ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

L'angle et sa mesure

1.3 Le cercle trigonométrique

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

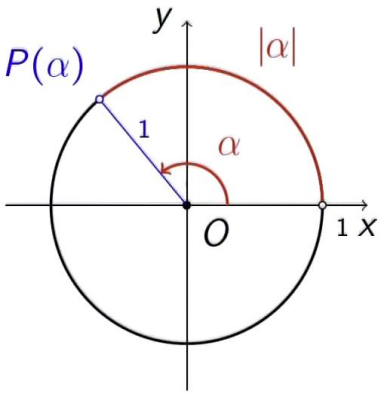
Video

EPFL

Interprétation d'un angle sur le cercle trigonométrique

Étant donné un angle (trigonométrique) $\alpha \in \mathbb{R}$, on lui fait correspondre un point $P(\alpha)$ sur le cercle trigonométrique en faisant tourner le point $(1,0)$ autour de l'origine d'un angle α.
En d'autres termes :

- on déroule la longueur $|\alpha|$ sur le cercle en partant du point $(1,0)$ pour aboutir au point $P(\alpha)$
- si $\alpha > 0$, on déroule dans le sens positif, sinon dans le sens négatif.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Guten Tag. Das letzte Mal haben wir über Winkel gesprochen, über die Winkelmaße in Radianten, wir haben den Begriff trigonometrische Winkel eingeführt, dessen Maß eine beliebige reelle Zahl ist. Heute werde ich Ihnen das zeigen, was man ein Standardmodell für trigonometrische Winkel nennen könnte. Dieses Modell heißt: Einheitskreis. Hierzu werden wir uns einen Plan anschauen, der mit einem rechtwinkligen System mit den Koordinaten x, y versehen ist. Wir haben hier die Koordinate x in der Horizontalen, die Koordinate y in der Vertikalen und den Ursprung dort, wo die Achsen sich überschneiden. Wir betrachten einen Einheitskreis, das heißt, einen Kreis mit einem Radius von 1, dessen Zentrum sich genau am Koordinatenursprung befindet. Wenn wir also einen trigonometrischen Winkel haben, genauer gesagt, wenn sein Maß α ist, mit einem beliebigen reellen Wert, gehen wir wie folgt vor, um mit diesem Winkel α einen Punkt in Einklang zu bringen, den ich mit P(α) bezeichne, ein Punkt, der auf dem Einheitskreis liegt. Und um diesen Punkt zu erhalten, werde ich folgendermaßen vorgehen: Ich gehe vom Punkt (1,0) aus, der hier auf dem Einheitskreis ist, und ich lasse diesen Punkt (1,0) um den Koordinatenursprung eines Winkels α drehen.

Notes

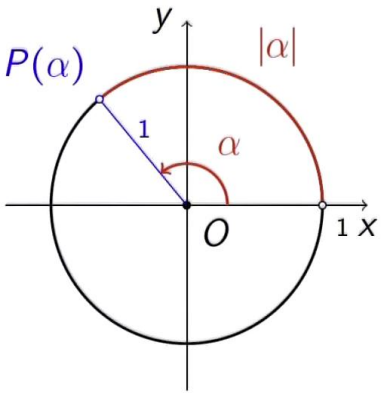
Summary

0m 03s

Interprétation d'un angle sur le cercle trigonométrique

Étant donné un angle (trigonométrique) $\alpha \in \mathbb{R}$, on lui fait correspondre un point $P(\alpha)$ sur le cercle trigonométrique en faisant tourner le point $(1,0)$ autour de l'origine d'un angle α.
En d'autres termes :

- on déroule la longueur $|\alpha|$ sur le cercle en partant du point $(1,0)$ pour aboutir au point $P(\alpha)$
- si $\alpha > 0$, on déroule dans le sens positif, sinon dans le sens négatif.



Wenn Sie eine andere Ausdrucksweise bevorzugen, ich entwickle die Länge |α| - diese Lange hier ist positiv - auf dem Einheitskreis, ausgehend von dem Punkt (1,0), und komme schließlich am Punkt P(α) an. Diesen Ablauf mache ich in positiver Richtung, wenn der Winkel positiv ist; wenn er negativ ist, führe ich ihn in negativer Richtung durch.

Notes

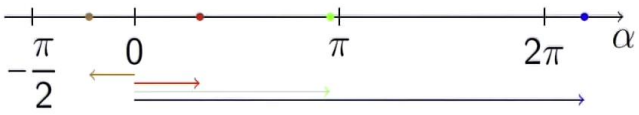
Summary

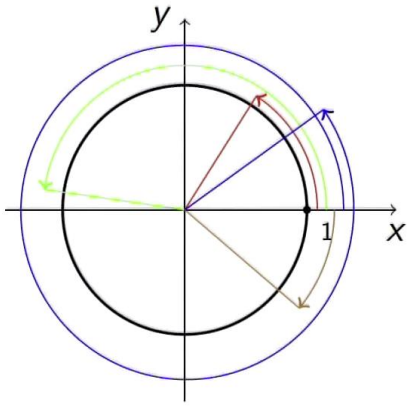
1m 42s

Interprétation d'un angle sur le cercle trigonométrique

On obtient ainsi une application

$$P(\cdot) : \mathbb{R} \to C, \qquad \alpha \mapsto P(\alpha).$$





Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Schauen wir und etwas näher an, was dies bedeutet. Wir haben somit eine Abbildung erhalten. Ich nenne sie P(.) mit einem Punkt, welcher den Wert darstellt, den man in eine Abbildung einfügen kann. Diese Abbildung wird eine reelle Zahl α erhalten, dies ist das Maß eines trigonometrischen Winkels, und wird für uns einen Punkt P(α) auf dem Einheitskreis ergeben. Um etwas näher zu betrachten, was dies für die Winkel α konkret bedeutet, werden wir vielleicht mit dem Wert von α beginnen, der zwischen 0 und π/2 liegt, und entwickle diesen vom Punkt (1,0) aus in positiver Richtung auf dem Einheitskreis, und ende hier beim Punkt P(α) auf dem Einheitskreis. Nehmen wir einen anderen positiven Wert α, jedoch dieses Mal direkt unterhalb von π (π entspricht einem Halbkreis). Dieses Mal entwickle ich diese Länge α in positiver Richtung, die etwas kleiner als π ist, und ende hier beim Punkt P(α. Schauen wir uns an, was passiert, wenn ich für α eine negative Zahl nehme, wir hier in Braun dargestellt. Dieses Mal entwickle ich diese Länge in negativer Richtung vom Punkt (1,0) aus und ende hier beim entsprechenden Punkt P(α). Und schließlich: Was passiert, wenn ich einen Wert α nehme, der größer als 2π ist?

Notes

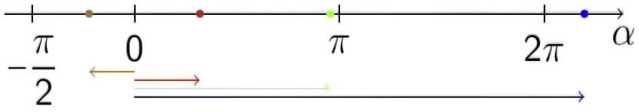
Summary

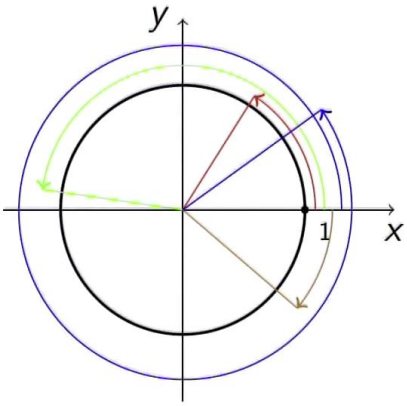
2m 15s

Interprétation d'un angle sur le cercle trigonométrique

On obtient ainsi une application

$$P(\cdot) : \mathbb{R} \to C, \qquad \alpha \mapsto P(\alpha).$$





Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Ich entwickle also diese Länge, die größer als 2π ist, in positiver Richtung, ich werde eine Runde drehen und noch ergänzen, was die 2π überschreitet, und erhalte dann auf dem Einheitskreis die entsprechende position P(α).

Notes

Summary

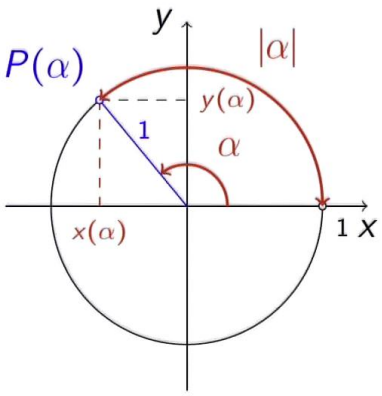
3m 58s

Le point $P(\alpha)$ sur le cercle unitaire

Le point $P(\alpha)$ est situé sur le cercle trigonométrique.

Il possède des coordonnées $x(\alpha)$ et $y(\alpha)$ qui satisfont la relation

$$x^2(\alpha) + y^2(\alpha) = 1.$$



Man kann sofort ein Ergebnis formulieren bezüglich des Punktes P(α) auf dem Einheitskreis. Dieser Punkt... hat zwei Koordinaten: x positiv und y negativ. Diese Koordinaten hängen natürlich von der Wahl von α ab, und deshalb nenne ich sie x(α) und x(α). Nun kann ich das rechtwinklige Dreieck wie folgt betrachten. Er hat die Hypothenuse 1, und wenn ich jetzt das x(α) negativ im Quadrat nehme, erhalte ich $x^2(\alpha)+y^2(\alpha)$, das ergibt für mich eins im Quadrat, somit habe ich das Verhältnis... $x^2(\alpha)+y^2(\alpha)$ ist gleich 1.

Notes

Summary

4m 15s

Proposition

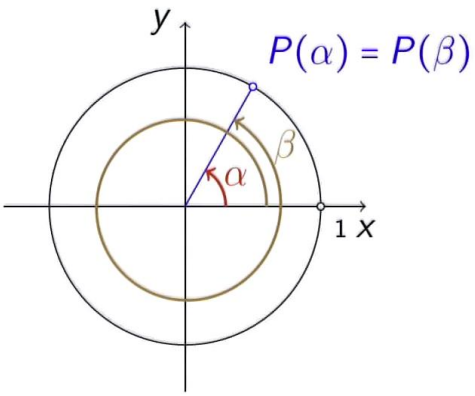
Considérons sur le cercle trigonométrique deux points $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ correspondant aux angles (trigonométriques) α et $\beta \in \mathbb{R}$.

Si les deux points $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ coïncident, alors les angles α et β se différencient d'un nombre entier de tours.

Par cela on entend qu'il existe (exactement) un nombre entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\alpha = \beta + k\,2\pi.$$

Nous écrivons dans ce cas $\alpha = \beta \mod 2\pi$.



Hier ist ein Lösungsvorschlag, den man unmittelbar formulieren kann, sobald man die Definition für diese Abbildung hat, die einem Winkel α entspricht, einem Punkt P(α) auf dem Einheitskreis. Dazu werden wir zwei trigonometrische Winkel α und β nehmen, die zwei reelle Zahlen sind, die diese Winkel bemessen, und ich berücksichtige die beiden entsprechenden Punkte P(α) und P(β). Wir werden annehmen, dass diese beiden Punkte P(α) und P(β) übereinstimmen. Sie befinden sich an derselben Stelle auf dem Einheitskreis. Ich habe hier einen Winkel α, der P(α) bestimmt, und einen Winkel β, der P(β) bestimmt. Es ist sofort erkennbar, dass die Winkel α und β sich durch eine ganze Zahl Umdrehungen unterscheiden. Zum Beispiel füge ich hier nochmals eine Umdrehung von α hinzu, um β zu erhalten, oder im Gegenteil, ich nehme eine Umdrehung von β weg, um α zu erhalten. Genauer gesagt, formulieren wir das folgende Ergebnis: Es gibt (exakt) eine ganze Zahl k, wie etwa α=β+k*2π. In der Figur haben wir k=-1 gewählt. Ich betone die Tatsache, dass k gleich null sein kann, der Wert kann positiv oder negativ sein, wichtig ist jedoch, dass er ganz ist. Man kann dieses Ergebnis auch etwas anders aufschreiben: α=β mod 2π.

Notes

Summary

5m 20s

Proposition : remarques

Proposition

Considérons sur le cercle trigonométrique deux points $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ correspondant aux angles (trigonométriques) α et $\beta \in \mathbb{R}$.

Si les deux points $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ coïncident, alors les angles α et β se différencient d'un nombre entier de tours.

Par cela on entend qu'il existe (exactement) un nombre entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\alpha = \beta + k\,2\pi.$$

Nous écrivons dans ce cas $\alpha = \beta \mod 2\pi$.

Remarquons que, si $\alpha = \beta$, alors on a

$$\alpha = \beta \mod 2\pi.$$

Mais, on ne peut pas remplacer la relation $\alpha = \beta \mod 2\pi$ simplement par $\alpha = \beta$.

Dieses Verhältnis liest sich so: α = β modulo 2π. Das bedeutet also, dass ich α aus β erhalten kann, indem ich ein ganzes, positives oder negatives Vielfaches von 2π addiere. Hier ist eine wichtige Anmerkung angebracht: Natürlich, wenn die Winkel α und β identisch sind, stimmen sie überein. Ich kann auch sagen, dass α = β mod 2π. Ich füge zu β null Mal 2π hinzu. Was Sie im Gedächtnis behalten sollten, ist, dass man nicht andersherum vorgehen kann: Eine Gleichung der Art α = β mod 2π einfach durch α = β zu ersetzen. Die Winkel α und β können in diesem Fall unterschiedlich groß sein.

Notes

Summary

7m 02s

Proposition : solution de l'équation $P(\alpha) = P(\beta)$

Proposition

Considérons un point fixe $P(\alpha)$ sur le cercle trigonométrique.
L'ensemble de tous les angles (trigonométriques) β avec $P(\alpha) = P(\beta)$ est donné par

$$\{\alpha + k\,2\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\},$$

c.à.d. par

$$\{\beta \in \mathbb{R} \ : \ \beta = \alpha \mod 2\pi\}.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Formulieren wir, was wir soeben auf etwas andere Weise gesagt haben: Dieses Mal interessieren wir uns für die Lösung einer Gleichung P(α) = P(β). Hierzu legen wir einen Punkt P(α) fest, also einen gegebenen Winkel α und ermitteln die Menge aller trigonometrischer Winkel β, mit denen die beiden Punkte P(α) und P(β) übereinstimmen. Dies ist das Ergebnis. Die Winkel β sind einfach durch {α+k2π} definiert, wobei k ein Ganzes ist. Man kann dieses Ergebnis auch in der Form schreiben: Es sind alle β in R enthalten, so wie β=α mod 2π. Wenden wir nun dieses Ergebnis auf ein konkretes Beispiel an.

Notes

Summary

7m 57s

Exemple : deux coureurs

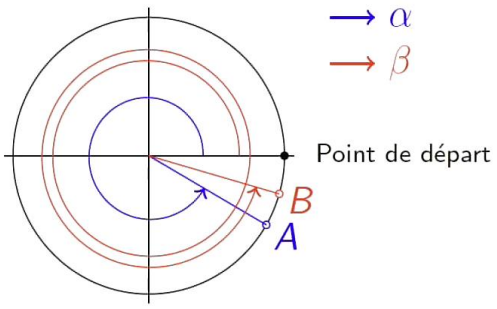
Exemple

Considérons deux coureurs A et B sur un circuit circulaire de rayon $r = 30$m.

- Vitesse du coureur A : $v_1 = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
- vitesse du coureur B : $v_2 = 1.4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Les deux coureurs prennent le départ ensemble au même point.

Déterminer tous les instants où le coureur B dépasse le coureur A.



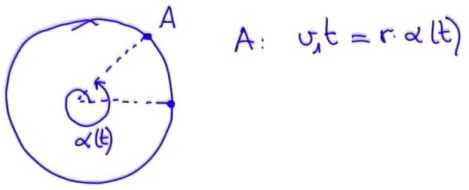
Zwei Läufer. Wir werden sie A und B nennen, auf einem Rundkurs mit 30 m Radius, und sie werden ihren Lauf an diesem Punkt hier starten. Der erste Läufer A wird mit einer konstanten Geschwindigkeit v1 laufen, die 1m/s entspricht, und der Läufer B, der schneller ist, wird mit einer Geschwindigkeit v2 laufen, die 1,4m/s entspricht. Die Läufer starten gemeinsam. Es ist klar, dass der Läufer B schneller sein wird, er wird nach einer Weile den Läufer A überholen. Man sieht sehr gut, wie sie starten. B läuft schneller, nähert sich A zum ersten Mal und überholt ihn. Unser Problem ist folgendes, wir möchten alle Momente bestimmen, in denen der Läufer B den Läufer A überholt.

Notes

Summary

8m 48s

Exemple : deux coureurs (solution)



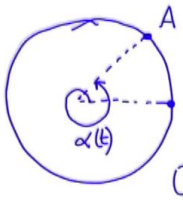
Betrachten wir also den Rundlauf. Hier ist er: Hier ist der Startpunkt, und der Läufer A beginnt zu laufen. Hier ist seine Position in einem bestimmten Moment. Um die Position dieses Läufers zu erhalten, werden wir uns des entsprechenden Winkels im Zentrum bedienen. Hier hat also der Läufer einen bestimmten Winkel durchlaufen, eine erste Runde, und ein wenig mehr. Diesen Winkel werde ich α nennen, und er dauert natürlich Zeit, die wir in Sekunden zählen werden. Für den Läufer A kann ich das folgende Verhältnis schreiben: Schauen wir, welcher der Weg ist, den er in einem Zeitraum von t Sekunden durchlaufen hat. Ich kenne seine Geschwindigkeit v1, und wenn ich diese mit der Zeit multipliziere, erhalte ich den durchlaufenen Weg. Er befindet sich auf diesem Kreis r mit einem Radius von 30. Wir haben also gelernt, die Länge eines Kreisbogens mit Radius r zu berechnen, und wir wissen, dass es genügt, r mit dem Winkel im entsprechenden Zentrum zu multiplizieren. Es stimmt, dass wir dieses Verhältnis nur für die Winkel zwischen 0 und 2π ermittelt haben. Doch überlegen Sie einen Augenblick: Dieses Verhältnis wird immer gelten, auch wenn man die Runden mit α kumuliert, ziehen wir hier den Winkel α vom Rest ab, und zwar positiv, ebenso wie die Geschwindigkeit v1, also ist dieses Verhältnis gültig.

Notes

Summary

10m 05s

Exemple : deux coureurs (solution)



A : $v_1 t = r \cdot \alpha(t) \Rightarrow \alpha(t) = \frac{v_1}{r} t$

B : $v_2 t = r \cdot \beta(t) \Rightarrow \beta(t) = \frac{v_2}{r} t$

On cherche : T tels que $\alpha(T) = \beta(T) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Donc $\frac{v_1}{r} T = \frac{v_2}{r} T + k \cdot 2\pi$

$T = k \cdot \frac{2\pi r}{v_1 - v_2}$

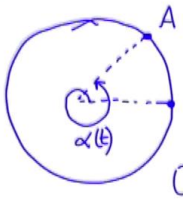
Es ermöglicht das Schreiben einer Formel für α(t), die definiert wird durch v1 geteilt durch den Radius mal die Zeit t in Sekunden. Für den Läufer B habe ich eine Argumentation, die vollkommen analog dazu ist: Dieses Mal werde ich den Winkel im entsprechenden Zentrum β nennen, wovon ich wie zuvor β(t)=v2/r*t ableite. Also, was suchen wir? Alle Momente T wie etwa... Ich hätte gerne die beiden Läufer A und B am selben Ort, das heißt, auf einem übereinstimmenden Einheitskreis P(α) und P(β). Dies bedeutet, dass die beiden Winkel gleich sind, aber mod 2π. Also ist der Winkel α, der von T mit Großbuchstaben abhängt, durch den Winkel β bestimmt, der seinerseits von T abhängt plus einem Vielfachen ganzen k von 2π, das Bestandteil von Z ist. Also können wir die Verhältnisse einführen, die wir hier in diesem Verhältnis haben, und wir erhalten auf diese Weise v1/r*T=v2/r*T+k2π. Diese Gleichung in T groß geschrieben kann gelöst werden, man erhält T=k*2πr geteilt durch die Differenz der Geschwindigkeit v1-v2. Man kann die bekannten Werte einführen: für r haben wir 30m, also haben wir 60π, die Differenz der Geschwindigkeit entspricht weniger als 0,4 und ich habe noch den Faktor k, der bleibt, dies ergibt -150 mal π.

Notes

Summary

11m 52s

Exemple : deux coureurs (solution)



A : $v_1 t = r \cdot \alpha(t) \Rightarrow \alpha(t) = \frac{v_1}{r} t$

B : $v_2 t = r \cdot \beta(t) \Rightarrow \beta(t) = \frac{v_2}{r} t$

On cherche : T tels que $\alpha(T) = \beta(T) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Donc $\frac{v_1}{r} T = \frac{v_2}{r} T + k \cdot 2\pi$

$$T = k \cdot \frac{2\pi r}{v_1 - v_2} = - \frac{60\pi}{0.4} k = -150 k \pi$$

1er dépassement : $T_1 = 150\pi$, le n-ième : $T_n = 150 \cdot n \cdot \pi$

Merken wir an, dass der Winkel β möglicherweise größer ist (der Läufer B ist schneller). Somit kann man erwarten, dass k in diesem Fall negativ sein wird, also sieht man hier sehr gut, um die erste Bewegung zu erhalten, nimmt man k negativ gleich -1, also schreibe ich: die erste Überholung findet in einem Moment T1=150π statt. Die anderen Überholungen, die n-ten, finden in einem Moment Tn statt, den ich mit 150Tn notieren kann.

Notes

Summary

14m 35s

Exemple : aiguilles d'une montre

Exemple

Considérons une horloge (à affichage analogique parfait).
A midi, les 3 aiguilles de cette montre se superposent. Au bout de combien de secondes, les trois aiguilles se superposent à nouveau ?

Betrachten wir ein zweites Beispiel. Wir werden die drei Zeiger einer Uhr mit analoger Anzeige beobachten, perfekt, dies bedeutet, dass am Mittag diese 3 Zeiger genau übereinander liegen werden. Wir werden uns die Frage stellen: In wie vielen Sekunden die 3 Zeiger erneut übereinander liegen werden.

Notes

Summary

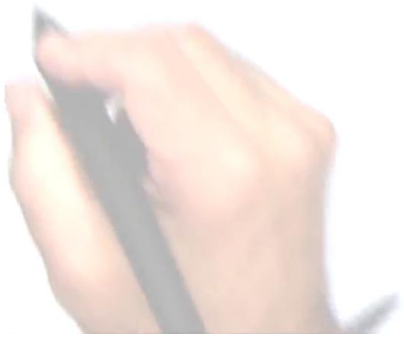
15m 34s

Exemple : aiguilles d'une montre (solution)

$\alpha_h(t) = -\frac{2\pi}{12\times60\times60}t = \omega t$ avec $\omega = -\frac{2\pi}{12\times60\times60}$ $\frac{rad}{s}$

(vitesse angulaire)

$\alpha_m(t) = -\frac{2\pi}{60\times60}t = 12\omega t$



Wir werden also die Bewegung des Stundenzeigers mit Hilfe des Winkels im entsprechenden Zentrum αh beschreiben, er hängt von der Zeit t in Sekunden ab. Man erhält einen Term für αh(t) auf die folgende Weise: Die komplette Umdrehung 2π wird in 12h durchlaufen, um also die Anzahl Radianten zu kennen, die pro Sekunde durchlaufen werden, werde ich diese Größe durch 12 teilen, durch 60, durch 60, es ist die Anzahl Sekunden in 12h. Ich multipliziere dann mit der Anzahl Sekunden. Ein Zeichen weniger, da die Bewegung der Zeiger in negativer Richtung verläuft. Diesen Term schreibt man in Form von ωt, mit ω (omega), dem Koeffizienten, der vor t ist, also ω = 2π/(12x60x60). Diese Einheiten sind Radianten pro Sekunde, man nennt diese Größe ω die Winkelgeschwindigkeit. Für die Minutenzeiger geht man auf ähnliche Weise vor, man hat also den Winkel αm, der von t abhängt. Dieses Mal wird die vollständiger Umdrehung nur durch 60 durch 60 geteilt. Durch 3600s, die in einer Stunde enthalten sind. Ich multipliziere mit der Anzahl Sekunden, mit dem Zeichen -. Wenn Sie das mit der darüber stehenden Linie vergleichen, erhält man dieses Mal 12ωt. Für den Sekundenzeiger ermöglicht ein völlig ähnlicher Gedankengang, 2π geteilt durch 60 mal t zu schreiben.

Notes

Summary

16m 00s

Exemple : aiguilles d'une montre (solution)

$\alpha_h(t) = -\frac{2\pi}{12\times 60\times 60} t = \omega t$ avec $\omega = -\frac{2\pi}{12\times 60\times 60}$ $\frac{rad}{s}$

(vitesse angulaire)

$\alpha_m(t) = -\frac{2\pi}{60\times 60} t = 12\omega t$

$\alpha_s(t) = -\frac{2\pi}{60} t = 720\omega t$

On cherche : $T > 0$, petit, avec

$$\begin{cases} \alpha_h(T) = \alpha_m(T) \mod 2\pi \\ \alpha_h(T) = \alpha_s(T) \mod 2\pi \\ \alpha_m(T) = \alpha_s(T) \mod 2\pi \end{cases}$$ c.à.d.

$\omega T + k2\pi = 12\omega T$

Wenn man sich das anschaut, hat man sogar 60 Mal mehr, also 720 ωt. Man sucht einen Zeitpunkt T groß geschrieben positiv, der so klein wie möglich ist. Was ist nötig, damit die Zeiger sich übereinander legen? Natürlich ergeben die drei Winkel mittags null, die Zeit verstreicht, wenn die Zeiger sich wiederfinden, dies bedeutet nicht, dass die 3 Zeiger erneut gleich stehen, doch sie werden untereinander beim Modulo 2π gleich stehen. Ich kann zum Beispiel sagen, dass der erste Winkel mit dem 2. Modulo 2π gleich ist. Ich kann zum Beispiel sagen, dass der erste Winkel mit dem 3. Modulo 2π gleich ist. Genauso kann ich sagen, dass der 2. mit dem 3. Winkel Modulo 2π gleich ist. Vorzugsweise möchte man diese Bezüge in derselben Zeit überprüfen. Also setze ich eine geschweifte Klammer, um diese 3 Gleichungen neu zu gruppieren. Anders ausgedrückt, kann ich die 1. dieser Verhältnisse folgendermaßen schreiben: Ich werde αh(t) schreiben, das macht ωT, für die Minuten, die wir haben, 12ωT und Modulo 2π bedeutet, dass man ein Vielfaches von 2π zu einem der Winkel hinzufügen kann, um den anderen zu erhalten. Für die zweite Linie gehe ich auf dieselbe Weise vor.

Notes

Summary

17m 49s

Exemple : aiguilles d'une montre (solution)

$\alpha_h(t) = -\frac{2\pi}{12\times 60\times 60} t = \omega t$ avec $\omega = -\frac{2\pi}{12\times 60\times 60}$ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

(vitesse angulaire)

$\alpha_m(t) = -\frac{2\pi}{60\times 60} t = 12\omega t$

$\alpha_s(t) = -\frac{2\pi}{60} t = 720\omega t$

On cherche : $T > 0$, petit, avec

$$\begin{cases} \alpha_h(T) = \alpha_m(T) \mod 2\pi \\ \alpha_h(T) = \alpha_s(T) \mod 2\pi \\ \alpha_m(T) = \alpha_s(T) \mod 2\pi \end{cases} \quad \text{c.à.d.} \quad \begin{cases} \omega T + k\,2\pi = 12\omega T \\ \omega T + l\cdot 2\pi = 720\omega T \\ 12\omega T + m\cdot 2\pi = 720\omega T \end{cases}$$

$k, l, m \in \mathbb{Z}$

Also habe ich das ωT einerseits für die Sekunden, ich habe 720ωT und füge eine vielfache ganze Zahl von 2π hinzu. Ich verwende nicht denselben Buchstaben k wieder, ich habe keinen Hinweis, dass ich hier dasselbe Vielfache von 2π habe, im Gegenteil, wenn Sie ein wenig überlegen, werden sie verschieden sein, also werde ich hier (L) mal 2π verwenden. Für Letzteres habe ich 12 ωT auf der einen Seite, auf der anderen Seite für die Sekunden habe ich 720ωT, und zwischen beiden habe ich ein Vielfaches von 2π, das ich m nennen werde, mal 2π. Und wir hätten gerne, dass k, l und m Bestandteile von Z sind. Wir werden dieses System ein bisschen anders schreiben, tatsächlich werden wir dieses ωT und dieses 12ωT neu gruppieren, um 11ωT verglichen mit k mal 2π zu erhalten.

Notes

Summary

19m 40s

Exemple : aiguilles d'une montre (solution)

$$\begin{cases} 11\omega T = k2\pi \\ 719\omega T = l\cdot 2\pi \\ 708\omega T = m\cdot 2\pi \end{cases}$$ avec $T>0$, petit, $k,l,m \in \mathbb{Z}$ négatifs, car $\omega < 0$

Il en découle

$$\frac{11\omega T}{719\omega T} = \frac{k2\pi}{l\cdot 2\pi}$$

Wenn Sie dies also tun, werden Sie das folgende Ergebnis erhalten: 11ωT, und es wird k mal 2π übrig bleiben. Sie verschieben dieses ωT einfach auf die andere Seite. Auf ähnliche Weise werden Sie 719ωT ergibt l mal 2π erhalten. Hier kommt ωT auf die andere Seite und ergibt 719ωT. Und schließlich erhalten Sie noch 708ωT = m2π. Also, was möchten wir haben? Ich erinnere Sie daran, mit T positiv wartet man, bis die drei Zeiger einer Uhr sich zum ersten Mal überlagern, also T, ich hätte gerne, dass dieser Wert klein ist, und möchte, dass die Größen k, l und m innerhalb von Z sind. Zu bemerken ist hier: ω ist negativ, T ist positiv, also ist dieses Produkt, 11ωT, negativ, also muss man erwarten, dass k negativ ist, ebenso wie l und m negativ sind, also kann ich schreiben, dass diese Größen negativ sind. Wie also vorgehen, um dieses System zu lösen? Wir werden uns dem auf die folgende Weise annähern: Wir werden die erste und 2. Gleichung miteinander vergleichen. Daraus folgt: Wenn ich die 11ωT durch 719ωT dividiere, erhalte ich das Gleiche wie auf der rechten Seite: k mal 2π, geteilt durch l auf 2π. Der Vorteil ist hier, dass auf der linken Seite die Elemente ωT sich vereinfachen werden, auf der rechten Seite sich die 2π vereinfachen werden.

Notes

Summary

20m 44s

Exemple : aiguilles d'une montre (solution)

$$\begin{cases} 11\omega T = k2\pi \\ 719\omega T = l\cdot 2\pi \\ 708\omega T = m\cdot 2\pi \end{cases}$$ avec $T>0$, petit, $k,l,m \in \mathbb{Z}$ négatifs, car $\omega < 0$

Il en découle

$$\frac{11\omega T}{719\omega T} = \frac{k2\pi}{l\cdot 2\pi}$$ càd $$\begin{cases} \frac{11}{719} = \frac{k}{l} \\ \frac{11}{708} = \frac{k}{m} \\ \frac{719}{708} = \frac{l}{m} \end{cases}$$

$k=-11$

$l=-719$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

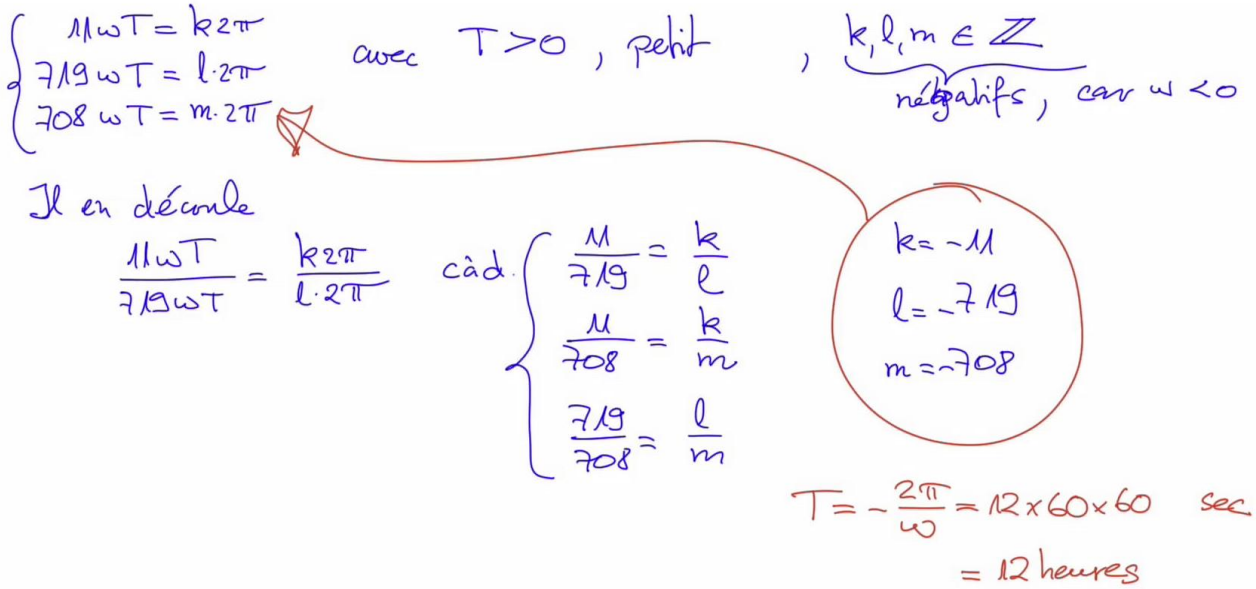
Das heißt, was mir bleiben wird, ist 11 auf 719 = k geteilt durch l. Ich kann auf dieselbe Weise vorgehen, und zum Beispiel die erste dieser Gleichungen mit der letzten vergleichen. Ich werde 11/708 = k/m erhalten. Schließlich werde ich durch Vergleichen der 2. und 3. Gleichung 719/708 ist gleich l/m erhalten. Hier sind diese 3 Verhältnisse, die sich aus meinem System ableiten. Sie werden sehen, dass k gegenüber von 11 steht, l steht gegenüber 719, m gegenüber von 708, ich erinnere daran, dass k l m negativ sind, also kann ich mir vorstellen, dass ich k=-11 nehme, l=-719, hier überprüfe ich die erste dieser Verhältnisse, die negativen Zeichen werden verschwinden. Also ist das perfekt, natürlich wollen wir einen kleinen Wert T haben, dies bedeutet, dass k l und m so nah wie möglich an Null sein sollen. Also haben Sie hier einen Bruch 11/719, den man nicht vereinfachen kann, also ist dies das Optimum, das wir erreichen können, und ein ähnlicher Denkvorgang wird uns für m den Wert 708 verbunden mit dem Minuszeichen bringen, auch hier können die Brüche 11/708 und 719/708 nicht vereinfacht werden, also handelt es sich hier um die k, l und m, die am nächsten an Null dran sind.

Notes

Summary

22m 55s

Exemple : aiguilles d'une montre (solution)



Also werden wir diese Werte in das System setzen. Was werde ich erhalten? Drei Mal dasselbe T, Sie können dies sehr einfach nachprüfen, k ist -11, und was übrig bleiben wird, ist ω, ich erinnere Sie daran, dass ω negativ ist, Sie führen den Wert ω, den wir zuvor gefunden haben, ein, und was uns bleiben wird, ist 12 mal 60 mal 60 Sekunden, das heißt, Sie erhalten 12h, also dass sich die drei Zeiger dieser Uhr erneut nach 12h genau überlagern werden.

Notes

Summary

24m 54s

Proposition : Mouvement circulaire uniforme

Proposition

Un mouvement circulaire à vitesse de rotation uniforme est décrit par l'horaire

$$\alpha(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha(t) := \omega\, t, \qquad (\text{"vitesse"} \times \text{"temps"} = \text{"distance parcourue"})$$

où ω est une constante appelée vitesse angulaire (mesurée en $\frac{[\text{radians}]}{[\text{unité de temps}]}$).

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Ich finde, dass dies eine reichlich bemerkenswerte Tatsache auf den Uhren ist, die sich aus den Berechnungen ergeben, die wir in den 2 vorigen Beispielen gemacht haben: Die der 2 Läufer ebenso wie die der Uhrzeiger. In beiden Fällen haben wir eine Kreisbewegung mit gleichmäßiger Rotationsgeschwindigkeit, und in beiden Fällen haben wir letztlich einen Zeitraum erhalten, der wie folgt aussieht: α(t) t gegeben in Sekunden, eine reelle Zahl, und man erhält durch das Produkt ωt den entsprechenden Winkel. Beachten Sie, dass diese Struktur ωt sehr ähnlich ist. ω bezeichnet eine Winkelgeschwindigkeit, gemessen in Radiant pro Zeiteinheit (pro Sekunden für die Zeiger), und man hat hier eine sehr ähnliche Struktur. Ich habe eine Winkelgeschwindigkeit mal die Zeit: Normalerweise hat man Geschwindigkeit mal die Zeit - zurückgelegte Entfernung, das ist vollkommen die selbe Formelstruktur, die man erhält.

Notes

Summary

25m 47s

Proposition : Mouvement circulaire uniforme

Proposition

Un mouvement circulaire à vitesse de rotation uniforme est décrit par l'horaire

$$\alpha(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha(t) := \omega\, t, \qquad (\text{"vitesse"} \times \text{"temps"} = \text{"distance parcourue"})$$

où ω est une constante appelée vitesse angulaire (mesurée en $\frac{[\text{radians}]}{[\text{unité de temps}]}$).

La fréquence du mouvement est donnée par

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \text{(nombre de tours par unité de temps).}$$

La grandeur

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(temps nécessaire pour un tour complet).}$$

est appelée période du mouvement.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Eine Größe, die an die Bewegung geknüpft ist, ist die Frequenz. Das ist die Anzahl Umdrehungen pro Zeiteinheit, hier gibt mir ω die Radianten pro Zeiteinheit. Wenn ich diese Radianten durch 2π teile, werde ich die Anzahl Umdrehungen pro Zeiteinheit erhalten, und dies ist, was die Physiker die Bewegungsfrequenz nennen. Eine andere Größe ist die Bewegungsdauer T mit Großbuchstaben, nicht das, was ich in den obigen Übungen verwendet habe. Dieser Zeitraum ist die Zeit, die nötig ist, um eine komplette Umdrehung zu machen. Man muss sich die Frage stellen: ω mal wie viele T ergibt eine erste vollständige Umdrehung, das heißt 2π? Also habe ich ωT=2π. Was mir 2π/ω gibt. Wenn Sie mit der Formel für die Frequenz vergleichen, werden Sie erkennen, dass der Zeitraum ganz einfach Eins auf die Frequenz ist.

Notes

Summary

26m 56s

Le cercle trigonométrique

Ce que nous avons appris :

- Le modèle standard “cercle trigonométrique” ;
- La fonction $\alpha \mapsto P(\alpha)$;
- L'équation $P(\alpha) = P(\beta)$ et ses applications (mouvement circulaire uniforme) ;
- La vitesse angulaire, la fréquence et la période d'un mouvement circulaire uniforme.

Prochaine étape :

- Autres façons de mesurer les angles ;
- Symétries sur le cercle trigonométrique.

Fassen wir etwas zusammen. Was haben wir heute gelernt? Ich habe Ihnen das Standardmodell des Einheitskreises gezeigt. Wir hatten diese Abbildung, die einem Winkel entspricht (gemessen durch eine reelle Zahl α), eine Position P(α) auf einem Einheitskreis. Wir haben gelernt, die Gleichung P(α)=P(β zu lösen, und haben dies angewendet auf zwei Übungen: die 2 Läufer und die Zeiger einer Uhr, und wir haben in beiden Fällen die gleichmäßigen Kreisbewegungen beschrieben. Für solche Bewegungen haben wir die Werte für die Winkelgeschwindigkeit ω definiert, für die Frequenz, den Prozess, und den Zeitraum der Bewegung Nächstes Mal werden wir also über andere Methoden sprechen, Winkel zu messen, nicht nur den Radianten, und wir werden einige Symmetrien analysieren auf einem Einheitskreis. Das ist alles für heute, ich danke Ihnen für Ihre Aufmerksamkeit, guten Tag.

Notes

Summary

27m 58s