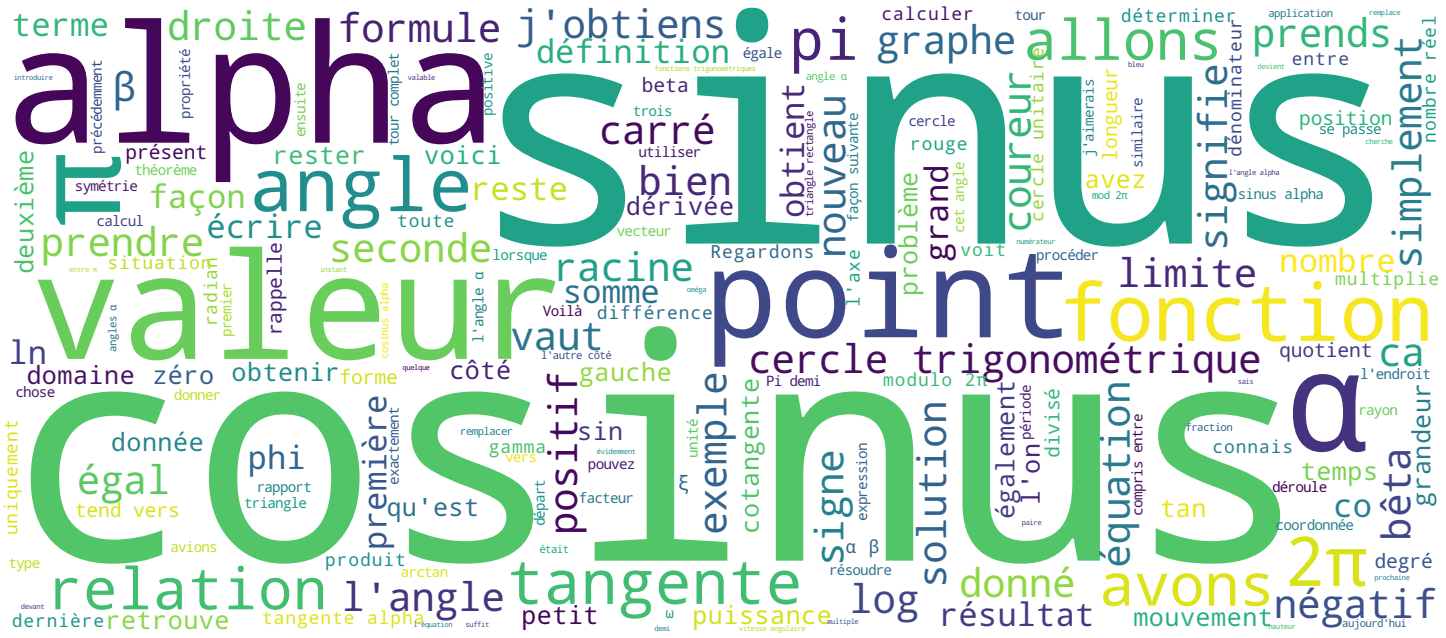
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

L'angle et sa mesure

1.3 Le cercle trigonométrique

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

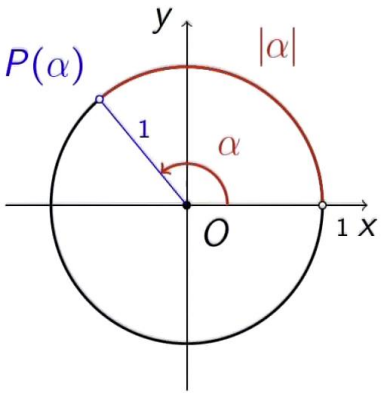
Video

EPFL

Interprétation d'un angle sur le cercle trigonométrique

Étant donné un angle (trigonométrique) $\alpha \in \mathbb{R}$, on lui fait correspondre un point $P(\alpha)$ sur le cercle trigonométrique en faisant tourner le point $(1,0)$ autour de l'origine d'un angle α. En d'autres termes :

- on déroule la longueur $|\alpha|$ sur le cercle en partant du point $(1,0)$ pour aboutir au point $P(\alpha)$
- si $\alpha > 0$, on déroule dans le sens positif, sinon dans le sens négatif.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Bonjour. La dernière fois, nous avons parlé d'angles, de la mesure des angles en radians, nous avons introduit la notion d'angles trigonométriques dont la mesure est un nombre réel quelconque. Aujourd'hui, je vais vous présenter ce qu'on pourrait appeler un modèle standard pour les angles trigonométriques. Ce modèle s'appelle : le cercle trigonométrique. A cet effet nous considérons le plan muni d'un système orthogonal de coordonnées x, y. Nous avons ici la coordonnée x à l'horizontale, la coordonnée y à la verticale, et l'origine là où les axes se coupent. On considère un cercle unitaire, c'est-à-dire un cercle de rayon 1, dont le centre est placé, précisément, à l'origine. Alors, étant donné un angle trigonométrique, de façon plus précise, étant donné sa mesure α, nombre réel quelconque, nous procédons de la façon suivante pour faire correspondre à cet angle α, un point que je note P(α) un point qui est situé sur le cercle trigonométrique. Et pour l'obtenir, je vais procéder de la façon suivante : je pars depuis le point (1,0) qui est ici sur le cercle trigonométrique, et je fais tourner ce point (1,0) autour de l'origine d'un angle α.

Notes

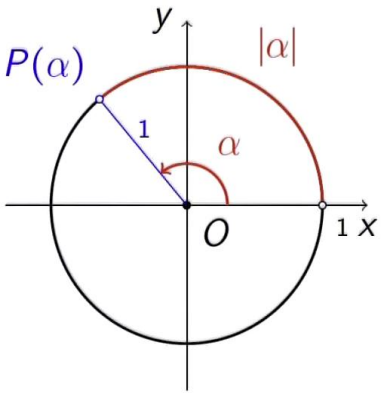
Summary

0m 03s

Interprétation d'un angle sur le cercle trigonométrique

Étant donné un angle (trigonométrique) $\alpha \in \mathbb{R}$, on lui fait correspondre un point $P(\alpha)$ sur le cercle trigonométrique en faisant tourner le point $(1,0)$ autour de l'origine d'un angle α.
En d'autres termes :

- on déroule la longueur $|\alpha|$ sur le cercle en partant du point $(1,0)$ pour aboutir au point $P(\alpha)$
- si $\alpha > 0$, on déroule dans le sens positif, sinon dans le sens négatif.



Si vous préférez, en d'autres termes, je déroule la longueur |α| - cette longueur ici est positive - sur le cercle trigonométrique, en partant depuis le point (1,0) et j'aboutie ainsi au le point P(α). Ce déroulement, je le fais dans le sens positif si l'angle est positif; si l'angle α est négatif, je déroule dans un sens négatif.

Notes

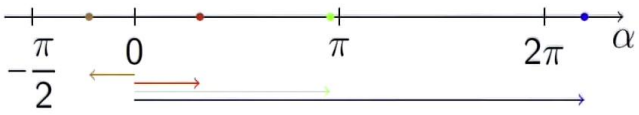
Summary

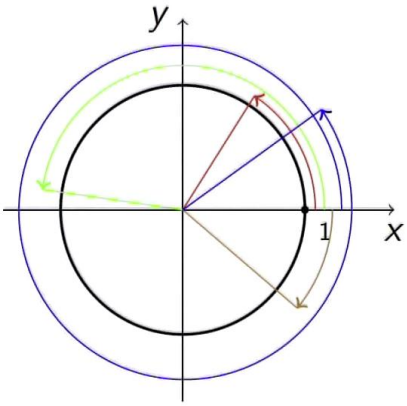
1m 40s

Interprétation d'un angle sur le cercle trigonométrique

On obtient ainsi une application

$$P(\cdot) : \mathbb{R} \to C, \qquad \alpha \mapsto P(\alpha).$$





Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Regardons d'un peu plus près ce que cela signifie. Nous avons donc obtenu une application. Je l'appelle P(.) avec un point qui symbolise la valeur qu'on peut introduire dans une application. Cette application va prendre un nombre α réel, c'est la mesure d'un angle trigonométrique et va nous rendre un point P(α) sur le cercle unitaire. Si on regarde d'un peu plus près ce que cela signifie pour des angles α concrets, on va commencer peut-être avec une valeur de α qui est comprise entre 0 et π/2, et je la déroule depuis le point (1,0) dans le sens positif sur le cercle unitaire et j'aboutis ici au point P(α) sur le cercle unitaire. Prenons un autre α, une valeur positive, mais cette fois-ci, juste en-dessous de π (π correspond à un demi-cercle). Cette fois-ci je déroule cette longueur α dans le sens positif, qui est juste plus petite que π, et j'aboutis ici en un point P(α). Regardons ce qui se passe si je prends pour α un nombre négatif, comme ici en brun. Cette fois-ci je déroule cette longueur dans le sens négatif depuis le point (1,0) et j'aboutis ici au point correspondant, P(α) Finalement que se passe-t-il si je prends un α plus grand que 2π ? Je déroule donc cette longueur dans le sens positif, étant plus grand que 2π, je vais faire un tour et rajouter encore ce qui dépasse les 2π, et j'obtiens alors sur le cercle trigonométrique la position correspondante P(α).

Notes

Summary

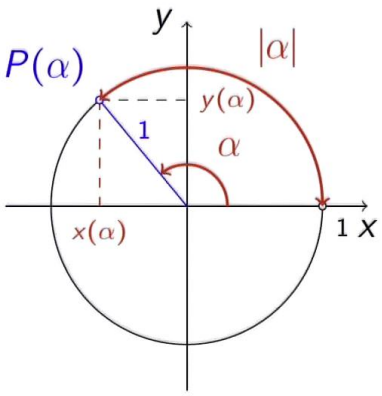
2m 15s

Le point $P(\alpha)$ sur le cercle unitaire

Le point $P(\alpha)$ est situé sur le cercle trigonométrique.

Il possède des coordonnées $x(\alpha)$ et $y(\alpha)$ qui satisfont la relation

$$x^2(\alpha) + y^2(\alpha) = 1.$$



On peut immédiatement formuler un résultat concernant le point P(α) sur le cercle unitaire. Ce point... a deux coordonnées : x négative et y positive. Ces coordonnées dépendent évidemment du choix de α, et donc je les appelle x(α) et y(α). Je peux à présent considérer le triangle rectangle que voici. Il a comme hypothénuse 1, et si je prends maintenant le x(α) négatif au carré, ça me fait $x^2(\alpha)+y^2(\alpha)$, cela me donne un au carré, donc j'ai la relation...

Notes

Summary

4m 15s

Proposition

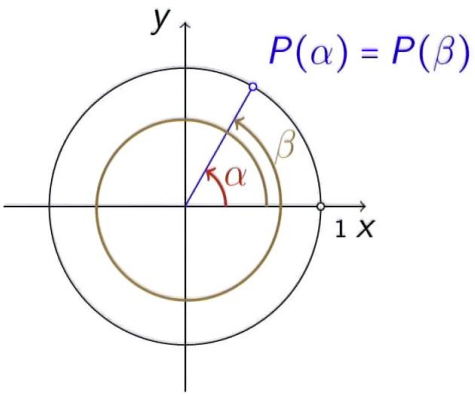
Considérons sur le cercle trigonométrique deux points $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ correspondant aux angles (trigonométriques) α et $\beta \in \mathbb{R}$.

Si les deux points $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ coïncident, alors les angles α et β se différencient d'un nombre entier de tours.

Par cela on entend qu'il existe (exactement) un nombre entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\alpha = \beta + k\,2\pi.$$

Nous écrivons dans ce cas $\alpha = \beta \mod 2\pi$.



$x^2(\alpha)+y^2(\alpha)$ vaut 1 Voici une proposition que l'on peut formuler immédiatement dès que l'on a la définition de cette application qui fait correspondre à un angle α un point P(α) sur le cercle unitaire. A cet effet on va prendre deux angles trigonométriques α et β, qui sont deux nombres réels qui mesurent ces angles et je considère les deux points correspondants P(α) et P(β) On va supposer que ces deux points P(α) et P(β) coïncident. Ils sont au même endroit sur le cercle unitaire. J'ai ici un angle α qui détermine P(α) et un angle β qui détermine P(β). Il est immédiat que les angles α et β se différencient d'un nombre entier de tours. Par exemple, je rajoute ici un tour à α pour obtenir β, ou à l'inverse j'enlève un tour à β pour obtenir α. De façon plus exacte, on formule le résultat suivant : il existe (exactement) un nombre entier k tel que $\alpha=\beta+k*2\pi$. Dans la figure nous avons choisi k= -1. J'insiste sur le fait que k peut être nul, il peut être positif ou négatif, mais ce qui est important, c'est qu'il est entier. On écrit ce résultat également sous une forme un peu différente : $\alpha=\beta \mod 2\pi$.

Notes

Summary

5m 14s

Proposition : remarques

Proposition

Considérons sur le cercle trigonométrique deux points $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ correspondant aux angles (trigonométriques) α et $\beta \in \mathbb{R}$.

Si les deux points $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ coïncident, alors les angles α et β se différencient d'un nombre entier de tours.

Par cela on entend qu'il existe (exactement) un nombre entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\alpha = \beta + k\,2\pi.$$

Nous écrivons dans ce cas $\alpha = \beta \mod 2\pi$.

Remarquons que, si $\alpha = \beta$, alors on a

$$\alpha = \beta \mod 2\pi.$$

Mais, on ne peut pas remplacer la relation $\alpha = \beta \mod 2\pi$ simplement par $\alpha = \beta$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Cette relation se lit : α = β modulo 2π. Cela signifie donc que je peux obtenir α à partir de β en additionnant un multiple entier, positif ou négatif, de 2π. Ici une remarque importante s'impose : évidemment si les angles α et β sont identiques, ils coïncident. Je peux aussi dire que α = β mod 2π j'ajoute à β zero fois 2π. Ce qui est important de retenir, c'est qu'on ne peut pas aller dans l'autre sens : remplacer une équation de type α = β mod 2π simplement par α = β. Les angles α et β peuvent en ce cas-là être différents.

Notes

Summary

7m 03s

Proposition : solution de l'équation $P(\alpha) = P(\beta)$

Proposition

Considérons un point fixe $P(\alpha)$ sur le cercle trigonométrique.
L'ensemble de tous les angles (trigonométriques) β avec $P(\alpha) = P(\beta)$ est donné par

$$\{\alpha + k\,2\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\},$$

c.à.d. par

$$\{\beta \in \mathbb{R} \ : \ \beta = \alpha \mod 2\pi\}.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Formulons ce que nous venons de dire d'une façon un peu différente : nous allons nous intéresser cette fois-ci à la solution d'une équation P(α) = P(β) à cet effet on fixe un point P(α), donc un angle α donné et on recherche l'ensemble de tous les angles trigonométriques β tels que les deux points P(α) et P(β) coïncident. Le résultat, le voici. Les angles β sont simplement donnés par {α+k2π}, k étant un entier. On peut aussi écrire ce résultat sous la forme : ce sont tous les β dans R tels que β=α mod 2π. Appliquons maintenant ce résultat à un exemple concret deux coureurs.

Notes

Summary

7m 57s

Exemple : deux coureurs

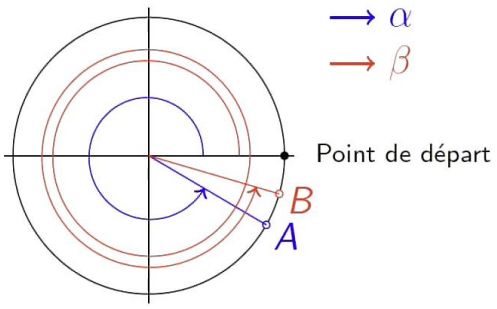
Exemple

Considérons deux coureurs A et B sur un circuit circulaire de rayon $r = 30$m.

- Vitesse du coureur A : $v_1 = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
- vitesse du coureur B : $v_2 = 1.4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Les deux coureurs prennent le départ ensemble au même point.

Déterminer tous les instants où le coureur B dépasse le coureur A.



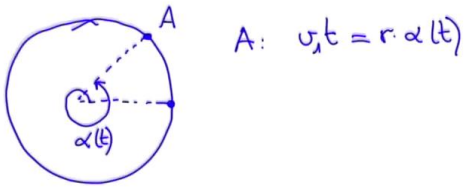
On va les appeler A et B sur un circuit circulaire de rayon 30m, et ils vont prendre leur départ en ce point ici. Le premier coureur A va courir avec une vitesse constante v1 qui vaut 1m/s, et le coureur B, plus rapide, va courir avec une vitesse v2 qui vaut 1,4m/s. Les coureurs prennent le départ ensemble. Il est clair que le coureur B ira plus vite, il va devancer au bout d'un moment le coureur A. On voit très bien, ils prennent le départ. B va plus vite, il s'approche de A une première fois et là le dépasse. Notre problème est le suivant, nous voulons déterminer tous les instants où le coureur B dépasse le coureur A.

Notes

Summary

8m 51s

Exemple : deux coureurs (solution)



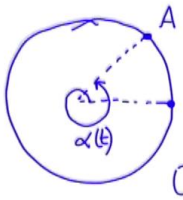
Alors considérons le circuit. Le voici : ici le point de départ, et le coureur A qui se met à courir. Voici sa position à un certain instant. Pour obtenir la position de ce coureur, nous allons nous servir de l'angle au centre correspondant. Donc là le coureur a parcouru un certain angle, un premier tour, et un peu plus. Cet angle, je vais l'appeler α, et il dépend évidemment du temps, que nous allons décompter en secondes. Pour le coureur A je peux écrire la relation suivante : regardons quel est le chemin parcouru en un laps de temps de t secondes. Je connais sa vitesse v1, et si je la multiplie par le temps, j'obtiens le chemin parcouru. Il est sur ce cercle r de rayon 30. Alors nous avons appris à calculer la longueur d'un arc sur un cercle de rayon r et nous savons qu'il suffit de multiplier r par l'angle au centre correspondant. Il est vrai que cette relation, nous l'avions établie uniquement pour des angles compris entre 0 et 2π. Mais vous pouvez réfléchir un instant : cette relation sera toujours valable même si on cumule des tours avec α, nous décomptons du reste ici l'angle α, de façon positive, tout comme la vitesse v1 donc cette relation est valable.

Notes

Summary

10m 05s

Exemple : deux coureurs (solution)



A : $v_1 t = r \cdot \alpha(t) \Rightarrow \alpha(t) = \frac{v_1}{r} t$

B : $v_2 t = r \cdot \beta(t) \Rightarrow \beta(t) = \frac{v_2}{r} t$

On cherche : T tels que $\alpha(T) = \beta(T) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Donc $\frac{v_1}{r} T = \frac{v_2}{r} T + k \cdot 2\pi$

$T = k \cdot \frac{2\pi r}{v_1 - v_2}$

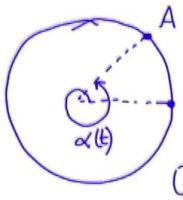
Elle permet d'écrire une formule pour α(t) donné par v1 divisé par le rayon fois le temps t en secondes. Pour le coureur B, j'ai un raisonnement tout à fait analogue : cette fois-ci je vais appeler l'angle au centre correspondant β, j'en déduis comme précédemment que β(t)=v2/r*t. Alors qu'est-ce qu'on cherche ? Tous les instants T tels que... J'aimerais avoir les deux coureurs A et B au même endroit, c'est-à-dire que sur un cercle trigonométrique P(α) et P(β) coïncident. Cela signifie que les deux angles sont égaux, mais mod 2π. Donc l'angle α qui dépend de T majuscule est donné par l'angle β qui dépend lui aussi de T plus un multiple k entier de 2π, élément de Z. Alors on peut introduire les relations que nous avons ici dans cette relation, et nous obtenons de cette façon v1/r*T*=*v2/r*T+k2π. Cette équation en T majuscule peut être résolue, on obtient que T=k*2πr divisé par la différence de vitesse v1-v2. On peut introduire les valeurs connues : pour r nous avons 30m donc nous avons 60π, la différence de vitesse vaut moins 0,4 et j'ai encore le facteur k qui reste, cela va me faire -150 fois k fois π.

Notes

Summary

11m 52s

Exemple : deux coureurs (solution)



A : $v_1 t = r \cdot \alpha(t) \Rightarrow \alpha(t) = \frac{v_1}{r} t$

B : $v_2 t = r \cdot \beta(t) \Rightarrow \beta(t) = \frac{v_2}{r} t$

On cherche : T tels que $\alpha(T) = \beta(T) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Donc $\frac{v_1}{r} T = \frac{v_2}{r} T + k \cdot 2\pi$

$$T = k \cdot \frac{2\pi r}{v_1 - v_2} = -\frac{60\pi}{0.4} k = -150 k \pi$$

1er dépassement : $T_1 = 150\pi$, le n-ième : $T_n = 150 \cdot n \cdot \pi$

Remarquons que l'angle β risque d'être plus grand (le coureur B est plus rapide) Donc on peut s'attendre au fait que k va être négatif dans ce cas-là, alors on le voit ici très bien, pour avoir le premier déplacement on prend k négatif égale -1, donc j'écris : le premier dépassement a lieu en un instant T1=150π. Les autres dépassements, le n-ième a lieu en un instant Tn que je peux noter 150Tn.

Notes

Summary

14m 35s

Exemple : aiguilles d'une montre

Exemple

Considérons une horloge (à affichage analogique parfait).
A midi, les 3 aiguilles de cette montre se superposent. Au bout de combien de secondes, les trois aiguilles se superposent à nouveau ?

Considérons un deuxième exemple. Nous allons observer les trois aiguilles d'une montre à affichage analogique parfait, cela signifie qu'à midi ces 3 aiguilles vont se superposer de façon exacte. Nous allons nous poser la question : au bout de combien de secondes les 3 aiguilles se superposeront à nouveau.

Notes

Summary

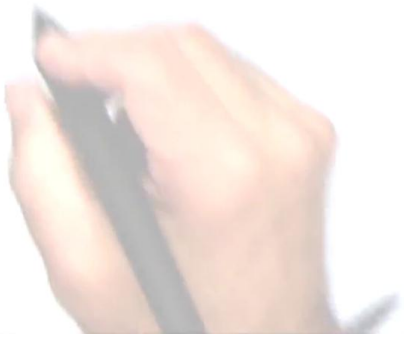
15m 34s

Exemple : aiguilles d'une montre (solution)

$\alpha_h(t) = -\frac{2\pi}{12 \times 60 \times 60} t = \omega t$ avec $\omega = -\frac{2\pi}{12 \times 60 \times 60}$ $\frac{rad}{s}$

(vitesse angulaire)

$\alpha_m(t) = -\frac{2\pi}{60 \times 60} t = 12\omega t$



Donc nous allons décrire le mouvement de l'aiguille des heures à l'aide de l'angle au centre correspondant αh, il dépend du temps t en secondes. On obtient une expression pour αh(t) de la façon suivante : le tour complet 2π est parcouru en 12h, donc pour connaître le nombre de radians parcourus par seconde, je dois diviser cette grandeur par 12, par 60, par 60, c'est le nombre de secondes en 12H. Je multiplie ensuite par le nombre de secondes Un signe moins parce que le mouvement des aiguilles est en sens négatif. Cette expression, on l'écrit sous la forme ωt, avec ω (omega) le coefficient qui est devant t, donc ω = 2π/(12x60x60) Les unités ici sont des radians par seconde, on appelle cette grandeur ω la vitesse angulaire. Pour les aiguilles des minutes, on procède d'une façon tout à fait similaire, on a donc l'angle αm qui dépend de t. Cette fois-ci le tour complet est divisé uniquement par 60 par 60. Par 3600s contenues dans une heure. Je multiplie par le nombre de secondes, avec le signe - Si vous comparez avec la ligne supérieure, on obtient cette fois-ci 12ωt. Pour l'aiguille des secondes, un raisonnement tout à fait similaire permet d'écrire 2π divisé par 60 fois t.

Notes

Summary

16m 00s

Exemple : aiguilles d'une montre (solution)

$\alpha_h(t) = -\frac{2\pi}{12\times 60\times 60} t = \omega t$ avec $\omega = -\frac{2\pi}{12\times 60\times 60}$ $\frac{rad}{s}$

(vitesse angulaire)

$\alpha_m(t) = -\frac{2\pi}{60\times 60} t = 12\omega t$

$\alpha_s(t) = -\frac{2\pi}{60} t = 720\omega t$

On cherche : $T > 0$, petit, avec

$$\begin{cases} \alpha_h(T) = \alpha_m(T) \mod 2\pi \\ \alpha_h(T) = \alpha_s(T) \mod 2\pi \\ \alpha_m(T) = \alpha_s(T) \mod 2\pi \end{cases}$$ c.à.d.

$\omega T + k2\pi = 12\omega T$

ω

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Si on regarde, on a encore 60 fois plus, c'est-à-dire 720 ωt. On cherche un instant T majuscule positif le plus petit possible. Qu'est-ce qu'il faut pour que les aiguilles se superposent ? Evidemment, à midi les trois angles valent zéro, le temps s'écoule, lorsque les aiguilles se retrouvent, cela ne signifie pas que les 3 angles sont à nouveau égaux, mais ils vont être égaux entre eux modulo 2π. Je peux par exemple dire que le premier angle est égal au 2eme modulo 2π. Je peux par exemple dire que le premier angle est égal au 3eme modulo 2π. Je peux par également dire que le 2eme est égal au 3eme angle modulo 2π. On aimerait que ces relations soient vérifiées en même temps. Donc je mets une accolade pour regrouper ces 3 équations. Formulé différemment, je peux écrire la 1ère de ces relations de la façon suivante : je vais dire αh(t), c'est ωT, pour les minutes nous avions 12ωT et le modulo 2π signifie que l'on peut rajouter un multiple de 2π à l'un des angles pour obtenir l'autre. Pour la deuxième ligne, je procède de la même façon. Donc j'ai le ωT d'un côté, pour les secondes, j'ai 720ωT et j'ajoute un multiple entier de 2π.

Notes

Summary

17m 49s

Exemple : aiguilles d'une montre (solution)

$\alpha_h(t) = -\frac{2\pi}{12\times60\times60}t = \omega t$ avec $\omega = -\frac{2\pi}{12\times60\times60}$ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

(vitesse angulaire)

$\alpha_m(t) = -\frac{2\pi}{60\times60}t = 12\omega t$

$\alpha_s(t) = -\frac{2\pi}{60}t = 720\omega t$

On cherche : $T>0$, petit, avec

$$\begin{cases} \alpha_h(T) = \alpha_m(T) \mod 2\pi \\ \alpha_h(T) = \alpha_s(T) \mod 2\pi \\ \alpha_m(T) = \alpha_s(T) \mod 2\pi \end{cases} \quad \text{c.à.d.} \quad \begin{cases} \omega T + k2\pi = 12\omega T \\ \omega T + l\cdot 2\pi = 720\omega T \\ 12\omega T + m\cdot 2\pi = 720\omega T \end{cases}$$

$k, l, m \in \mathbb{Z}$

Je ne réutilise pas la même lettre k, je n'ai aucun indice pour que ici j'aie le même multiple de 2π, bien au contraire, si vous réfléchissez un peu, il vont être différents, donc je vais utiliser ici l (L) fois 2π. Pour le dernier, j'ai 12 ωT d'un côté, de l'autre côté pour les secondes, j'ai 720ωT, et entre les deux, j'ai un multiple de 2π que je vais appeler m, fois 2π. Et nous aimerions que k, l et m soient des éléments de Z. Nous allons écrire ce système un peu différemment, nous allons en fait regrouper ce ωT et ce 12ωT pour obtenir 11ωT comparés à k fois 2π.

Notes

Summary

19m 51s

Exemple : aiguilles d'une montre (solution)

$$\begin{cases} 11\omega T = k2\pi \\ 719\omega T = l\cdot 2\pi \\ 708\omega T = m\cdot 2\pi \end{cases}$$ avec $T>0$, petit, $k,l,m \in \mathbb{Z}$ négatifs, car $\omega < 0$

Il en découle

$$\frac{11\omega T}{719\omega T} = \frac{k2\pi}{l\cdot 2\pi}$$

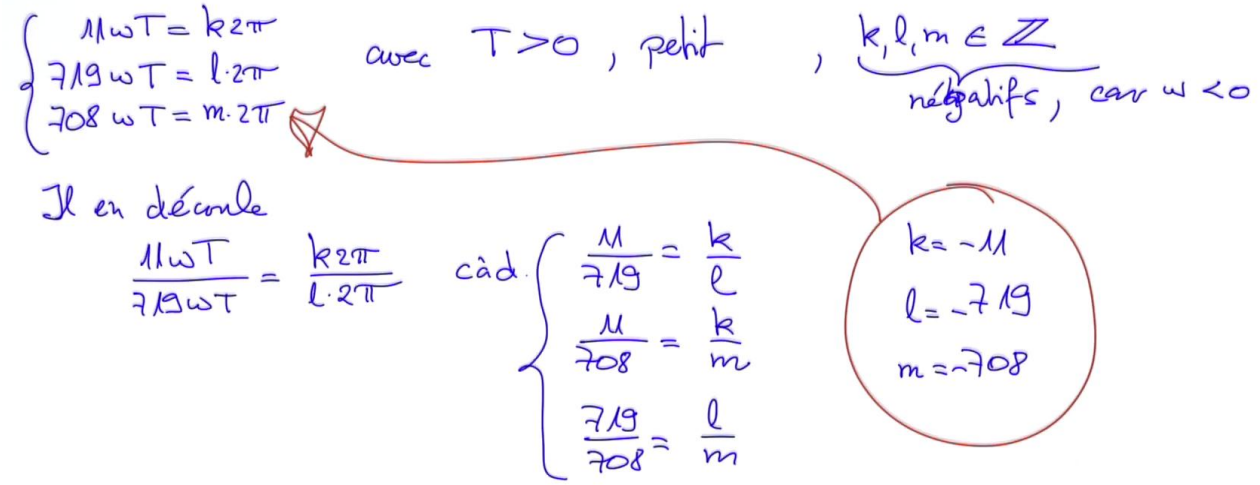
Alors si vous le faites vous allez obtenir le résultat suivant : 11ωT et il va rester k fois 2π. Vous passez ce ωT simplement de l'autre côté. De façon similaire, vous allez obtenir 719ωT donnent l fois 2π. Là, le ωT passe de l'autre côté et donne 719ωT. Et finalement vous obtenez encore 708ωT = m2π. Alors, qu'est-ce qu'on aimerait ? Je vous le rappelle, avec T positif, on attend jusqu'à ce que les trois aiguilles d'une montre se superposent pour la première fois, donc T, j'aimerais qu'il soit petit, et j'aimerais que les grandeurs k, l et m soient dans Z. On remarque ici : ω est négatif, T est positif, donc ce produit, 11ωT est négatif, donc il faut s'attendre au fait que k est négatif, de même l et m sont négatifs, donc je peux écrire que ces grandeurs sont négatives. Alors comment procéder pour résoudre ce système ? Nous allons nous servir de l'approche suivante : nous allons comparer la première et la 2ème équation. Il en découle : si je divise les 11ωT par 719ωT, j'obtiens la même chose que sur la droite : k fois 2π divisé par l sur 2π. L'avantage ici, c'est que sur la gauche les termes ωT vont se simplifier sur la droite les 2π vont se simplifier.

Notes

Summary

20m 44s

Exemple : aiguilles d'une montre (solution)



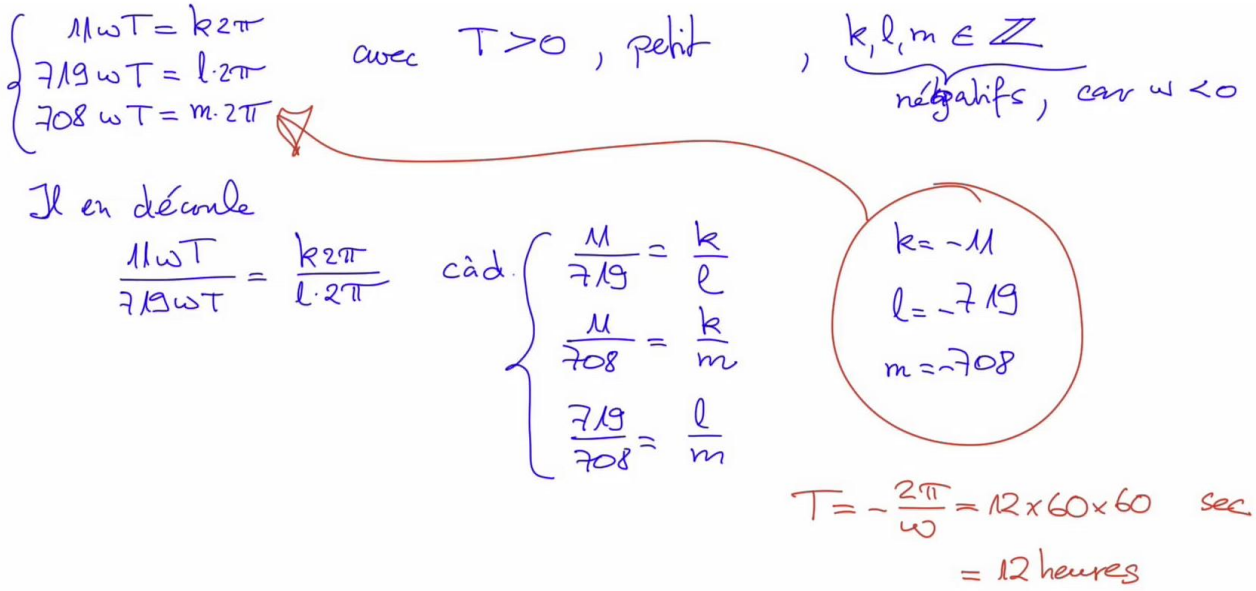
C'est-à-dire ce qui va me rester, c'est 11 sur 719 = k divisé par l. Je peux procéder de la même façon, et par exemple comparer la première de ces équations et la dernière. Je vais obtenir 11/708 = k/m. Finalement en comparant la 2ème et la 3ème, je vais obtenir 719/708 égale l/m. Voilà ces 3 relations qui découlent de mon système. Vous verrez que k est en face de 11, l est en face de 719, m en face du 708, je rappelle que k l m sont négatifs, donc je pourrais imaginer que je prends k=-11, l=-719, là je vérifie la première de ces relations, les signes négatifs vont disparaître. Donc c'est parfait, évidemment on cherche à avoir T petit, cela signifie que k l et m doivent être aussi proche que possible de zéro. Alors ici vous avez une fraction 11/719 qu'on ne peut pas simplifier, donc ça, c'est l'optimum que vous pouvez avoir, et un raisonnement similaire va vous amener, pour m, la valeur de 708 munie du signe moins, là encore les fractions 11/708 et 719/708 ne peuvent pas être simplifiées donc là il s'agit de k, l et m les plus proches de zéro. Alors ces valeurs-là, on va les mettre dans le système. Qu'est-ce que je vais obtenir ?

Notes

Summary

22m 55s

Exemple : aiguilles d'une montre (solution)



Trois fois le même T, vous pouvez vérifier c'est simplement, k vaut -11, et ce qui va rester c'est ω, je vous rappelle que ω est négatif, vous introduisez la valeur ω que nous avions trouvé précédemment et ce qui va vous rester c'est 12 fois 60 fois 60 secondes, c'est-à-dire que vous obtenez 12h, donc que les trois aiguilles de cette montre se superposeront à nouveau au bout de 12h exactement.

Notes

Summary

25m 02s

Proposition : Mouvement circulaire uniforme

Proposition

Un mouvement circulaire à vitesse de rotation uniforme est décrit par l'horaire

$$\alpha(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha(t) := \omega\, t, \qquad (\text{"vitesse"} \times \text{"temps"} = \text{"distance parcourue"})$$

où ω est une constante appelée vitesse angulaire (mesurée en $\frac{[\text{radians}]}{[\text{unité de temps}]}$).

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Je trouve que ça c'est un fait assez remarquable sur les horloges, qui découle des calculs que nous avons faits dans les 2 exemples précédents : celui des 2 coureurs tout comme celui des aiguilles de la montre. Dans les deux cas nous avions un mouvement circulaire à vitesse de rotation uniforme, et dans les deux cas nous avions obtenu pour finir un horaire qui a la forme suivante : α(t) t donné en secondes, un nombre réel, et on obtient par le produit ωt l'angle correspondant. Remarquez bien que cette structure ωt, ω s'appelle une vitesse angulaire, mesurée en radian par unité de temps (par seconde pour les aiguilles), et on a ici une structure très similaire. J'ai une vitesse angulaire fois le temps : on a usuellement vitesse fois le temps - distance parcourue, c'est tout à fait la même structure de formule que l'on obtient.

Notes

Summary

25m 47s

Proposition : Mouvement circulaire uniforme

Proposition

Un mouvement circulaire à vitesse de rotation uniforme est décrit par l'horaire

$$\alpha(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha(t) := \omega\, t, \qquad (\text{"vitesse"} \times \text{"temps"} = \text{"distance parcourue"})$$

où ω est une constante appelée vitesse angulaire (mesurée en $\frac{[\text{radians}]}{[\text{unité de temps}]}$).

La fréquence du mouvement est donnée par

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \text{(nombre de tours par unité de temps).}$$

La grandeur

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(temps nécessaire pour un tour complet).}$$

est appelée période du mouvement.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Une grandeur qui est liée au mouvement, est la fréquence. C'est le nombre de tours par unité de temps ici ω me donne les radians par unité de temps. Si je divise ces radians par 2π je vais avoir le nombre de tours par unité de temps, et c'est ce que les physiciens appellent la fréquence du mouvement. Une autre grandeur, c'est celle de période du mouvement, T majuscule, pas celui que j'ai utilisé dans les exercices précédents. La période est le temps nécessaire pour faire un tour complet. Il faut se poser la question : ω fois combien de T donne un premier tour complet, ç'est-à-dire 2π ? Donc j'ai ωT=2π. Ce qui me donne 2π/ω. Si vous comparez avec la formule pour la fréquence vous verrez que la période c'est simplement un sur la fréquence.

Notes

Summary

26m 56s

Le cercle trigonométrique

Ce que nous avons appris :

- Le modèle standard “cercle trigonométrique” ;
- La fonction $\alpha \mapsto P(\alpha)$;
- L'équation $P(\alpha) = P(\beta)$ et ses applications (mouvement circulaire uniforme) ;
- La vitesse angulaire, la fréquence et la période d'un mouvement circulaire uniforme.

Prochaine étape :

- Autres façons de mesurer les angles ;
- Symétries sur le cercle trigonométrique.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Résumons quelque peu. Qu'est-ce qu'on a appris aujourd'hui ? Je vous ai présenté le modèle standard du cercle trigonométrique. On avait cette application qui fait correspondre à un angle (mesuré par un nombre réel α) une position P(α) sur le cercle trigonométrique. Nous avons appris à résoudre l'équation P(α)=P(β) et nous avons appliqué cela sur deux exercices : les 2 coureurs et les aiguilles d'une montre, et nous avons décrit dans les deux cas des mouvements circulaires uniformes. Pour de tels mouvements, nous avons introduit les notions de vitesse angulaire ω, de fréquence, le nu, et de période de mouvement. Alors la prochaine fois nous allons parler d'autres façons de mesurer les angles, pas uniquement le radian et nous allons analyser quelques symétries sur le cercle trigonométrique. Ca sera tout pour aujourd'hui, je vous remercie, bonne journée.

Notes

Summary

27m 58s