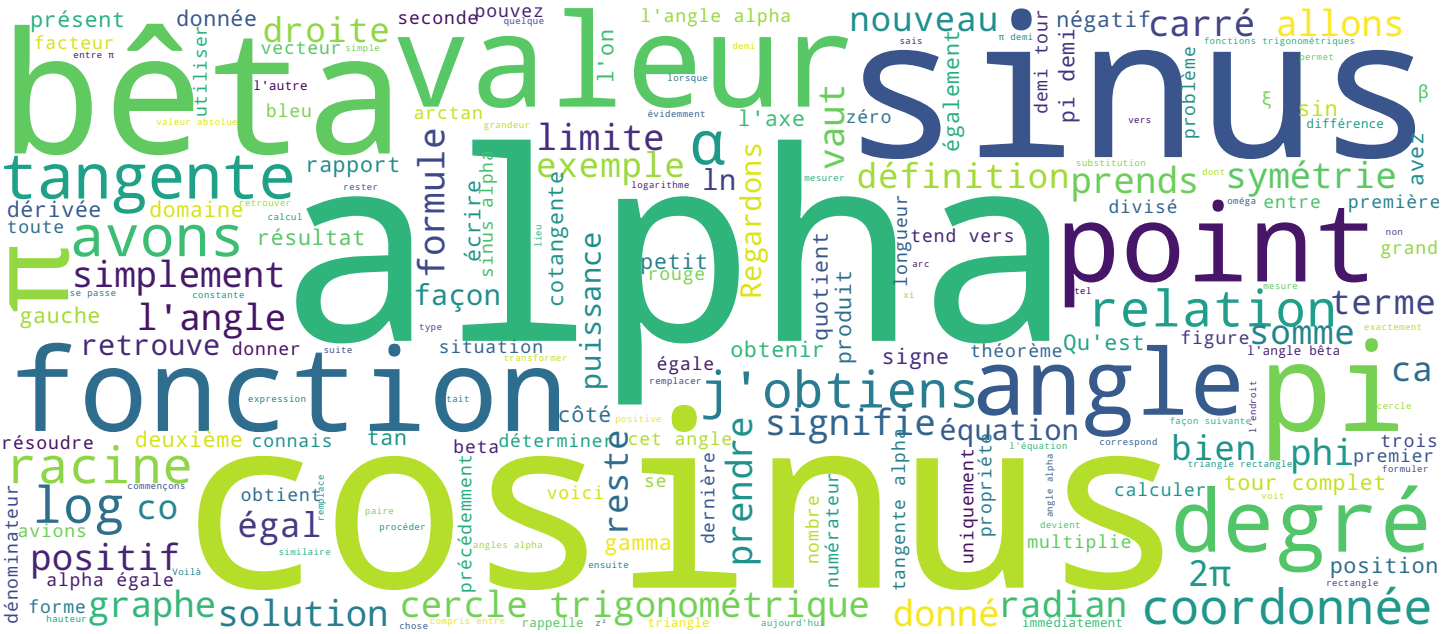
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

L'angle et sa mesure

1.4 Autres mesures d'angle

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



EPFL

Deux unités de mesure : radians et degrés

- Usuellement : nous mesurons les angles en radians.
- Dans la vie courante : on utilise souvent une autre unité, celle des degrés. A cet effet, on subdivise un tour complet en 360 sous-arcs de même longueur.

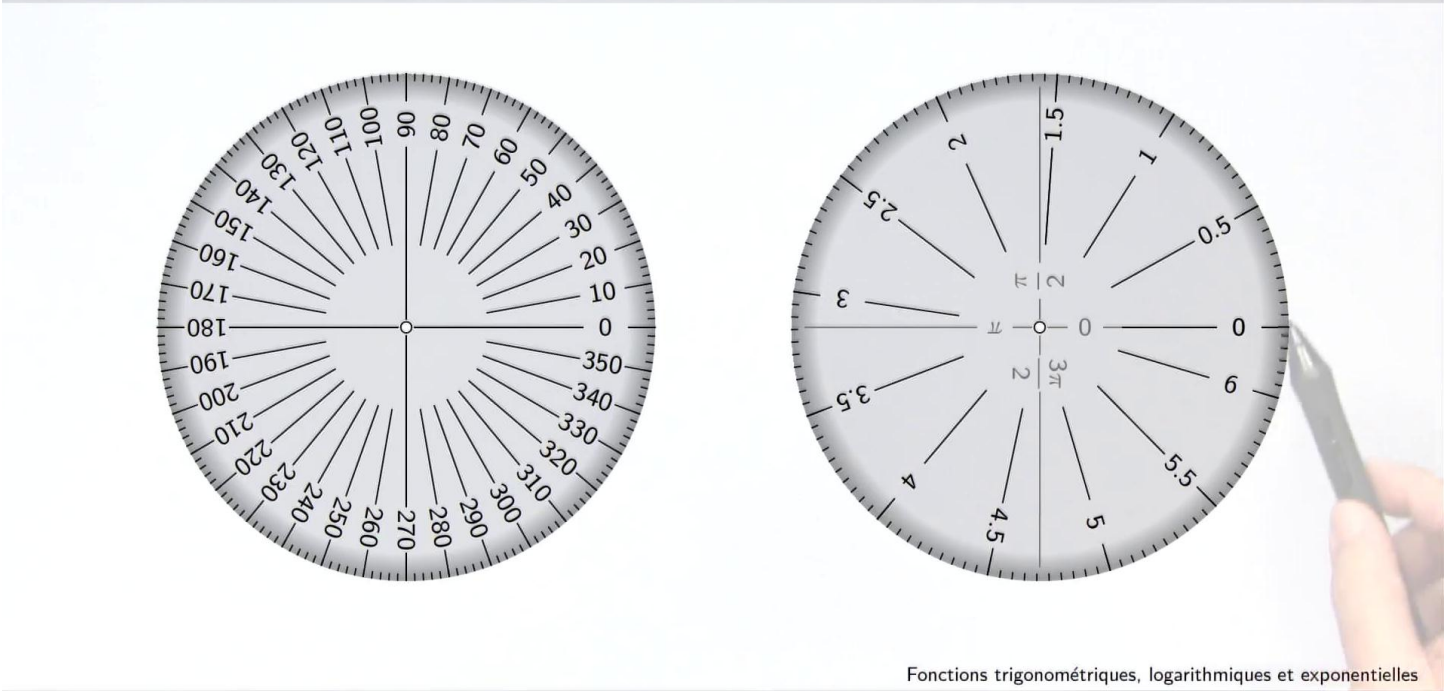
Bonjour La dernière fois, je vous ai présenté le cercle trigonométrique comme un modèle standard pour les angles trigonométriques. Aujourd'hui, je vais vous présenter des symétries sur ce cercle trigonométrique. Mais, avant de le faire, je vais également introduire une autre façon de mesurer les angles. Usuellement, nous mesurons les angles en radians. C'est ce que j'ai présenté la dernière fois. Mais, dans la vie courante, on utilise une autre unité. C'est celle des degrés. On va mesurer un angle en degrés lorsqu'on subdivise un tour complet en 360 sous-arcs de même longueur.

Notes

Summary

0m 05s

Deux unités de mesure - deux rapporteurs



Notes

Summary

0m 50s

La conversion d'une unité à l'autre

et

$360°$ correspondent en radians à 2π

$1°$ correspond en radians à $\frac{2\pi}{360°} = \frac{\pi}{180°}$

$\varphi°$ correspondent en radians à $\frac{\pi}{180°} \cdot \varphi°.$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Ici sur la gauche, vous avez un rapporteur où le tour complet est subdivisé en 360 sous-arcs de même longueur celles de rapporteurs que vous connaissez certainement En radian, on mesure en revanche, l'arc par la longueur sur un cercle unitaire dont le tour complet ici vaut deux pieds Alors, la conversion d'unité pour convertir une unité dans l'autre cela n'est pas une grande affaire et on peut procéder de la façon suivante on va dire que, si j'ai deux pi radians ça, c'est un tour complet en degré, cela fait 306 degrés Si j'ai uniquement un radian, j'ai deux pi fois moins Il me faut donc diviser également ces 306 degrés par deux pi ce qui me donne ce facteur de 180 degré sur pi. Si au lieu de un seul radian, j'ai alpha radians, il me faut multiplier ce 180 degrés par pi par alpha. Voila donc la formule qui me permet de transformer des mesures en radians en mesures en degrés. Dans le sens inverse, le raisonnement est tout à fait similaire. On dit que 360 degrés, le tour complet correspondent à deux pi en radians Si je prend qu'un seul degré j'ai 360 moins, ce qui me donne un facteur pi sur 180 degrés. Et si au lieu de un seul degré j'ai phi degré, je prends ici également phi fois plus. Ce qui me donne alors pi sur 180 degrés fois phi en degrés.

Notes

Summary

0m 51s

La conversion d'une unité à l'autre

Proposition

Si un angle α est mesuré en radians, la mesure correspondante en degrés vaut

$$\alpha^\circ \text{ [mesuré en degrés]} = \underbrace{\frac{180^\circ}{\pi}}_{=\frac{\text{demi-tour en degrés}}{\text{demi-tour en radians}}} \cdot \alpha \text{ [mesuré en radians]}.$$

Si un angle φ est mesuré en degrés, la mesure correspondante en radians vaut

$$\varphi \text{ [mesuré en radians]} = \underbrace{\frac{\pi}{180^\circ}}_{=\frac{\text{demi-tour en radians}}{\text{demi-tour en degrés}}} \cdot \varphi^\circ \text{ [mesuré en degrés]}.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

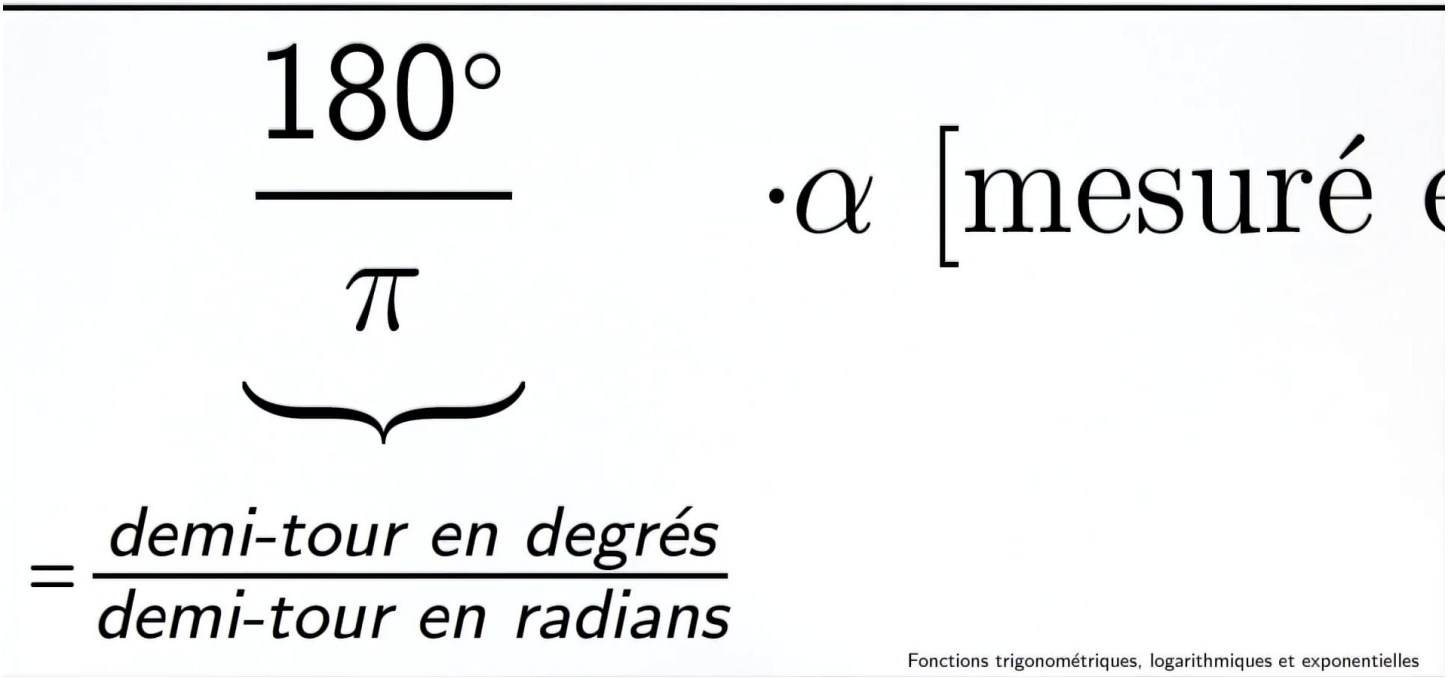
Retenons donc le résultat suivant. Si un angle alpha est mesuré en radians, je peu obtenir le mesure correspondante en degré. Ici alpha mesuré en degré. Je prends 180 degrés par pi fois alpha. Nous avons également établi la correspondante réciproque. Si un angle phi est mesuré en degré la mesure correspondante en radiants vaut donc phi, si je veux le mesurer en radiant je prends pi divisé par 180 degré fois phi mesuré en degré. Si vous comparez cette formule, vous voyez qu'apparait ici une fois le terme 180 sur pi l'autre fois pi sur 180. Comment retenir quel facteur va ou?

Notes

Summary

2m 39s

La conversion d'une unité à l'autre



Regardons ici, j'ai ce quotient 180 degré par pi qui correspond à un demi-tour en degrés divisé par un demi-tour en radians et si je multiplies par l'angle en radians, il reste en quelques sorte l'unité du numérateur qui est degré.

Notes

Summary

3m 27s

La conversion d'une unité à l'autre

Proposition

Si un angle α est mesuré en radians, la mesure correspondante en degrés vaut

$$\alpha^\circ \text{ [mesuré en degrés]} = \underbrace{\frac{180^\circ}{\pi}}_{=\frac{\text{demi-tour en degrés}}{\text{demi-tour en radians}}} \cdot \alpha \text{ [mesuré en radians]}.$$

Si un angle φ est mesuré en degrés, la mesure correspondante en radians vaut

$$\varphi \text{ [mesuré en radians]} = \underbrace{\frac{\pi}{180^\circ}}_{=\frac{\text{demi-tour en radians}}{\text{demi-tour en degrés}}} \cdot \varphi^\circ \text{ [mesuré en degrés]}.$$

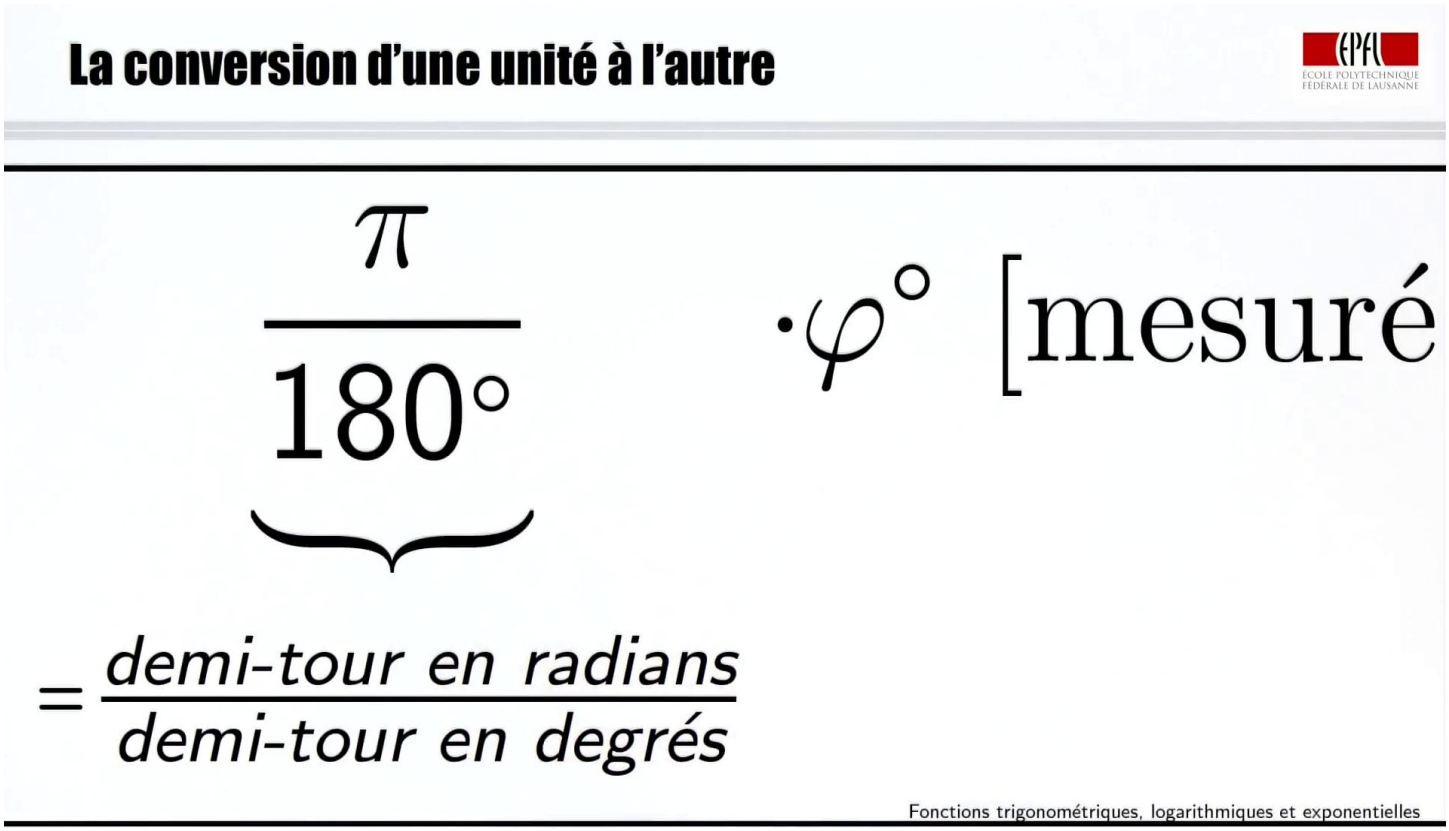
Voila pour la première ligne.

Notes

Summary

3m 50s

La conversion d'une unité à l'autre



Pour la deuxième ligne, j'ai ce quotient pi sur 180 degrés. Pi c'est un demi-tour en radians, 180, c'est le même demi-tour en degré. Et si je multiplies par une mesure d'angle en degrés, il reste comme unité, uniquement l'unité du numérateur qui est le radian.

Notes

Summary

3m 52s

La conversion d'une unité à l'autre

Proposition

Si un angle α est mesuré en radians, la mesure correspondante en degrés vaut

$$\alpha^\circ \text{ [mesuré en degrés]} = \underbrace{\frac{180^\circ}{\pi}}_{=\frac{\text{demi-tour en degrés}}{\text{demi-tour en radians}}} \cdot \alpha \text{ [mesuré en radians]}.$$

Si un angle φ est mesuré en degrés, la mesure correspondante en radians vaut

$$\varphi \text{ [mesuré en radians]} = \underbrace{\frac{\pi}{180^\circ}}_{=\frac{\text{demi-tour en radians}}{\text{demi-tour en degrés}}} \cdot \varphi^\circ \text{ [mesuré en degrés]}.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Cela permet donc de se rappeler assez facilement comment retrouver ce facteur entre radians et degré.

Notes

Summary

4m 10s

Ecriture décimale des degrés

Si l'angle est mesuré en degrés, minutes et secondes, il faut transformer cette expression en écriture décimale.
Nous illustrons ce calcul par un exemple

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Peut être encore une remarque supplémentairement: c'est que quand on est en écriture de degré, usuellement ou souvent, on va utiliser des degrés, des minutes et des secondes. On peut transformer cette écriture de degrés, minutes, secondes. On peut la transformer en écriture décimale.

Notes

Summary

4m 18s

Ecriture en minutes et secondes

Exemple

Considérons un angle de 112.477°. Si on veut exprimer cet angle en degrés, minutes et secondes, on procède de la façon suivante :

$$112.477° = 112° + \underbrace{0.477°}_{= 0.477 \times 60' = 28.62'}$$

$$= 112° \, 28' + \underbrace{0.62'}_{= 0.62 \times 60'' = 37.2''}$$

$$= 112° \, 28' \, 37.2''$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous allons illustrer ça sur un exemple. Considérons donc un angle de 112.477 degrés et essayons d'exprimer cet angle en degrés, minutes et secondes. Nous procédons de la façon suivante: les 112.477 degrés, je les écrie comme 112 degrés plus 0.477 degrés. Les 0.477 degrés, je peux les exprimer en minutes en disant que là, il s'agit de 477 fois 60 minutes. Le produit fait me donne 28.62 minutes. Je peux donc écrire que j'ai 112 degrés, 28 minutes et 0.62 minutes. Ce dernier terme ici, je peux l'écrire comme 0.62 fois 60 secondes, puisqu'une minute contient 60 secondes. J'effectue le produit et j' obtient les 37.2 secondes. Donc, en tout et pour tout, je vais obtenir 112 degrés, 28 minutes et 37.2 secondes. Comme je l'ai dit précédemment Ici, les secondes, on les exprime en dixième de secondes. J'ai deux dixième de secondes qui me restant derrière ces 37 secondes.

Notes

Summary

4m 39s

Les symétries sur le cercle trigonométrique

Les symétries sur le cercle trigonométrique vont jouer un rôle très important dans la compréhension des fonctions trigonométriques.
Considérons sur le cercle trigonométrique deux points

$$P(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha)) \quad \text{et} \quad P(\beta) = (x(\beta), y(\beta)).$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Parlons à présent des symétries sur le cercle trigonométrique. Ces symétries vont jouer un rôle important dans la suite de ce cours. Nous allons considérer en fait deux points différents sur le cercle trigonométrique. Le premier point correspond à un angle alpha Le point p alpha à des coordonnées x alpha et y alpha et j'ai un deuxième angle bêta avec un point p bêta sur le cercle trigonométrique et de coordonnées x bêta et y bêta.

Notes

Summary

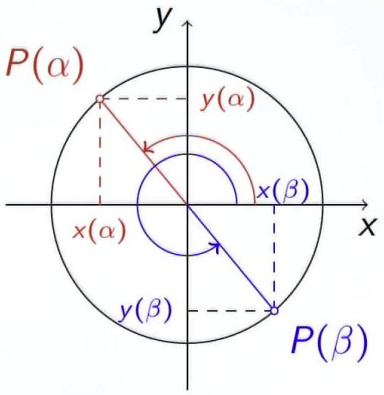
6m 14s

Symétrie centrale sur le cercle trigonométrique

Les deux points
$P(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ et
$P(\beta) = (x(\beta), y(\beta))$
sont diamétralement opposés sur le cercle trigonométrique.

On a

- $x(\alpha) = -x(\beta)$ et $y(\alpha) = -y(\beta)$;
- $\beta - \alpha = \pi \mod 2\pi$, c.à.d. , il existe un nombre entier k avec $\beta = \alpha + \pi + k \cdot 2\pi$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors commençons par une première symétrie. C'est une symétrie centrale sur le cercle trigonométrique. Donc, les deux point p alpha et p bêta sont diamétralement opposés. Regardons ça sur cette figure. J'ai ici P alpha qui est diamétralement opposé j'ai le point p bêta. Nous observons facilement la relation suivante: d'abord, les coordonnées X pour alpha et bêta sont identiques en valeurs absolues, mais ils différent par leurs signes. J'écrie donc, X alpha égale moins X bêta. De même, les coordonnées Y des points P alpha et P bêta sont identiques en valeur absolue ça c'est par la symétrie, mais de signe contraire. J'écris donc Y alpha égale -Y bêta. Comment caractériser cette position des symétries centrales à l'aide des angles alpha et bêta? Nous avons ici un angle alpha pour P alpha. Un angle bêta pour P bêta. Si je fais la différence entre bêta et alpha, ou si je calcule bêta moins alpha, Je vois ici sur la figure que j'obtiens un demi-tour, c'est à dire pi. Cependant, la réponse correcte c'est que la différence bêta moins alpha ou bien pi mais modulo deux pi c'est à dire qu'il existe un nombre entier K tel que bêta est égale à alpha plus pi plus un multiple du tour complet.

Notes

Summary

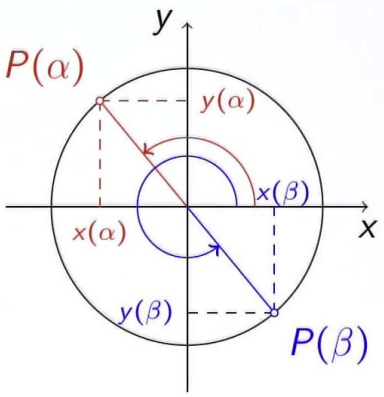
6m 45s

Symétrie centrale sur le cercle trigonométrique

Les deux points
$P(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ et
$P(\beta) = (x(\beta), y(\beta))$
sont diamétralement opposés sur le cercle trigonométrique.

On a

- $x(\alpha) = -x(\beta)$ et $y(\alpha) = -y(\beta)$;
- $\beta - \alpha = \pi \mod 2\pi$, c.à.d. , il existe un nombre entier k avec $\beta = \alpha + \pi + k \cdot 2\pi$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Pourquoi? Simplement une fois que je suis dans la position donnée dans cette figure, je peux par exemple tout à fait remplacer cet angle rouge alpha je peux rajouter un tour complet. Si j'ajoute un tour complet, cela signifie que dans bêta moins alpha, je vais déduire un tour complet.

Notes

Summary

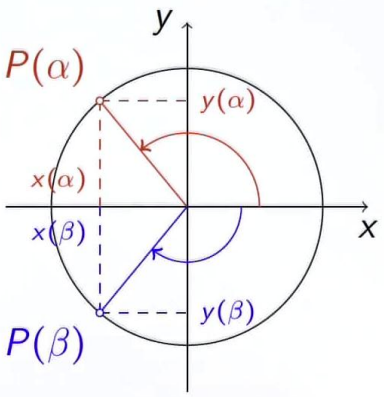
8m 27s

Symétrie d'axe horizontal

Les deux points
$P(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ et
$P(\beta) = (x(\beta), y(\beta))$
sont symétriques par rapport à l'axe des x.

On a

- $x(\alpha) = x(\beta)$ et $y(\alpha) = -y(\beta)$;
- $\beta = -\alpha \mod 2\pi$, c.à.d. , il existe un nombre entier k avec $\beta = -\alpha + k \cdot 2\pi$.



Considérons à présent une autre symétrie. Une symétrie sur l'axe horizontale. Donc, nous allons nous placer dans une situation où P alpha et P bêta sont dans une situation symétrique par rapport à l'axe des X. Regardons ce que cela signifie pour les coordonnées. Je vois immédiatement que si je regardes les coordonnées Y alpha et Y bêta elles sont identiques valeur absolue mais de signes contraires J'ai donc Y alpha égale moins Y bêta. En revanche, pour les coordonnées X, les coordonnées X pour alpha et X pour bêta sont identiques. J'ai donc, X de alpha égale X de bêta. Ça, se ont les relations entre les coordonnées X et Y des point P alpha et P bêta. Essayons encore de formuler ce que signifie une symétrie d'axe horizontale pour les angles alpha et bêta. Nous avons ici l'angle alpha en rouge, l'angle bêta en bleu. Ici, si je compares ces angles, je vois immédiatement que si je prends à la place de alpha, moins alpha, j'ai bêta. Donc, bêta est égale à moins alpha. Mais comme précédemment, je peux évidemment changer chacun des angles alpha et bêta d'un nombre entier de tour complet c'est à dire qu'en fait, je n'ai pas simplement bêta égale moins alpha, mais j'ai bêta égale moins alpha plus un nombre de tour complet.

Notes

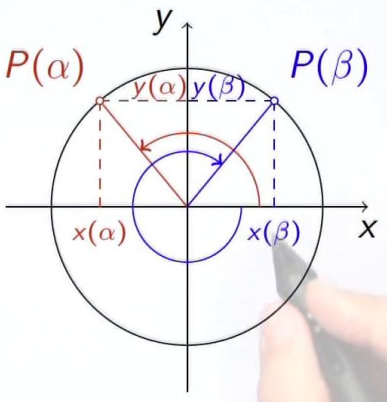
Summary

8m 53s

Symétrie d'axe vertical

Les deux points
$P(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ et
$P(\beta) = (x(\beta), y(\beta))$
sont symétriques par rapport à l'axe des y.
On a

- $x(\alpha) = -x(\beta)$ et $y(\alpha) = y(\beta)$;
- $\beta = \pi - \alpha \mod 2\pi$, c.à.d. , il existe un nombre entier k avec $\beta = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Je peux en effet remplacer ici l'angle alpha par alpha plus deux pi. Regardons encore un troisième type de symétrie. La symétrie d'axe vertical cette fois ci. Là, l'axe des Y. Les points P alpha et P bêta sont symétriques par rapport à cet axe Y. Qu'est ce que cela signifie pour les coordonnées X et Y. Je vois immédiatement que les coordonnées Y sont les mêmes dans les deux cas. Donc j'ai Y alpha égale Y bêta Pour les coordonnées X. ils sont égaux en longueur en valeur absolue, mais de signes contraires. Donc, j'ai X alpha, égale moins X bêta cette fois ci. Ça, ca caractérise une symétrie d'axe verticale. Que signifie cette symétrie pour les angles? Là, si vous regardez la figure, avec les angles inscrits, c'est un peu plus difficile de voir quel est le lien entre l'angle alpha en rouge et l'angle bêta en bleu. Mais vous pourrez obtenir le même position P bêta, si à la place de cet angle bleu, vous prenez par exemple l'angle d'un demi-tour moins alpha. Donc, la relation, ça s'écrit que bêta c'est pi moins alpha. Regardons ce que ça là signifie. Donc, si je prends pi qui est ici, et en suite j'enlève alpha, je suis effectivement ici dans la position correcte qui donne la même position P bêta.

Notes

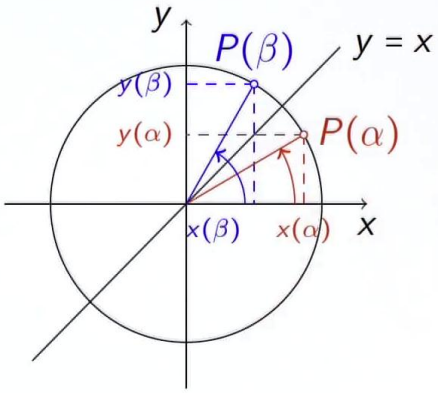
Summary

10m 32s

Symétrie par rapport à la 1re bissectrice

Les deux points
$P(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ et
$P(\beta) = (x(\beta), y(\beta))$
sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation
$y = x$.
On a

- $x(\alpha) = y(\beta)$ et $y(\alpha) = x(\beta)$;



De nouveau, je peux additionner ou soustraire un multiple de tour que ça soit sur bêta ou sur alpha ca signifie qu'une différence du type pi moins alpha qui devrait être égale à bêta devient que bêta c'est pi moins alpha plus K fois deux pi. Terminons par une dernière symétrie. Une symétrie par rapport à la première bissectrice c'est à dire une symetrie par rapport à la droite Y et à l'X. Là, les deux points P(α) et P(β) doivent être dans la position comme indiquée dans la figure. Qu'est ce que cela signifie pour les coordonnées X et Y de ces deux points? Là il faut observer peut être un peu plus finement. Mais je peux m'apercevoir qu'en fait, si je prends la coordonnée X pour le point P alpha, je la retrouve comme coordonnée Y de bêta. J'écrie donc X de alpha égale Y de bêta. De même, si je prends la coordonnée Y ici pour le point P alpha, je retrouve cette même coordonnée mais cette fois ci comme coordonnée X de bêta. J'ai donc X de alpha égale Y de bêta. Donc les deux points interchangent les coordonnées X et Y. Qu'est ce que cela veux dire pour les angles alpha et bêta? L'angle alpha ici rouge, l'angle bêta bleu. Si vous observez cette figure un peu attentivement, vous allez trouver un lien entre ces deux angles.

Notes

Summary

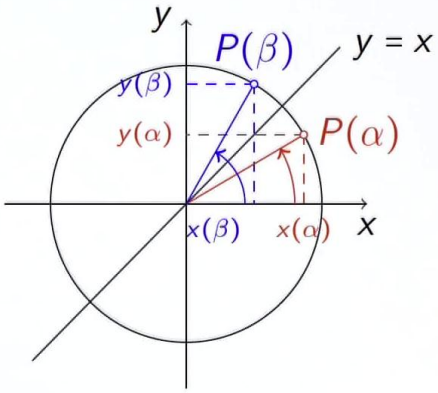
12m 04s

Symétrie par rapport à la 1re bissectrice

Les deux points
$P(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ et
$P(\beta) = (x(\beta), y(\beta))$
sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

On a

- $x(\alpha) = y(\beta)$ et $y(\alpha) = x(\beta)$;
- $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \mod 2\pi$, c.à.d. , il existe un nombre entier k avec $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha + k \cdot 2\pi$.



En fait, vous pouvez retrouver l'angle bêta qui est ici, simplement en prenant un quart de tour pi-demi et en soustrayant l'angle rouge alpha. Donc vous avez bêta égale pi-demi moins alpha. De nouveau, dans une relation de cet type pi-demi moins alpha, vous pourrez changer la valeur de l'angle alpha ou de l'angle bêta, d'un multiple de deux pi. Cela signifie que dans cette relation, vous avez l'ordre d'une relation qui n'est valable que modulo deux pi. C'est à dire qu'il existe un entier K tel que bêta c'est pi-demi moins alpha plus K fois deux pi.

Notes

Summary

13m 37s

L'angle et sa mesure

Ce que nous avons appris :

- Autres façons de mesurer les angles ;
- Symétries sur le cercle trigonométrique.

Prochain Chapitre :

- Définition des fonctions trigonométriques sinus et cosinus

Alors, qu'est ce que nous avons appris aujourd'hui? Je vous ai montré une autre façon de mesurer les angles, c'est à dire en degré et le lien entre degré et radian et j'ai parlé des symétries sur le cercle trigonométrique des symétries qui ont joué un rôle je dirais central dans la suite de ce cours. Dans le prochain chapitre, je vais rentré dans un premier chapitre je dirai dans le premier grand chapitre, c'est celui des fonctions trigonométriques sinus et cosinus.

Notes

Summary

14m 16s

L'angle et sa mesure

Un grand merci d'avoir suivi ce premier chapitre.

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Moi je vous remercie d'avoir suivit ce premier volet ce premier chapitre. Je vous félicite d'avoir suivit ce chapitre. J'adresse aussi un remerciement à mes collaborateurs à Guido Burmeister, à Roger Sauser et à Oliver Woringer. Merci beaucoup. Au plaisir de vous retrouver au chapitre suivant.

Notes

Summary

14m 45s