L'angle et sa mesure

1.4 Autres mesures d'angle

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

EPFL

Deux unités de mesure : radians et degrés

- Usuellement : nous mesurons les angles en radians.
- Dans la vie courante : on utilise souvent une autre unité, celle des degrés. A cet effet, on subdivise un tour complet en 360 sous-arcs de même longueur.

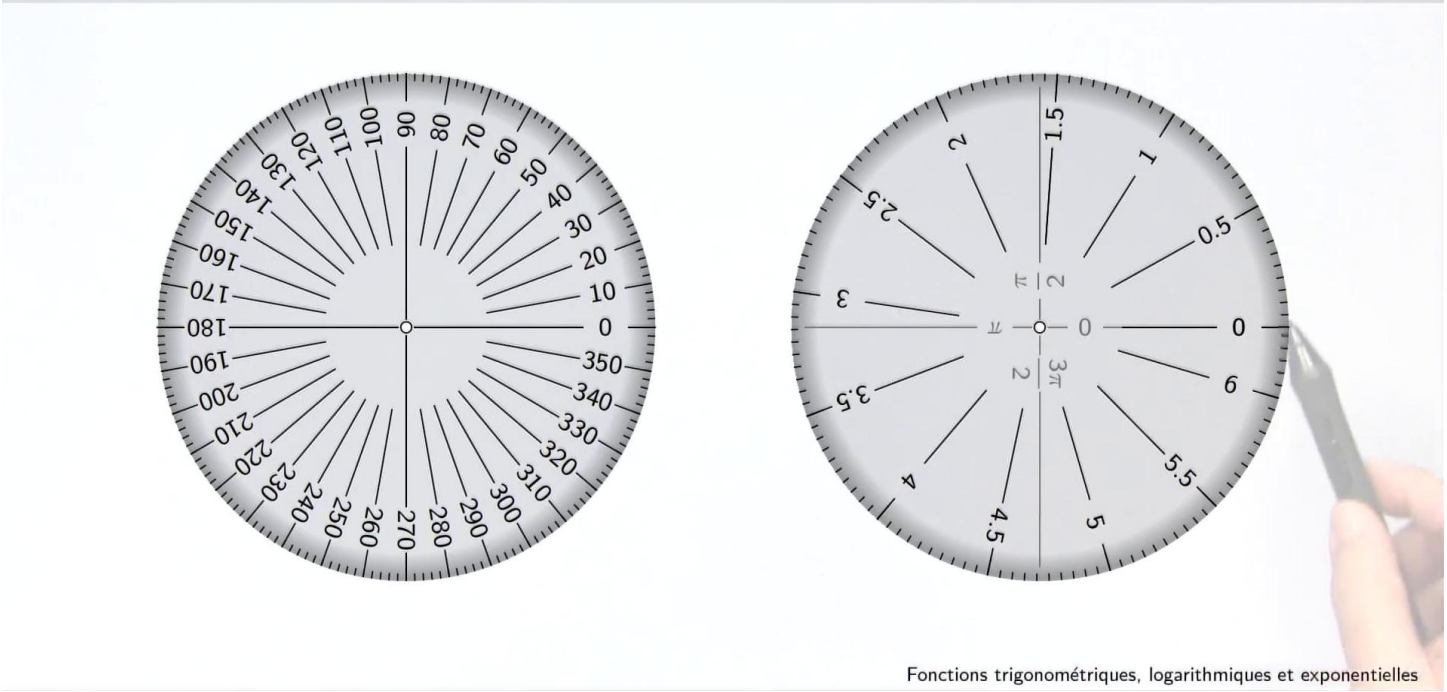
Guten Tag Das letzte Mal habe ich Ihnen den trigonometrischen Kreis gezeigt als ein Standardmodell für trigonometrische Winkel. Heute werde ich Ihnen Symmetrien zu diesem trigonometrischen Kreis zeigen. Aber bevor ich es tue, werde ich auch eine andere Art vorstellen Winkel zu messen. Normalerweise messen wir die Winkel im Bogenmaß. Das habe ich das letzte Mal vorgestellt. Aber im Alltag wird eine andere Einheit verwendet. Die der Grade. Wir werden einen Winkel in Grad messen wenn man eine volle Umdrehung in 360 Teilbögen von der gleichen Länge unterteilt.

Notes

Summary

0m 05s

Deux unités de mesure - deux rapporteurs



Notes

Summary

0m 50s

La conversion d'une unité à l'autre

et

$$360° \quad \text{correspondent en radians à} \quad 2\pi$$

$$1° \quad \text{correspond en radians à} \quad \frac{2\pi}{360°} = \frac{\pi}{180°}$$

$$\varphi° \quad \text{correspondent en radians à} \quad \frac{\pi}{180°} \cdot \varphi°.$$

Hier auf der linken Seite haben Sie einen Winkelmesser wo die volle Umdrehung unterteilt ist in 360 Teilbögen von der gleichen Länge diejenigen der Winkelmesser die Sie sicherlich kennen Als Radiant misst man jedoch den Bogen durch die Länge eines Einheitskreises deren volle Umdrehung hier zwei Fuß ist Dann ist die Einheitenumrechnung um eine Einheit in die andere umzuwandeln keine große Sache und man kann wie folgt vorgehen man kann sagen, dass, wenn ich zwei Pi-Radianten habe ist dies eine volle Umdrehung in Grad, sind dies 306 Grad Wenn ich nur einen Radianten habe, dann habe ich zwei Pi-Mal weniger Deshalb muss ich auch diese 306 Grad durch zwei Pi teilen was den Faktor von 180 Grad auf Pi ergibt. Wenn anstelle eines Radianten, Ich Alpha Radianten habe, muss ich diese 180 Grad multiplizieren mit Pi mal Alpha. Hier ist also die Formel, die mir erlaubt, Messungen in Radianten in Messungen in Grad umzuwandeln. In der entgegengesetzten Richtung ist die Argumentation genau gleich. Man sagt, dass 360 Grad die komplette Umdrehung zwei Pi-Radianten entspricht Wenn ich nur ein Grad nehme habe ich 360 weniger, war mir einen Faktor Pi auf 180 Grad gibt. Und wenn statt eines einzelnen Grads ich phi Grade habe, nehme ich hier auch phi mal mehr. Das gibt mir dann Pi auf 180 Grad mal phi in Grad.

Notes

Summary

0m 51s

La conversion d'une unité à l'autre

Proposition

Si un angle α est mesuré en radians, la mesure correspondante en degrés vaut

$$\alpha^\circ \text{ [mesuré en degrés]} = \underbrace{\frac{180^\circ}{\pi}}_{=\frac{\text{demi-tour en degrés}}{\text{demi-tour en radians}}} \cdot \alpha \text{ [mesuré en radians]}.$$

Si un angle φ est mesuré en degrés, la mesure correspondante en radians vaut

$$\varphi \text{ [mesuré en radians]} = \underbrace{\frac{\pi}{180^\circ}}_{=\frac{\text{demi-tour en radians}}{\text{demi-tour en degrés}}} \cdot \varphi^\circ \text{ [mesuré en degrés]}.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Daher merken wir uns folgendes Ergebnis. Wenn ein Alpha-Winkel in Radianten gemessen wird, kann ich die entsprechende Maßnahme in Grad erhalten. Hier ist Alpha in Grad gemessen. Ich nehme 180 Grad von Alpha mal Pi. Wir haben auch die gegenteilige Entsprechung festgelegt. Wenn ein Winkel Phi in Grad gemessen wird, ist die entsprechende Maßnahme in Radianten und ist daher Phi, wenn ich will Um es als Radiant zu messen nehme ich Pi um 180 Grad dividiert mal Phi in Grad gemessen. Wenn Sie diese Formel vergleichen, sehen Sie das, was hier erscheint einmal den Term 180 auf Pi das andere Mal Pi auf 180 Wie kann man behalten, welcher Faktor wohin gehört?

Notes

Summary

2m 39s

La conversion d'une unité à l'autre

$$\underbrace{\frac{180°}{\pi}}_{=\frac{\text{demi-tour en degrés}}{\text{demi-tour en radians}}} \cdot \alpha \ [\text{mesuré}$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Schauen wir hier, Ich habe diesen Quotienten mit 180 Grad durch Pi der einer halben Umdrehung in Grad dividiert durch eine halbe Umdrehung in Radianten entspricht und wenn ich mit dem Winkel in Radianten multipliziere, bleibt gewissermaßen die Einheit des Zählers, der Grad ist.

Notes

Summary

3m 27s

La conversion d'une unité à l'autre

Proposition

Si un angle α est mesuré en radians, la mesure correspondante en degrés vaut

$$\alpha^\circ \text{ [mesuré en degrés]} = \underbrace{\frac{180^\circ}{\pi}}_{=\frac{\text{demi-tour en degrés}}{\text{demi-tour en radians}}} \cdot \alpha \text{ [mesuré en radians]}.$$

Si un angle φ est mesuré en degrés, la mesure correspondante en radians vaut

$$\varphi \text{ [mesuré en radians]} = \underbrace{\frac{\pi}{180^\circ}}_{=\frac{\text{demi-tour en radians}}{\text{demi-tour en degrés}}} \cdot \varphi^\circ \text{ [mesuré en degrés]}.$$

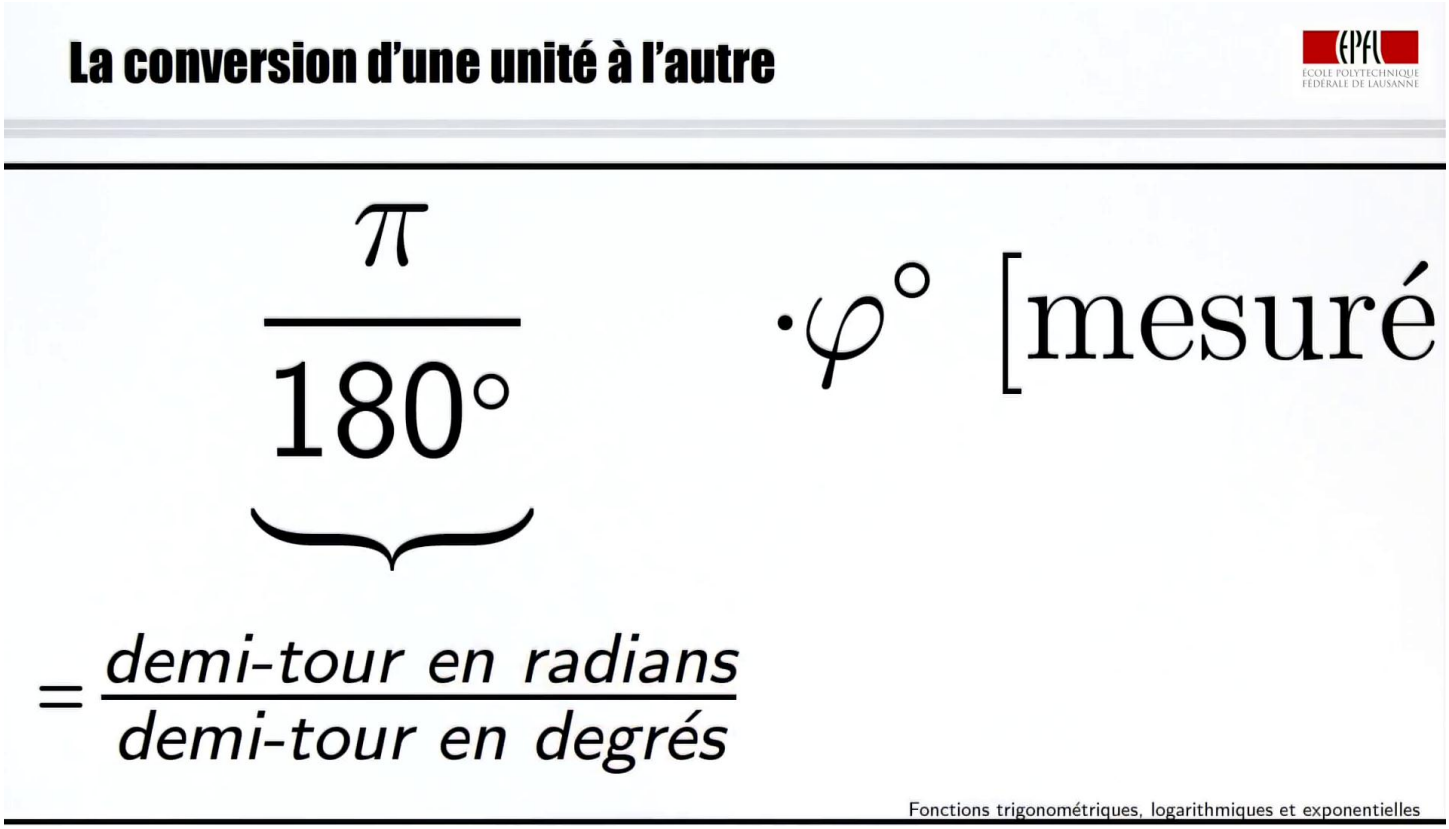
Das ist die erste Zeile.

Notes

Summary

3m 50s

La conversion d'une unité à l'autre



In der zweiten Zeile, habe ich diesen Quotienten Pi auf 180 Grad. Pi ist eine halbe Umdrehung in Radianten, 180 ist die gleiche wiederum in Grad. Und wenn ich eine Winkelmessung in Grad multipliziere, bleibt als Einheit nur die Einheit des Zählers, der der Radiant ist.

Notes

Summary

3m 52s

La conversion d'une unité à l'autre

Proposition

Si un angle α est mesuré en radians, la mesure correspondante en degrés vaut

$$\alpha^\circ \text{ [mesuré en degrés]} = \underbrace{\frac{180^\circ}{\pi}}_{=\frac{\text{demi-tour en degrés}}{\text{demi-tour en radians}}} \cdot \alpha \text{ [mesuré en radians]}.$$

Si un angle φ est mesuré en degrés, la mesure correspondante en radians vaut

$$\varphi \text{ [mesuré en radians]} = \underbrace{\frac{\pi}{180^\circ}}_{=\frac{\text{demi-tour en radians}}{\text{demi-tour en degrés}}} \cdot \varphi^\circ \text{ [mesuré en degrés]}.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Auf diese Weise kann man sich sehr leicht erinnern, wie man den Faktor zwischen Radiant und Grad findet.

Notes

Summary

4m 10s

Ecriture décimale des degrés

Si l'angle est mesuré en degrés, minutes et secondes, il faut transformer cette expression en écriture décimale.
Nous illustrons ce calcul par un exemple

Vielleicht noch eine zusätzliche Bemerkung: das ist so, wie wenn man in Grad schreibt, in der Regel oder häufig, dann benutzt man Grad, Minuten und Sekunden. Wir können diese Grad-, Minuten-, Sekunden-Schreibweise umwandeln. Man kann sie umwandeln in dezimale Schreibweise.

Notes

Summary

4m 18s

Ecriture en minutes et secondes

Exemple

Considérons un angle de 112.477°. Si on veut exprimer cet angle en degrés, minutes et secondes, on procède de la façon suivante :

$$112.477° = 112° + \underbrace{0.477°}_{= 0.477 \times 60' = 28.62'}$$

$$= 112° \, 28' + \underbrace{0.62'}_{= 0.62 \times 60'' = 37.2''}$$

$$= 112° \, 28' \, 37.2''$$

Wir werden es Ihnen mit einem Beispiel zeigen. Betrachten wir also einen Winkel von 112,477 Grad und versuchen wir, diesen Winkel in Grad, Minuten und Sekunden auszudrücken. Wir gehen wie folgt vor: die 112.477 Grad schreibe ich als 112 Grad plus 0,477 Grad Die 0,477 Grad kann ich in Minuten ausdrücken indem man sagt, dass es sich um 477 Mal 60 Minuten handelt. Das Produkt ergibt dann 28,62 Minuten. Also kann ich schreiben, dass ich 112 Grad, 28 Minuten und 0,62 Minuten habe. Dieser letzte Term hier kann ich schreiben als 0,62 Mal 60 Sekunden, da eine Minute 60 Sekunden entsprechen. Ich nehme das Produkt und ich erhalte 37,2 Sekunden. Also, alles in Allem und für alle erhalte ich 112 Grad, 28 Minuten und 37,2 Sekunden. Wie ich hier schon sagte, drückt man die Sekunden in Zehntel-Sekunden aus. Ich habe zwei Zehntel-Sekunden die mir hinter diesen 37 Sekunden verbleiben.

Notes

Summary

4m 39s

Les symétries sur le cercle trigonométrique

Les symétries sur le cercle trigonométrique vont jouer un rôle très important dans la compréhension des fonctions trigonométriques.
Considérons sur le cercle trigonométrique deux points

$$P(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha)) \quad \text{et} \quad P(\beta) = (x(\beta), y(\beta)).$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Bis jetzt haben wir über Symmetrien zu diesen trigonometrischen Kreisen gesprochen. Diese Symmetrien werden eine wichtige Rolle im Folgenden des Kurses spielen. Wir betrachten tatsächlich zwei verschiedene Punkte auf dem trigonometrischen Kreis. Der erste Punkt entspricht einem Alpha-Winkel Der Punkt p alpha hat die Koordinaten x Alpha und y Alpha und ich habe einen zweiten Winkel Beta mit dem Punkt p Beta auf dem trigonometrischen Kreis und die Koordinaten x Beta und y Beta.

Notes

Summary

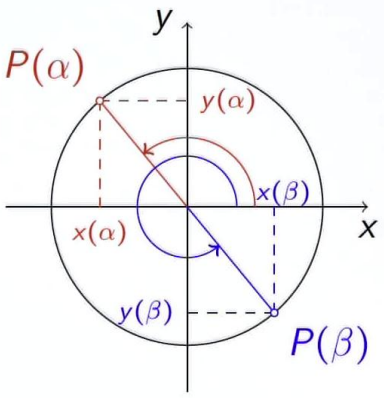
6m 14s

Symétrie centrale sur le cercle trigonométrique

Les deux points
$P(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ et
$P(\beta) = (x(\beta), y(\beta))$
sont diamétralement opposés sur le cercle trigonométrique.

On a

- $x(\alpha) = -x(\beta)$ et $y(\alpha) = -y(\beta)$;
- $\beta - \alpha = \pi \mod 2\pi$, c.à.d. , il existe un nombre entier k avec $\beta = \alpha + \pi + k \cdot 2\pi$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Also beginnen wir mit der ersten Symmetrie. Es ist eine zentrale Symmetrie auf dem trigonometrischen Kreis. Also sind beide Punkte p Alpha und p Beta diametral entgegengesetzt. Lassen Sie uns dies in der Abbildung betrachten. Hier habe ich P Alpha, der diametral entgegengesetzt ist Ich habe den Punkt P Beta. Wir sehen leicht folgende Relation: zuerst die Koordinaten X für Alpha und Beta die in absoluten Werten identisch sind, aber sie unterscheiden sich in ihren Zeichen. Ich schreibe folglich X Alpha gleich minus X Beta. Genauso verhält es sich bei den Y-Koordinaten der Punkte P Alpha und P Beta die in absoluten Werten identisch sind dies ist die Symmetrie, aber mit unterschiedlichen Zeichen. Ich schreibe folglich Y Alpha gleich -Y Beta. Wie kann man diese Position der zentralen Symmetrien mit Hilfe von Alpha- und Beta-Winkeln charakterisieren? Wir haben hier einen Alpha-Winkel für P Alpha. Einen Beta-Winkel für P Beta. Wenn man die Differenz nimmt zwischen Beta und Alpha, oder wenn ich Beta minus Alpha berechne, sehe ich hier auf der Abbildung, dass ich eine halbe Umdrehung, also Pi erhalte.

Notes

Summary

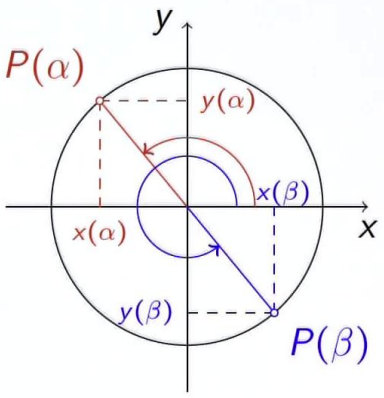
6m 45s

Symétrie centrale sur le cercle trigonométrique

Les deux points
$P(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ et
$P(\beta) = (x(\beta), y(\beta))$
sont diamétralement opposés sur le cercle trigonométrique.

On a

- $x(\alpha) = -x(\beta)$ et $y(\alpha) = -y(\beta)$;
- $\beta - \alpha = \pi \mod 2\pi$, c.à.d. , il existe un nombre entier k avec $\beta = \alpha + \pi + k \cdot 2\pi$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Allerdings die richtige Antwort ist, dass die Differenz Beta minus Alpha oder auch Pi aber Modulo zwei Pi ist das heißt, dass eine ganze Zahl K wie Beta gleich Alpha plus Pi plus ein Vielfaches der vollen Umdrehung existiert. Warum? Einfach, sobald ich in der gegebenen Position in dieser Abbildung bin, kann ich zum Beispiel vollkommen diesen roten Alpha-Winkel ersetzen ich kann eine komplette Umdrehung hinzufügen. Wenn ich eine komplette Umdrehung hinzufüge, bedeutet dies, dass ich in Beta minus Alpha eine komplette Umdrehung abziehe.

Notes

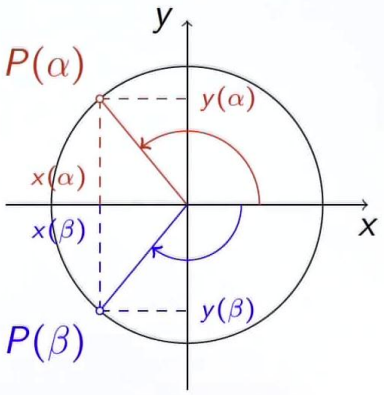
Summary

8m 09s

Symétrie d'axe horizontal

Les deux points
$P(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ et
$P(\beta) = (x(\beta), y(\beta))$
sont symétriques par rapport à l'axe des x.
On a

- $x(\alpha) = x(\beta)$ et $y(\alpha) = -y(\beta)$;
- $\beta = -\alpha \mod 2\pi$, c.à.d. , il existe un nombre entier k avec $\beta = -\alpha + k \cdot 2\pi$.



Betrachten wir nun eine andere Symmetrie. Eine Symmetrie auf der horizontalen Achse. Wir werden uns nun in eine Lage versetzen, wo P Alpha und P Beta in einer symmetrischen Situation sind hinsichtlich der X-Achse. Schauen wir uns an, was es für die Koordinaten bedeutet. Ich sehe sofort, wenn ich die Koordinaten Y Alpha und Y Beta betrachte, dass sie identische absolute Werte haben, aber unterschiedliche Zeichen Ich habe also Y Alpha gleich minus Y Beta Auf der anderen Seite sind für die X-Koordinaten die X-Koordinaten für Alpha und X für Beta identisch. Ich habe also X von Alpha gleich X von Beta. Das sind die Relationen zwischen den Koordinaten X und Y der Punkte P Alpha und P Beta. Versuchen wir zu formulieren, was eine Symmetrie der horizontalen Achse für die Winkel Alpha und Beta bedeutet. Wir haben hier den Alpha-Winkel in rot, den Beta-Winkel in blau. Wenn ich hier diese Winkel vergleiche, sehe ich sofort, dass wenn ich anstelle von Alpha minus Alpha nehme, habe ich Beta. Also ist Beta gleich mit minus Alpha. Aber wie zuvor, kann ich natürlich jeden der Alpha- und Beta-Winkel einer ganzen Zahl von vollen Umdrehungen ändern, das heißt in der Tat, dass ich nicht einfach Beta gleich minus Alpha habe, aber ich habe Beta gleich minus Alpha plus eine Zahl von vollen Umdrehungen.

Notes

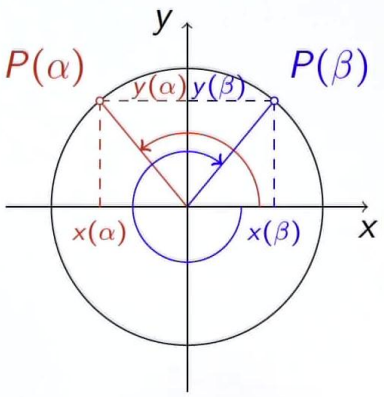
Summary

8m 53s

Symétrie d'axe vertical

Les deux points
$P(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ et
$P(\beta) = (x(\beta), y(\beta))$
sont symétriques par rapport à l'axe des y.
On a

- $x(\alpha) = -x(\beta)$ et $y(\alpha) = y(\beta)$;
- $\beta = \pi - \alpha \mod 2\pi$, c.à.d. , il existe un nombre entier k avec $\beta = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi$.



Ich kann in der Tat hier den Alpha-Winkel durch Alpha plus zwei Pi ersetzen. Betrachten wir noch einen dritten Typ von Symmetrien. Die Symmetrie der vertikalen Achse dieses Mal. Da ist die Y-Achse. Die Punkte P Alpha und P Beta sind symmetrisch zu dieser Y-Achse. Was bedeutet dies für die Koordinaten X und Y. Ich sehe sofort, dass die Y-Koordinaten die gleichen in beiden Fällen sind. Also habe ich Y Alpha gleich Y Beta Für die X-Koordinaten sind sie in der Länge im absoluten Wert gleich, aber mit unterschiedlichen Zeichen. Also habe ich dieses Mal X Alpha gleich minus X Beta. Das charakterisiert eine Symmetrie einer vertikalen Achse. Was bedeutet diese Symmetrie für die Winkel? Wenn Sie die Abbildung hier mit den eingeschrieben Winkeln betrachten, ist es ein wenig schwieriger zu sehen was die Verbindung zwischen dem Winkel Alpha in rot und dem Winkel Beta in blau ist. Aber Sie können die gleiche Position P Beta erhalten, wenn Sie anstelle dieses blauen Winkels zum Beispiel den Winkel einer halben Umdrehung minus Alpha nehmen. Die Verbindung beschreibt, dass Beta Pi minus Alpha ist. Schauen wir uns an, was es bedeutet.

Notes

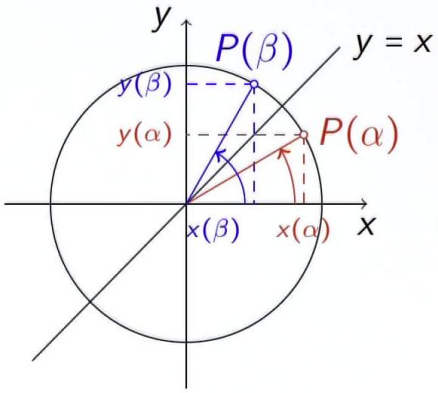
Summary

10m 32s

Symétrie par rapport à la 1re bissectrice

Les deux points
$P(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ et
$P(\beta) = (x(\beta), y(\beta))$
sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation
$y = x$.
On a

- $x(\alpha) = y(\beta)$ et $y(\alpha) = x(\beta)$;



Wenn ich also Pi nehme, das hier ist, und danach Alpha abziehe bin ich in der Tat hier an der korrekten Position die die gleiche Position P Beta ist. Erneut kann ich addieren oder substrahieren ein Vielfaches der Umdrehung ob es Beta oder Alpha ist macht keinen Unterschied des Typs Pi minus Alpha das Beta gleich sein sollte wird zu dem was Beta Pi minus Alpha plus K mal zwei Pi ist. Beenden wir mit einer letzten Symmetrie. Eine Symmetrie hinsichtlich der ersten Winkelhalbierenden das heißt eine Symmetrie hinsichtlich zur Rechten Y und zu X. Da müssen die beiden Punkte P(α) und P(β) in der Position sein wie in der Abbildung angezeigt sein. Was bedeutet sies für die Koordinaten X und Y dieser beiden Punkte? Da muss man vielleicht ein bisschen genauer hinsehen. Aber ich kann erkennen dass in der Tat, wenn ich die Koordinate X für den Punkt P Alpha nehme finde ich sie wie die Koordinate Y von Beta Ich schreibe folglich X von Alpha gleich Y von Beta. Genauso, wenn ich die Koordinate Y hier nehme für den Punkt P Alpha, dann finde ich die gleiche Koordinate aber dieses Mal als Koordinate X von Beta. Ich habe also X von Alpha gleich Y von Beta. Also vertauschen die beiden Punkte die X- und Y-Koordinaten.

Notes

Summary

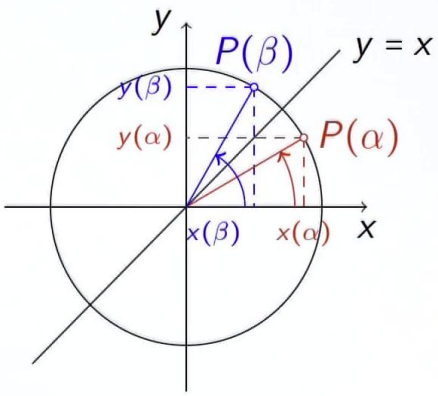
11m 50s

Symétrie par rapport à la 1re bissectrice

Les deux points
$P(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ et
$P(\beta) = (x(\beta), y(\beta))$
sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

On a

- $x(\alpha) = y(\beta)$ et $y(\alpha) = x(\beta)$;
- $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \mod 2\pi$, c.à.d. , il existe un nombre entier k avec $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha + k \cdot 2\pi$.



Was bedeutet dies für die Winkel Alpha und Beta? Der Winkel Alpha hier in rot, der Winkel Beta in blau. Wenn Sie diese Abbildung ein bisschen aufmerksamer betrachten, werden Sie eine Verbindung zwischen den beiden Winkeln finden. Sie können in der Tat den Winkel Beta, der hier ist, einfach finden, indem Sie eine Viertel der Drehung Pi-Halbe nehmen und den roten Winkel Alpha substrahieren. Also haben Sie Beta gleich Pi-Halbe minus Alpha. In einer Beziehung dieses Typs Pi-Halbe minus Alpha wiederum können Sie den Wert des Winkels Alpha oder des Winkels Beta, eines Vielfaches von zwei Pi ändern. Das bedeutet in dieser Beziehung Sie haben die Reihenfolge einer Beziehung die nur Modulo zwei Pi gültig ist. Das heißt, dass ein ganzes K existiert wie Beta es ist, Pi-Halbe minus Alpha plus K mal zwei Pi.

Notes

Summary

13m 22s

L'angle et sa mesure

Ce que nous avons appris :

- Autres façons de mesurer les angles ;
- Symétries sur le cercle trigonométrique.

Prochain Chapitre :

- Définition des fonctions trigonométriques sinus et cosinus

Also, was haben wir heute gelernt? Ich habe Ihnen eine andere Art der Winkelmessung gezeigt, das heißt in Grad und die Verbindung zwischen Grad und Radiant und ich habe von Symmetrien gesprochen, vom trigonometrischen Kreis von Symmetrien, die eine ich sage mal zentrale Rolle spielen im Folgenden des Kurses. Im nächsten Kapitel werde ich im ersten Kapitel zurückkommen Ich würde sagen, im ersten großen Kapitel das ist das der trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus.

Notes

Summary

14m 16s

L'angle et sa mesure

Un grand merci d'avoir suivi ce premier chapitre.

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.

Ich danke Ihnen für das Verfolgen des ersten Teils dieses ersten Kapitels. Ich gratuliere Ihnen, dieses Kapitel verfolgt zu haben. Ich danke auch meinen Mitarbeitern Guido Burmeister, Roger Sauser und Oliver Woringer. Vielen Dank. Ich hoffe, Sie im nächsten Kapitel wiederzusehen.

Notes

Summary

14m 45s