ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

L'angle et sa mesure

1.2 La mesure de l'angle, l'angle trigonométrique

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

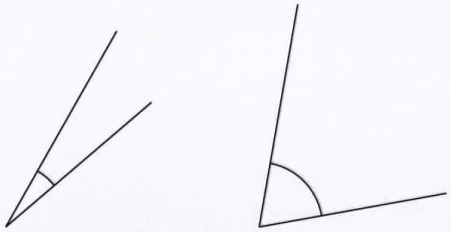
Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

EPFL

Notre objectif : mesurer des angles

Il existe des angles plus grands ou plus petits que d'autres.



Afin de les comparer, on aimerait mesurer les angles.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Meine Damen und Herren, Ich begrüße Sie zum Kurs namens "Trigonometrische und logarithmische sowie Exponentialfunktionen." Das letzte Mal befassten wir uns mit dem Begriff des Winkels. Wir sprachen auch vom Begriff des orientierten Winkels. Heute wollen wir uns damit beschäftigen, wie man einen Winkel misst. Zudem wollen wir den Begriff des Winkels verallgemeinern. Betrachtet man die hier dargestellte Situation mit einem Winkel auf der linken Seite und einem zweiten Winkel auf der rechten Seite, sieht man sofort, dass der Winkel auf der linken Seite kleiner zu sein scheint als der Winkel auf der rechten Seite. Aber um dies vollständig beurteilen und diese Maße vollständig vergleichen zu können, muss man die Winkel messen, um entscheiden zu können, welcher Winkel größer und welcher kleiner ist.

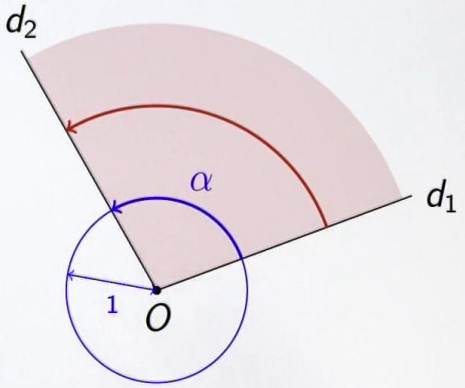
Notes

Summary

0m 04s

La mesure d'un angle : notre outil

- Pour mesurer l'angle $\measuredangle(d_1, d_2)$, nous allons nous servir d'un cercle unitaire (c.à.d. de rayon 1).
- Nous plaçons le centre de ce cercle en O.
- Comme mesure de l'angle, nous prenons la longueur de l'arc découpé par l'angle en question.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Aber wie geht man vor, um einen Winkel zu messen? Hier haben wir einen Winkel, der durch die beiden Halbgeraden d1 und d2 gegeben ist, die von einem gemeinsamen Punkt O ausgehen. Hierbei wird der Kreisausschnitt mit einer Drehrichtung betrachtet. Zum Messen nutzen wir einen sogenannten Einheitskreis, also ein Kreis, der den Radius 1 hat. Wir beginnen, indem wir den Mittelpunkt des Kreises auf dem Punkt O festlegen, von dem aus die beiden Halbgeraden d1 und d2 abgehen. Wir stellen also fest, dass der Kreisausschnitt, der dem Winkel entspricht, aus diesem Einheitskreis einen Bogen herausschneidet, und wir nehmen als Winkelmaß die Bogenlänge.

Notes

Summary

0m 51s

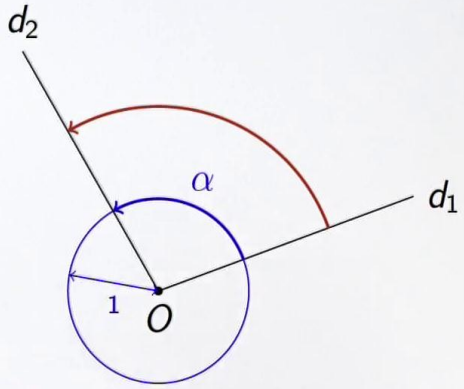
Définition de la mesure d'un angle

Définition

Pour mesurer la grandeur d'un angle $\alpha = \measuredangle(d_1, d_2)$, on place le centre d'un cercle unitaire au point O.

La *grandeur de l'angle α mesurée en radians* est la longueur de l'arc découpé par la portion du plan correspondant à l'angle α.

On affecte cette longueur du signe +, si α est d'orientation positive, et du signe – dans le cas contraire.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir merken uns also: Um die Größe eines Winkels zu messen, platziert man den Mittelpunkt eines Einheitskreises am Ausgangspunkt eines Winkels O und misst die Winkelgröße in Radiant, indem man die Länge des Bogens misst, der durch den Kreisausschnitt aus dem Einheitskreis herausgeschnitten wird. Wir ordnen dieser Länge ein + zu, wenn Alpha wie im vorliegenden Fall positiv ist. Wenn der Winkel negativ ausgerichtet ist, wird dem gemessenen Ergebnis ein Minuszeichen hinzugefügt.

Notes

Summary

1m 42s

Remarque :

Nous avons distingué

- l'angle α (en tant que portion de plan)
- et sa mesure (comme longueur d'un arc découpé par cette portion de plan sur un cercle unitaire).

Usuellement on dénomme par α aussi bien l'angle que sa mesure.

Wir unterscheiden in der Regel zwischen dem Kreisausschnitt und dem Maß eines Winkels, so wie wir es anhand des Einheitskreises erklärt haben. In der Regel wird allerdings für diese beiden Begriffe derselbe Buchstabe verwendet. Oft ist dies ein griechischer Buchstabe wie in diesem Fall das Alpha. Dieser Konvention werden wir im weiteren Verlauf folgen.

Notes

Summary

2m 12s

Remarque :

Remarquons que, si les demi-droites d_1 et d_2 coïncident et qu'on prend comme portion de plan cette même demi-droite, on dira que l'angle $\measuredangle(d_1, d_2)$ vaut 0.

Si on choisit dans ce cas comme angle tout le plan, l'angle $\measuredangle(d_1, d_2)$ vaut, selon l'orientation choisie, 2π ou -2π.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir stellen fest: Wenn die beiden Halbgeraden d1 und d2 koinzidieren und wenn man als Kreisausschnitt, der durch diese beiden Halbgeraden begrenzt wird, die Halbgerade selbst nimmt, dann ist in diesem Fall der Winkel 0. Natürlich kann man auch den äußeren Kreisausschnitt nehmen und in diesem Fall werden wir sagen, dass der gemessene Kreisausschnitt je nach gewählter Richtung 2π ou -2π ist.

Notes

Summary

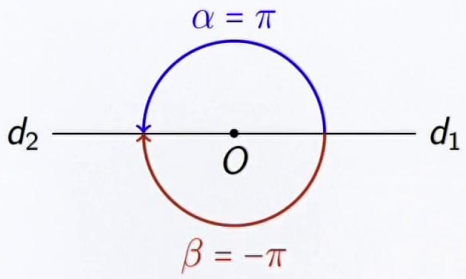
2m 34s

Remarque :

Si les demi-droites d_1 et d_2 issues d'un point commun pointent dans des directions opposées, on dira que l'angle $\measuredangle(d_1, d_2)$ vaut

- π (longueur d'un demi-cercle) ou
- $-\pi$,

le signe étant choisi en fonction de l'orientation de l'angle.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Die zweite Feststellung betrifft den Fall, dass die beiden Halbgeraden in entgegengesetzte Richtungen zeigen. In diesem Fall beträgt der Winkel π, wenn die Drehrichtung positiv ist, beziehungsweise -π im gegenteiligen Fall.

Notes

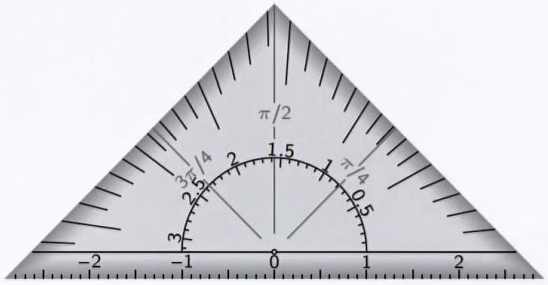
Summary

3m 00s

Mesure de l'angle avec un rapporteur

Pour mesurer des angles, on peut s'aider d'un rapporteur

- contenant un cercle de rayon 1 cm,
- gradué en cm le long de sa circonférence.



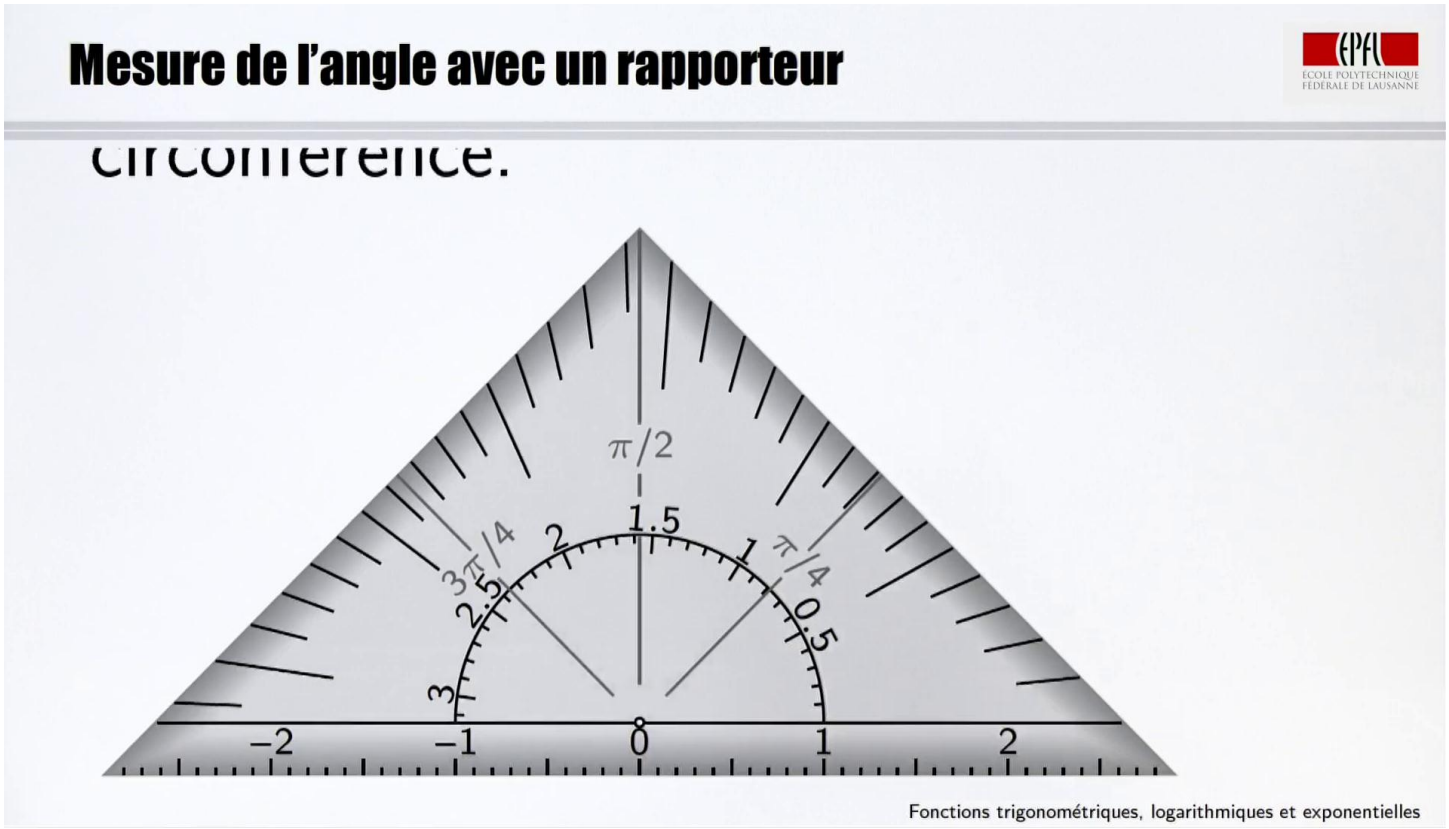
Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Um die Winkel zu messen, benutzt man in der Regel einen sogenannten Winkelmesser. Ein Winkelmesser enthält typischerweise einen Kreis mit dem Radius 1, der unterteilt ist.

Notes

Summary

3m 16s



Hier haben wir diesen Winkelmesser. Und hier haben wir eine Einheit. Normalerweise sind es Zentimeter. Und hier haben wir diesen Halbkreis, der in derselben Länge eingeteilt ist. Wir haben also die Länge dieses Halbkreises, die π entspricht.

Notes

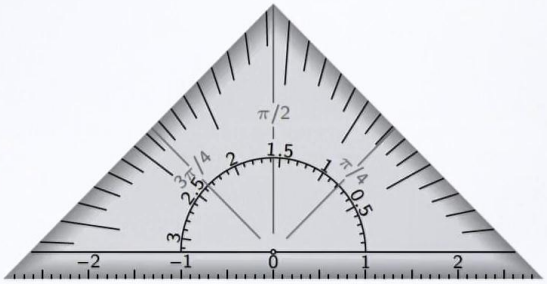
Summary

3m 27s

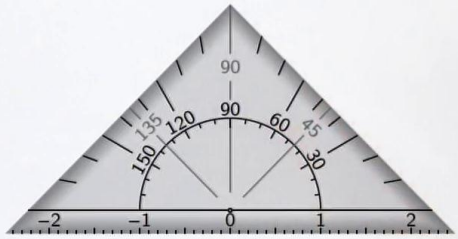
Mesure de l'angle avec un rapporteur

Pour mesurer des angles, on peut s'aider d'un rapporteur

- contenant un cercle de rayon 1 cm,
- gradué en cm le long de sa circonférence.



Il est vrai que usuellement, ces rapporteurs sont gradués en degrés : l'angle plat vaut donc 180°.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Normalerweise sind die Winkelmesser, die auf dem Markt erhältlich sind, nicht auf diese Weise eingeteilt. Sie sind in die Einheit eingeteilt, die wir als Grad kennen und wo der flache Winkel 180 Grad beträgt.

Notes

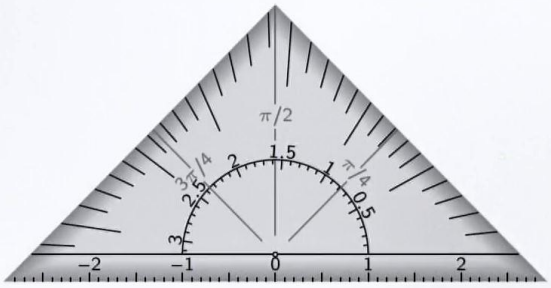
Summary

3m 44s

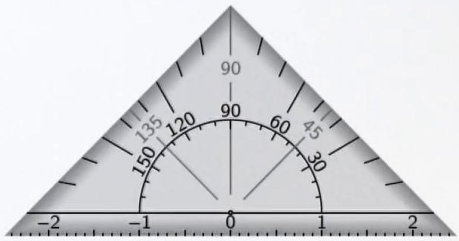
Mesure de l'angle avec un rapporteur

Pour mesurer des angles, on peut s'aider d'un rapporteur

- contenant un cercle de rayon 1 cm,
- gradué en cm le long de sa circonférence.



Il est vrai que usuellement, ces rapporteurs sont gradués en degrés : l'angle plat vaut donc 180°.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Hier ist ein solcher Winkelmesser. Dieser Halbkreis, der immer den Radius 1 hat, ist also in 180 gleiche Teile eingeteilt.

Notes

Summary

3m 55s

Mesure de l'angle avec un rapporteur

Dans ce cours, nous utiliserons usuellement le rapporteur qui mesure les angles en radians.

In diesem Kurs werden wir den ersten dieser Winkelmesser nutzen, sprich: einen Winkelmesser, der in Radiant eingeteilt ist, und zumindest normalerweise werden wir die Einheit Radiant nutzen.

Notes

Summary

4m 06s

Exemples de mesures d'angle en radians

Exemple

- Un tour complet vaut 2π ou -2π (selon l'orientation) ;
- L'angle plat vaut π ou $-\pi$ (selon l'orientation) ; (moitié d'un tour complet)

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir haben bereits erwähnt, dass eine volle Umdrehung 2π beziehungsweise minus 2π je nach gewählter Richtung beträgt. Der flache Winkel beträgt also je nach gewählter Richtung -π oder +π.

Notes

Summary

4m 17s

Exemples de mesures d'angle en radians

Exemple

- Un tour complet vaut 2π ou -2π (selon l'orientation) ;
- L'angle plat vaut π ou $-\pi$ (selon l'orientation) ;
- L'angle droit vaut $\pi/2$ ou $-\pi/2$ (selon l'orientation) ;

Der rechte Winkel, also davon wieder die Hälfte, plus oder minus π Halbe, je nach Richtung.

Notes

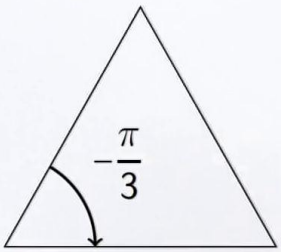
Summary

4m 31s

Exemples de mesures d'angle en radians

Exemple

- Un tour complet vaut 2π ou -2π (selon l'orientation) ;
- L'angle plat vaut π ou $-\pi$ (selon l'orientation) ;
- L'angle droit vaut $\pi/2$ ou $-\pi/2$ (selon l'orientation) ;
- L'angle d'un triangle équilatéral vaut $\pi/3$ ou $-\pi/3$ (selon l'orientation).



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

In einem gleichseitigen Dreieck hat man drei gleiche Winkel, deren Summe einen flachen Winkel ergibt. Das heißt, ein solcher Winkel beträgt demzufolge π Drittel.

Notes

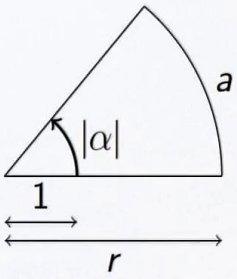
Summary

4m 38s

Proposition

Considérons un arc de cercle de longueur a sur un cercle de rayon $r > 0$, correspondant à un angle au centre α, si bien que $0 \leq |\alpha| \leq 2\pi$. Alors la longueur de cet arc de cercle est donnée par

$$a = r\,|\alpha|.$$



$$\frac{a}{r} = \frac{|\alpha|}{1}$$

donc

$$a = r\,|\alpha|$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Konzentrieren wir uns also jetzt auf die Länge eines Bogens in einem Kreis, der nicht notwendigerweise einen Radius von 1 hat. Hier beträgt der Radius also r oder irgendeinen sonstigen positiven Wert. Hier habe ich einen Kreisbogen mit einem Zentriwinkel, den ich als Absolutwert von Alpha bezeichne, weil mich der Richtungssinn, die Drehrichtung, nicht interessiert. In diesem Fall hat man gleichbleibende Verhältnisse. Also das Verhältnis zwischen der Länge des Bogens a und seinem Radius (a zu r) ist dasselbe wie der Wert des Winkels zu 1. Erinnern wir uns daran, dass der in Radiant gemessene Winkel genau dem Bogen des Kreises mit dem Radius 1 entspricht. In diesem Verhältnis von a zu r gleich Alpha zu 1 kann man r von der anderen Seite passieren. Man erhält also die Länge des Bogens, wenn man den Radius mit dem absoluten Wert des Zentriwinkels multipliziert.

Notes

Summary

4m 46s

Mouvement de l'aiguille des minutes d'une horloge

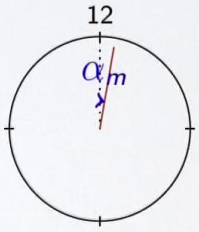
Si t correspond au nombre de secondes écoulées depuis minuit, l'angle correspondant à la position de l'aiguille des minutes est donné par

$$\alpha_m(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

avec

$$\alpha_m(t) := -\frac{2\pi}{60 \times 60} t = -\frac{\pi}{1800} t,$$

pour $0 \leq t \leq 3600$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wenden wir jetzt also das an, was wir bei der Beschreibung der Bewegung des Minutenzeigers einer Uhr gelernt haben. Zunächst müssen wir die Einheit der Zeit wählen, das Maß, in dem man die Zeit misst. Für die Zeit t lässt sich sagen, sie entspricht der Anzahl der Sekunden, die von 12 Uhr an abgelaufen sind. Nun müssen wir bestimmen, wie wir die Position des Minutenzeigers beschreiben. Wir beschreiben diese Position durch den Winkel zwischen der Position auf 12 Uhr sowie zu dem entsprechend späteren Zeitpunkt t. Wir versuchen also, einen Winkel festzulegen, den ich Alpha m nenne, wobei uns das m daran erinnert, dass es sich um Minuten handelt. Und wir möchten für jeden Zeitpunkt t in der Gesamtmenge der rellen Zahlen den Wert des entsprechenden Winkels erhalten. Der Ausdruck ist hier gegeben. Wir werden versuchen, ihn zu verstehen. Wir haben ein Minuszeichen, ganz einfach, weil die Bewegung im Uhrzeigersinn verläuft. Wir haben 2π, was einer vollständigen Umdrehung entspricht. Das einfachste ist, sich vorzustellen, dass der Radius hier 1 beträgt. Deshalb ist dies die Distanz, die innerhalb einer Stunde zurückgelegt wird. Deshalb beträgt sie 2π.

Notes

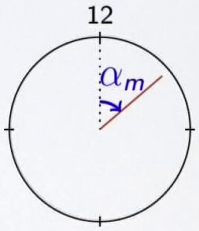
Summary

5m 52s

Mouvement de l'aiguille des minutes d'une horloge

Après la première heure, il faut remettre le compteur α_m à zéro.
Pour $3600 \leq t \leq 7200$, l'angle α_m est donc donné par

$$\alpha_m(t) := -\frac{2\pi}{60 \times 60}(t - 3600).$$



$t = 4100.0$

Nous perdons ainsi une partie de l'histoire !
Il vaut donc mieux admettre des mesures d'angle en dehors de l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wenn ich diese Distanz durch die Anzahl der Sekunden teile, 60 Minuten mal 60 Sekunden, also 3600 Sekunden, verrät uns dieses Verhältnis zwischen π und 3600 die Anzahl der Radiant, die pro Sekunde zurückgelegt werden, und wenn ich dieses Verhältnis mit der Anzahl der Sekunden multipliziere, dann erhalte ich den entsprechenden Winkel. Beachten Sie, dass ich hier um zwei kürzen kann, dann erhalte ich minus π je 1800 mal t. Diese Formel gibt uns also in der Tat die Bewegung des Zeigers wieder. Das heißt, die Formel behält ihre Gültigkeit zwischen 0 und 3600, also in der ersten Stunde. Wenn man das Ende der 3600 Sekunden erreicht hat, und wenn man die Beschreibung fortsetzen will, muss man auf irgendeine Weise den Zähler Alpha m auf Null setzen. Wir müssen also von der Zeit t die 3600 vergangenen Sekunden abziehen, um den entsprechenden Winkel neu zu messen. Das Spiel beginnt also von vorn. Was allerdings sehr schade ist. Denn auf diese Weise vergesse ich einen Teil des Verlaufs der Uhrzeigerbewegung, wenn ich den Zähler auf Null stelle.

Notes

Summary

7m 12s

Des mesures d'angle en dehors de $[-2\pi, 2\pi]$

Nous allons admettre des mesures d'angle en dehors de l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$ en permettant de cumuler des tours complets dans la mesure d'un angle.

À une position fixe des deux demi-droites d_1 et d_2 issues d'un point commun O, on peut donc faire correspondre une infinité d'angles selon la façon de ramener, par une rotation autour du point O, la demi-droite d_1 sur la demi-droite d_2.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Und es ist interessanter, Winkelmessungen vorzunehmen, die über 2π oder auch unter -2π liegen. Man kann also komplette Umdrehungen kumulieren, wenn man die Winkel misst. Einer Position von zwei Halbgeraden d1 und d2 mit dem gemeinsamen Ursprungspunkt O kann man also eine unbestimmte Anzahl von Winkeln zuweisen, je nachdem, wie viele Umdrehungen um Alpha zurückgelegt werden, um von der Halbgeraden d1 zur Halbgeraden d2 zu gelangen. Man verliert hierdurch gewissermaßen die Einmaligkeit, aber man gewinnt dafür die Möglichkeit, den Verlauf der Bewegung von d1 auf d2 festzuhalten.

Notes

Summary

8m 25s

La notion d'angle trigonométrique

Définition

Nous parlons d'un angle trigonométrique dès que nous retenons l'historique de la rotation qui ramène la première branche de cet angle sur la seconde branche. La valeur d'un angle trigonométrique est donc un nombre réel quelconque.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Dies führt uns zu dem Begriff des trigonometrischen Winkels. Wir sprechen von einem trigonometrischen Winkel, wenn wir den Verlauf der Drehbewegung abspeichern, die von dem ersten Strahl auf den zweiten führt. Der Wert eines trigonometrischen Winkels ist eine beliebige reelle Zahl, die positiv oder negativ sein kann.

Notes

Summary

9m 05s

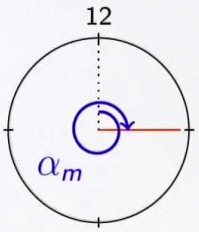
Mouvement de l'aiguille des minutes : version définitive

Le mouvement des aiguilles d'une montre est donc décrit par

$$\alpha_m(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

avec

$$\alpha_m(t) := -\frac{2\pi}{3600}\, t.$$



$t = 4500.0$

Kommen wir auf die Bewegung des Minutenzeigers zurück. In einer, wie man nun sagen kann, endgültigen Fassung. Das heißt, dass ich die Formel, die ich für die erste Stunde erhalten habe, für die Zeitabschnitte von mehr als 3600 Sekunden beibehalte. Hier haben wir die vorhergehende Beschreibung, und wenn der Zeiger seine Ausgangsposition wieder erreicht, zählen wir weiter den zurückgelegten Winkel ab. Bei 4500 Sekunden erhalten wir eine Umdrehung plus eine weitere Vierteldrehung, was den Bewegungsverlauf des Zeigers treffend beschreibt.

Notes

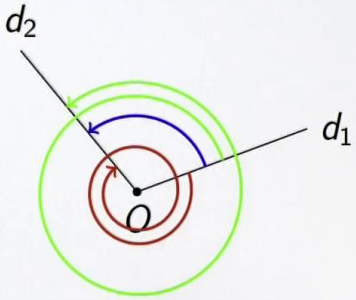
Summary

9m 24s

Proposition

Étant données deux demi-droites d_1 et d_2 issues d'un point commun O, il existe un nombre infini de rotations autour de O qui amènent la demi-droite d_1 sur la demi-droite d_2. À chacune de ces rotations correspond un angle trigonométrique.

Tous ces angles (trigonométriques) se distinguent l'un de l'autre par un multiple entier (positif ou négatif) de 2π.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Formulieren wir einen Vorschlag im Bezug auf die trigonometrischen Winkel, die den festen Positionen von d1 und d2 entsprechen. In diesem Fall haben wir den positiven Winkel blau markiert, von dem wir das letzte Mal gesprochen haben. Man kann auch d1 auf d2 zurückführen, indem man kumulierend eine Drehung hinzufügt. So erhält man die grün dargestellte Position. Man kann auch über einen negativen Winkel von d1 auf d2 gelangen, durch eine positive Drehung und eine zusätzliche Umdrehung. Wir schlussfolgern: Es existiert eine unbestimmte Anzahl von trigonometrischen Winkeln, die einer Position der festen Winkel d1 und d2 entsprechen. Aber all diese Winkel unterscheiden sich voneinander durch ein ganzzahliges Vielfaches (positiv oder negativ) von 2π.

Notes

Summary

9m 58s

Mesure de l'angle, angle trigonométrique

Ce que nous avons appris :

- La mesure de l'angle en radians ;
- La longueur d'un arc de cercle de rayon $r > 0$ quelconque ;
- La notion d'angle trigonométrique (saisie de l'historique) ;
- La description d'un mouvement circulaire uniforme comme celui des aiguilles d'une montre.

Prochaine étape :
Le modèle standard de l'angle trigonométrique : le cercle trigonométrique.

Ziehen wir eine Bilanz aus dieser Sitzung. Wir haben gelernt, einen Winkel in Radiant zu messen. Wir können die Länge eines Kreisbogens berechnen, wenn der Radius r beliebig groß ist, wobei r nicht notwendigerweise gleich 1 sein muss. Wir haben den Begriff des Winkels um den trigonometrischen Winkel erweitert, was das Erfassen des Verlaufs einer Drehbewegung ermöglicht, und wir haben auch ein Beispiel für eine gleichförmige Kreisbewegung gezeigt, nämlich die Bewegung der Zeiger einer Uhr. Das nächste Mal präsentieren wir das sogenannte Standardmodell eines trigonometrischen Winkels. Dies ist der sogenannte trigonometrischer Kreis. Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und einen schönen Tag!

Notes

Summary

10m 57s