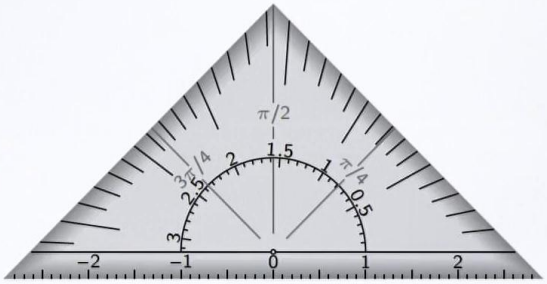
Summary

3m 27s

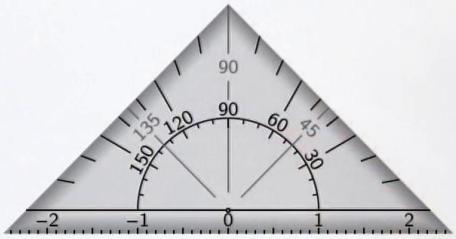
Mesure de l'angle avec un rapporteur

Pour mesurer des angles, on peut s'aider d'un rapporteur

- contenant un cercle de rayon 1 cm,
- gradué en cm le long de sa circonférence.



Il est vrai que usuellement, ces rapporteurs sont gradués en degrés : l'angle plat vaut donc 180°.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Usuellement, les rapporteurs qu'on achète sur le marché ne sont pas gradués de cette façon là. Ils sont gradués par une unité qu'on appel le degré où l'angle plat vaut 180 degrés.

Notes

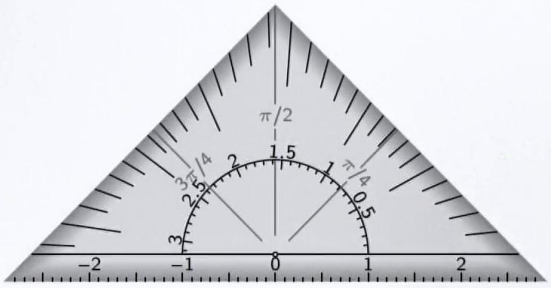
Summary

3m 44s

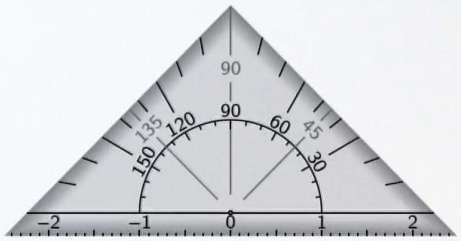
Mesure de l'angle avec un rapporteur

Pour mesurer des angles, on peut s'aider d'un rapporteur

- contenant un cercle de rayon 1 cm,
- gradué en cm le long de sa circonférence.



Il est vrai que usuellement, ces rapporteurs sont gradués en degrés : l'angle plat vaut donc 180°.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Voici un tel rapporteur. Donc ici sur ce demi-cercle toujours de rayon 1, on a une graduation en 180 parties égales.

Notes

Summary

3m 55s

Mesure de l'angle avec un rapporteur

Dans ce cours, nous utiliserons usuellement le rapporteur qui mesure les angles en radians.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Dans ce cours, nous utiliserons le premier de ces rapporteurs, c'est à dire un rapporteur qui est gradué en radians, usuellement en tout cas, nous allons utiliser les radians.

Notes

Summary

4m 06s

Exemples de mesures d'angle en radians

Exemple

- Un tour complet vaut 2π ou -2π (selon l'orientation) ;
- L'angle plat vaut π ou $-\pi$ (selon l'orientation) ; (moitié d'un tour complet)

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous avons déjà mentionné le fait qu'un tour complet va valoir 2π ou moins 2π selon l'orientation choisie. L'angle plat va valoir -π ou +π selon l'orientation choisie.

Notes

Summary

4m 17s

Exemples de mesures d'angle en radians

Exemple

- Un tour complet vaut 2π ou -2π (selon l'orientation) ;
- L'angle plat vaut π ou $-\pi$ (selon l'orientation) ;
- L'angle droit vaut $\pi/2$ ou $-\pi/2$ (selon l'orientation) ;

L'angle droit, on prend encore une fois la moitié donc, plus ou moins π demi, selon l'orientation.

Notes

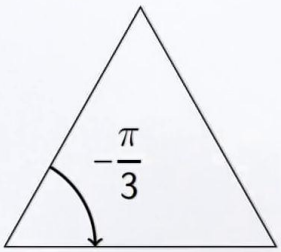
Summary

4m 31s

Exemples de mesures d'angle en radians

Exemple

- Un tour complet vaut 2π ou -2π (selon l'orientation) ;
- L'angle plat vaut π ou $-\pi$ (selon l'orientation) ;
- L'angle droit vaut $\pi/2$ ou $-\pi/2$ (selon l'orientation) ;
- L'angle d'un triangle équilatéral vaut $\pi/3$ ou $-\pi/3$ (selon l'orientation).



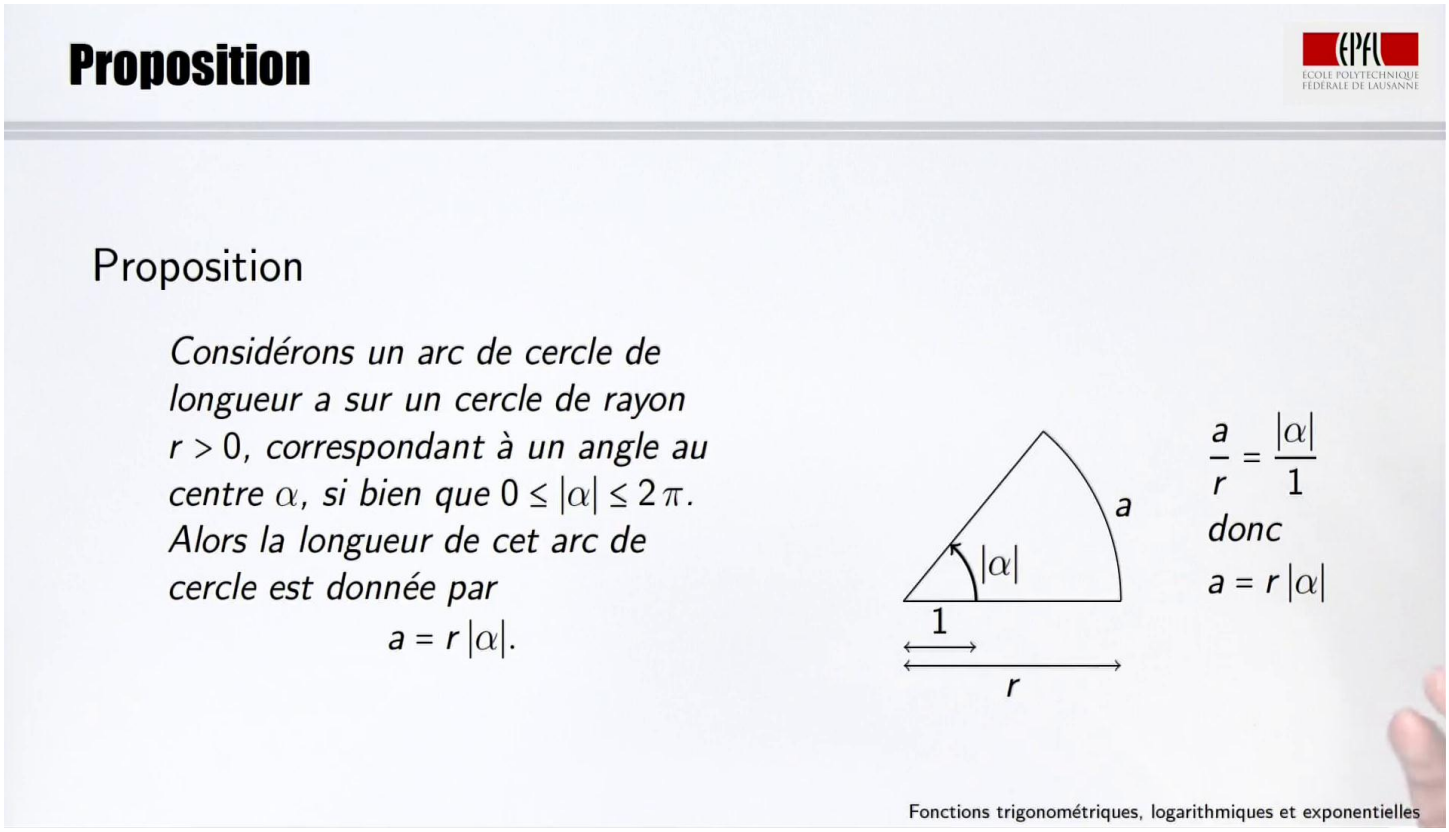
Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Dans un triangle équilatéral, on a trois angles égaux dont la somme vaut un angle plat. Donc, un tel angle va valoir aussi π tiers.

Notes

Summary

4m 38s



Intéressons nous alors maintenant à la longeur d'un arc sur un cercle qui n'a pas forcément un rayon de 1. Donc ici, le rayon vaut r, ou alors quelconque positive. Ici, j'ai un arc de cercle avec un angle centre que j'ai noté valeur absolue de alpha parce que le sens d'orientation, le sens de rotation, ne m'intéressera pas. Dans cette situation, on a des rapports qui se préservent. Donc le rapport entre la longeur de l'arc a et son rayon : a sur r est le même que la valeur de l'angle sur 1. Rappelons que l'angle mesuré en radians est précisément l'arc sur le cercle de rayon 1. Dans ce rapport a sur r égal alpha sur 1 On peut passer r de l'autre côté. On obtient donc que la longeur de l'arc est donnée par le rayon fois la valeur absolue de l'angle au centre.

Notes

Summary

4m 46s

Mouvement de l'aiguille des minutes d'une horloge

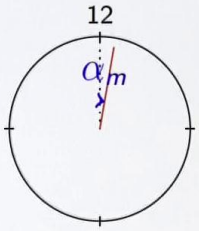
Si t correspond au nombre de secondes écoulées depuis minuit, l'angle correspondant à la position de l'aiguille des minutes est donné par

$$\alpha_m(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

avec

$$\alpha_m(t) := -\frac{2\pi}{60 \times 60} t = -\frac{\pi}{1800} t,$$

pour $0 \leq t \leq 3600$.



$t = 100.0$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Appliquons à présent ce que nous avons appris à la description du mouvement de l'aiguille des minutes d'une horloge. Il nous faut d'abord choisir l'unité de temps, la façon de mesurer le temps. Pour le temps t, on va dire qu'il correspond au nombre de secondes écoulées depuis minuit. Il faut ensuite fixer comment nous décrivons la position de l'aiguille des minutes. Nous allons décrire cette position par l'angle formé entre sa position à minuit et plus tard à l'instant t considéré. Nous cherchons donc à déterminer un angle que j'ai appelé alpha m, le m nous rappel que ce sont des minutes. Et nous aimerions, pour chaque instant t dans l'ensemble des réels, obtenir la valeur de l'angle correspondant. L'expression est donnée ici On va essayer de la comprendre. Nous avons un signe moins, simplement parce que le mouvement a lieu dans le sens des aiguilles d'une montre. Nous avons 2π qui correspondent à un tour complet. Le plus simple c'est de s'imaginer que le rayon ici vaut 1. Donc c'est la distance parcourue ici en une heure. Donc c'est 2π. Si je divise cette distance par le nombre de secondes, 60 minutes, 60 secondes donc 3600 secondes, ce rapport de π sur 3600 nous donne le nombre de radians parcourus par seconde, et je multiplie ce rapport par le nombre de secondes, j'obtiens ainsi l'angle correspondant.

Notes

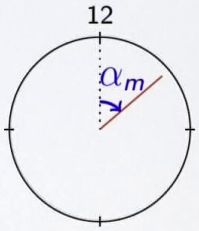
Summary

5m 52s

Mouvement de l'aiguille des minutes d'une horloge

Après la première heure, il faut remettre le compteur α_m à zéro.
Pour $3600 \leq t \leq 7200$, l'angle α_m est donc donné par

$$\alpha_m(t) := -\frac{2\pi}{60 \times 60}(t - 3600).$$



$t = 4100.0$

Nous perdons ainsi une partie de l'histoire !
Il vaut donc mieux admettre des mesures d'angle en dehors de l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Notez bien qu'ici je peux simplifier par deux, j'obtiens moins π sur 1800 fois t. Alors, cela nous donne bel et bien le mouvement de cette aiguille. Alors, la formule reste valable entre 0 et 3600, donc sur la première heure. Une fois qu'on arrive au bout des 3600 secondes, si l'on veut continuer la description, il faut remettre, en quelque sorte, le compteur alpha m à 0. Donc, nous allons déduire du temps t les 3600 secondes écoulées pour re-mesurer l'angle correspondant. La situation a donc l'allure suivante. Mais, en fait, ça c'est assez malheureux. Parce que là, j'oublie une partie de l'histoire de cette aiguille de montre en remettant le compteur à 0.

Notes

Summary

7m 33s

Des mesures d'angle en dehors de $[-2\pi, 2\pi]$

Nous allons admettre des mesures d'angle en dehors de l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$ en permettant de cumuler des tours complets dans la mesure d'un angle.

À une position fixe des deux demi-droites d_1 et d_2 issues d'un point commun O, on peut donc faire correspondre une infinité d'angles selon la façon de ramener, par une rotation autour du point O, la demi-droite d_1 sur la demi-droite d_2.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Et il est plus intéressant d'admettre des mesures d'angles qui sont au dessus de 2π ou alors en dessous de -2π. Donc on peut cumuler des tours complets quand on mesure les angles. A une position fixe de 2 demi-droites d1 et d2 issues d'un point commun O, on peut faire correspondre une infinité d'angles selon la façon de ramener par une rotation autour de alpha la demi-droite d1 sur la demi-droite d2. On perd là un peu d'unicité, mais on gagne par le fait que l'on peut retenir l'historique de cette façon de ramener d1 sur d2.

Notes

Summary

8m 25s

La notion d'angle trigonométrique

Définition

Nous parlons d'un angle trigonométrique dès que nous retenons l'historique de la rotation qui ramène la première branche de cet angle sur la seconde branche. La valeur d'un angle trigonométrique est donc un nombre réel quelconque.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Cela nous conduit à la notion d'angle trigonométrique. Nous allons parler d'un angle trigonométrique dès que nous retenons l'historique de la rotation qui ramène la première branche sur la seconde branche. La valeur d'un angle trigonométrique est un nombre réel quelconque, positif ou négatif.

Notes

Summary

9m 05s

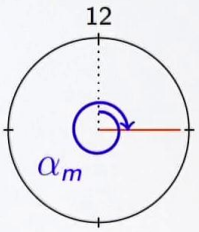
Mouvement de l'aiguille des minutes : version définitive

Le mouvement des aiguilles d'une montre est donc décrit par

$$\alpha_m(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

avec

$$\alpha_m(t) := -\frac{2\pi}{3600}\, t.$$



$t = 4500.0$

Revenons au mouvement de l'aiguille des minutes. Dans une version qu'on peut qualifier maintenant de définitive. C'est à dire que je conserve la formule obtenue pour la première heure pour les instants au delà de 3600 secondes. Ici on a la description précédente et lorsque l'aiguille arrive dans la position de départ, on continue à décompter l'angle parcourue. A 4500 secondes, on obtient un tour plus un quart de tour, ce qui reflète très bien l'historique de son mouvement.

Notes

Summary

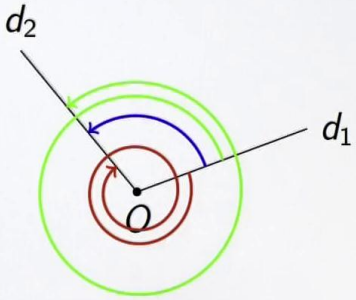
9m 24s

Proposition

Proposition

Étant données deux demi-droites d_1 et d_2 issues d'un point commun O, il existe un nombre infini de rotations autour de O qui amènent la demi-droite d_1 sur la demi-droite d_2. À chacune de ces rotations correspond un angle trigonométrique.

Tous ces angles (trigonométriques) se distinguent l'un de l'autre par un multiple entier (positif ou négatif) de 2π.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Formulons une proposition qui concerne les angles trigonométriques qui correspondent à des positions fixes de d1 et de d2. Ici en bleu nous aurions l'angle positif, pour le cas présent, dont on avait parlé lors de la dernière séance. On peut cependant aussi ramener d1 sur d2 en cumulant, en rajoutant un tour. Alors on obtient la situation en vert On peut aussi ramener l'angle d1 sur d2 par un angle négatif, une rotation positive et un tour en plus. La conclusion c'est qu'il existe un nombre infini d'angles trigonométriques qui correspondent à une situation de d1 et d2 fixes. Mais tout ces angles se distinguent l'un de l'autres par un multiple entier, positif ou négatif, de 2π.

Notes

Summary

9m 58s

Mesure de l'angle, angle trigonométrique

Ce que nous avons appris :

- La mesure de l'angle en radians ;
- La longueur d'un arc de cercle de rayon $r > 0$ quelconque ;
- La notion d'angle trigonométrique (saisie de l'historique) ;
- La description d'un mouvement circulaire uniforme comme celui des aiguilles d'une montre.

Prochaine étape :
Le modèle standard de l'angle trigonométrique : le cercle trigonométrique.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Tirons un bilan de ce que nous avons fait cette séance. Nous avons appris à mesurer un angle en radians. Nous pouvons calculer la longueur d'un arc de cercle si le rayon r est quelconque, pas forcément r égale à 1. Nous avons élargi la notion d'angle à celle d'angle trigonométrique qui permet de saisir l'historique d'une rotation et nous avons également donné un exemple pour décrire un mouvement circulaire uniforme, c'était le mouvement des aiguilles d'une montre. La prochaine fois, nous allons présenter ce qu'on appelle un modèle standard de l'angle trigonométrique. C'est ce qu'on appelle le cercle trigonométrique. Je vous remercie de votre attention. Bonne journée.

Notes

Summary

10m 57s