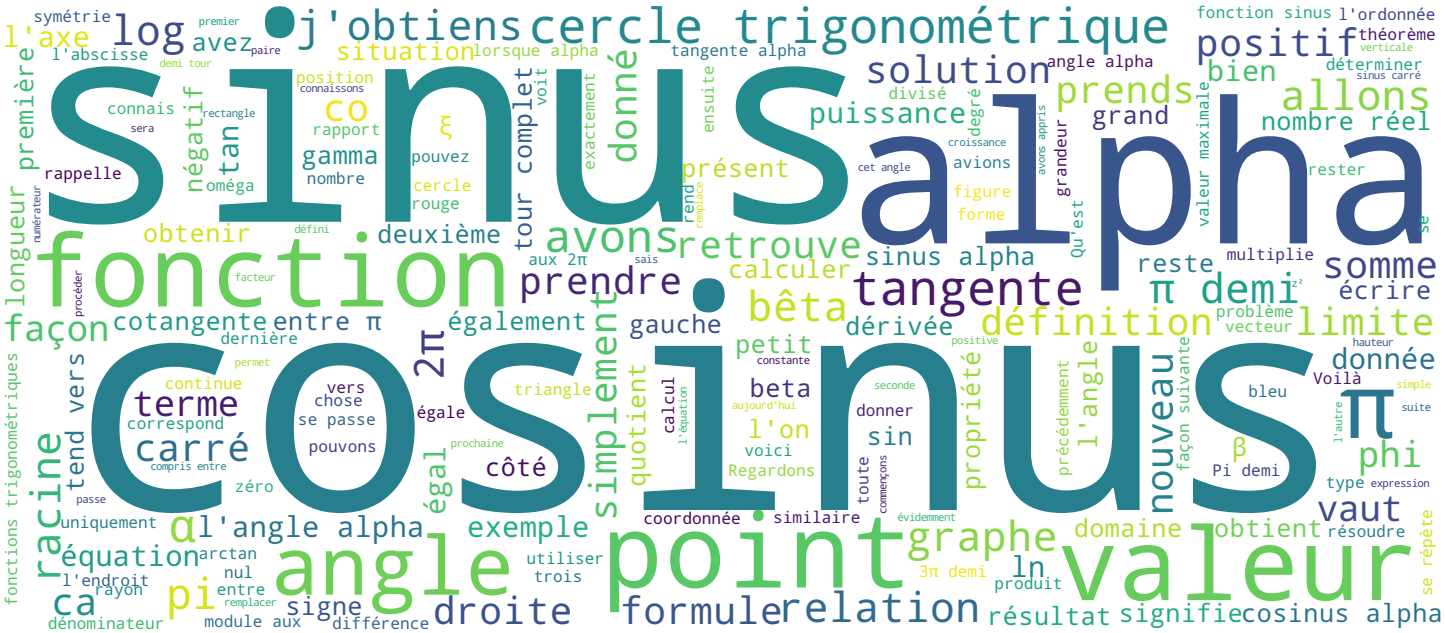
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus et leurs inverses

2.1 Les fonctions sinus et cosinus

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



EPFL

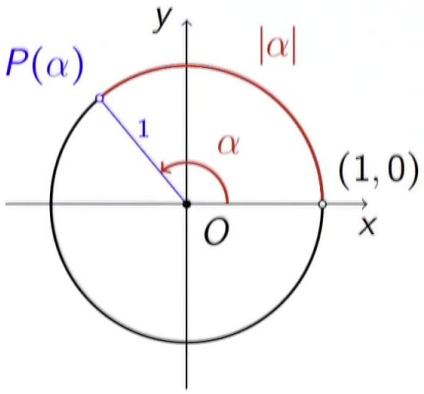
Rappel : le cercle trigonométrique

Nous avons défini une application

$$P(\cdot) : \mathbb{R} \to C, \quad \alpha \mapsto P(\alpha),$$

- C désigne le cercle trigonométrique centré à l'origine O,
- le point $P(\alpha)$ est le point obtenu par rotation du point $(1,0)$ autour de l'origine O d'un angle α (mesuré en radians).

Rappelons que le signe de α détermine le sens de la rotation.



Bonjour Lors des dernières séquences, j'avais introduit le cercle trigonométrique, l'angle trigonométrique, et j'avais parlé à l'époque de briques fondamentales pour la suite. Aujourd'hui, je vais utiliser ces briques fondamentales pour introduire deux fonctions trigonométriques, à savoir le sinus et le cosinus. Mais commençons par rappeler ce qui se passe sur le cercle trigonométrique. Nous avons définit une application, appelée P. Elle prend un angle alpha réel et elle nous rend un point p alpha sur le cercle unitaire, dans un référenciel x - y usuel. Comment est-ce que nous avions obtenu le point P de alpha ? Je vous rappelle, on prenait la valeur absolue de alpha qu'on déroulait depuis le point (1.0) le long du cercle. On déroulait dans le sens positif si alpha était positif. C'est le cas dans cette figure et on déroulait dans l'autre sens si alpha était négatif.

Notes

Summary

0m 05s

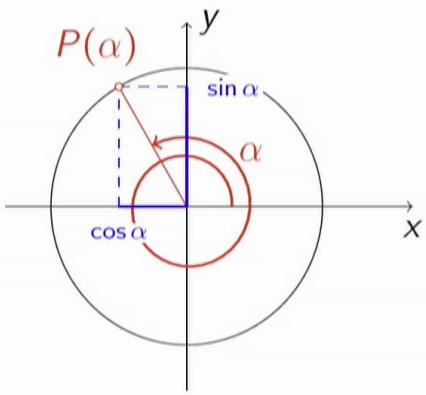
Introduction des fonctions sinus et cosinus

Le point $P(\alpha)$ a pour coordonnées cartésiennes $x(\alpha)$ et $y(\alpha)$.

Il s'avère que dans bien des problèmes, la valeur de ces coordonnées joue un rôle capital.

C'est pourquoi on introduit les notations suivantes :

$$\sin\alpha := y(\alpha) \quad \text{et} \quad \cos\alpha := x(\alpha).$$



On obtenait de cette façon un point P de alpha Nous avions déjà parlé du fait que ce point P de alpha possède des coordonnées x et y. Nous les avions dénommées x alpha et y alpha. Regardons un peu le comportement de ces coordonnées. lorsque nous faisons varier alpha. Dans bien des applications, ces grandeurs x alpha - y alpha jouent un role important, c'est pourquoi nous introduisons la notation pour la coordonnée y l'ordonnée du point P alpha. Nous allons l'appeler sinus alpha.

Notes

Summary

1m 07s

Définition des fonctions sinus et cosinus

Définition

- La fonction *sinus*

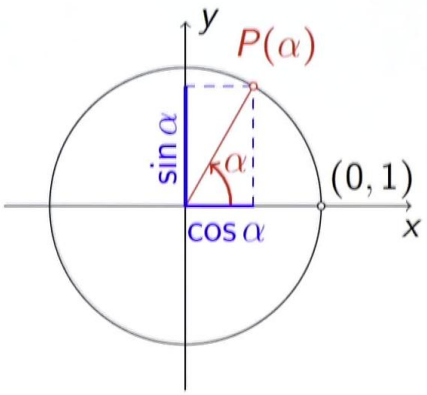
$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \mapsto \sin \alpha$$

est définie par l'ordonnée $y(\alpha)$ du point $P(\alpha)$ sur le cercle trigonométrique.

- La fonction *cosinus*

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \mapsto \cos \alpha$$

est définie par l'abscisse $x(\alpha)$ du point $P(\alpha)$ sur le cercle trigonométrique.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Quant à l'abscisse, coordonnée x de P nous allons l'appeler cosinus Cela nous conduit à la définition suivante : nous allons parler d'une fonction sinus et nous l'abregéons sin. C'est une fonction qui prend un nombre réel et nous rend un nombre réel. Elle prend le nombre réel alpha et nous rend un nombre réel sinus alpha, qui est défini de la façon suivante : nous allons dire que le sinus de alpha est l'ordonnée y alpha du point P alpha. Donc pour l'angle alpha dans cette figure, le point P alpha est sinus alpha, c'est cette grandeur C'est donc une longueur munie d'un signe, comme tout point sur l'axe des y Nous allons parler de la fonction cosinus, on l'abrège par cos Une fonction qui prend un nombre réel alpha. et qui nous rend un nombre réel cosinus alpha. Comment est-ce que ce nombre, rendu cosinus alpha est défini ? Nous allons prendre pour cosinus alpha, l'abscisse x alpha du point P alpha. Donc, ici l'angle alpha, le point P alpha et c'est le cosinus Le cosinus alpha est une longueur munie d'un signe comme tout point sur l'axe des x. Remarquons que, pour l'apprenant cela peut être un peu déçevant de voir ces définitions d'une fonction sinus et cosinus où les lois ne sont pas données par une formule de calcul mais données par une propriété.

Notes

Summary

1m 52s

Définition des fonctions sinus et cosinus

Définition

- La fonction *sinus*

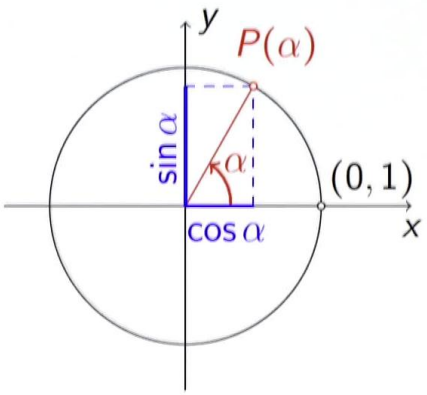
$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \mapsto \sin \alpha$$

est définie par l'ordonnée $y(\alpha)$ du point $P(\alpha)$ sur le cercle trigonométrique.

- La fonction *cosinus*

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \mapsto \cos \alpha$$

est définie par l'abscisse $x(\alpha)$ du point $P(\alpha)$ sur le cercle trigonométrique.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous verrons par la suite que cela est la force des fonctions trigonométriques c'est aussi un point qui rend l'étude et l'utilisation de ces fonctions plus difficile qu'usuellement avec des polynômes ou des fonctions rationnelles bien connues. Regardons comme varie le sinus de alpha donc le sinus d'alpha c'est l'ordonnée du point P alpha Comment le sinus de alpha varie lorsque alpha prend quelques valeurs différentes Alors, regardons ici la figure à gauche.

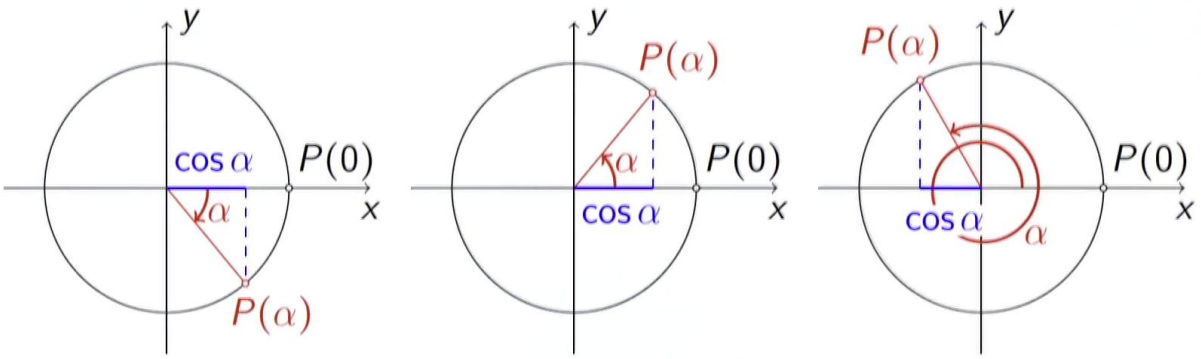
Notes

Summary

3m 32s

Exemples de valeurs de la fonction cosinus

Quelques exemples de valeurs de $\cos\alpha$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Pour alpha nous avons pris un angle négatif, situé entre 0 et -π demi. Il s'avère que le sinus alpha sera, dans ce cas là, négatif. Si je prend un angle alpha, ici situé dans la figure du milieu situé entre 0 et π demi Là, le sinus de alpha prendra une valeure positive Si je prend ici un angle, je fais un tour complet et un peu plus qu'un quart de tour je me retrouve dans une position où le sinus de alpha est également positif. Regardons quelques exemples de valeurs prises par la fonction cosinus Donc le cosinus, c'est l'abscisse du point P alpha J'ai repris les trois mêmes angles que précédemment pour le sinus. Donc un angle alpha légèrement négatif le cosinus est positif ici Un angle légèrement positif, le cosinus reste positif ici, un tour complet plus un peu plus qu'un quart de tour le cosinus devient négatif dans ce cas là.

Notes

Summary

4m 05s

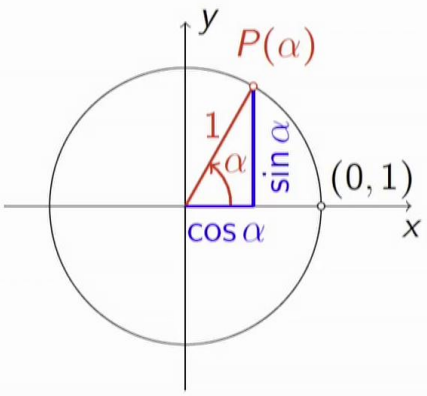
Relation de Pythagore

Proposition

Pour tout α réel, $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ sont les coordonnées du point $P(\alpha)$ situé sur le cercle trigonométrique : cercle de rayon 1 et centré à l'origine.

La relation de Pythagore s'écrit donc :

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

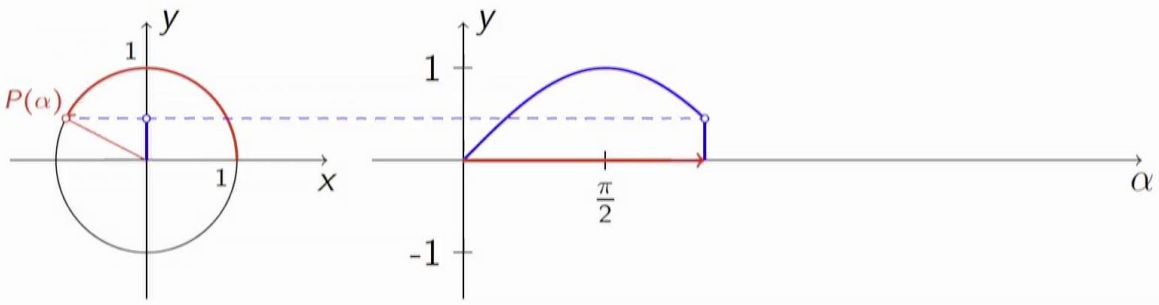
Nous pouvons à présent formuler immédiatement une propriété qui relie les fonctions sinus et cosinus par le fait que le point P alpha est situé sur un cercle de rayon 1. Si l'on utilise le théorème de Pythagore on obtient immédiatement la relation que le cosinus au carré plus le sinus au carré redonnent 1 C'est ce que j'ai écris ici, cosinus carré alpha + sinus carré alpha égale 1. Je me permet quand même de relever la façon dont on écrit cosinus alpha élevé au carré, on peut évidemment écrire cosinus alpha mettre ce terme entre parenthèse et l'élever à la puissance 2 comme ce sont des expresions qui apparaissent souvent, on a décidé de mettre la puissance derrière le cos. Donc cette expression signifie qu'on prend le cosinus alpha et on élève ce cosinus alpha au caré. La même remarque s'applique evidemment ici pour le sinus Autre remarque, il est vrai que cosinus et sinus peuvent prendre des valeurs négatives, mais cela ne change rien dans la relation de Pythagore.

Notes

Summary

5m 14s

Animation de la fonction sinus



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

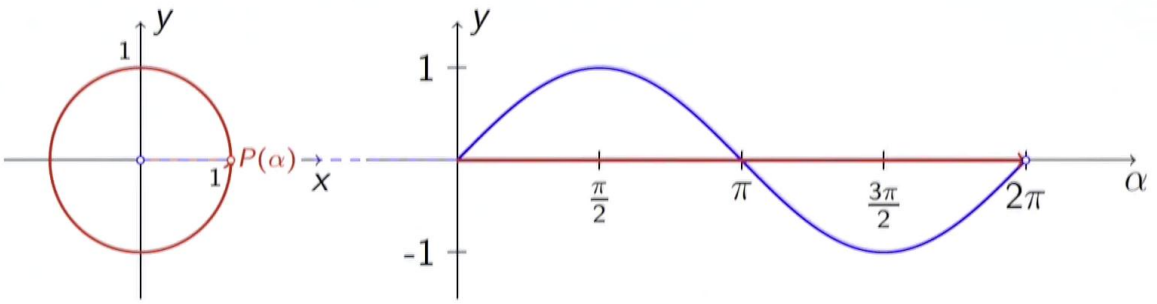
Bon, nous connaissons la définition du sinus, du cosinus aussi. Que peut-on dire de ces fonctions ? Nous allons nous intéresser un peu aux graphes de ces fonctions. On commence par la fonction sinus Pour obtenir le graphe, on va procéder de la façon suivante : Sur le cercle trigonométrique, on va positionner le point P alpha pour différentes valeurs de alpha. et nous allons observer, pour le sinus quelle est l'ordonnée de ce point P alpha. La longueur de l'arc alpha, on le relève ici, le long de l'axe des alpha et l'ordonnée du point P, nous allons la relever sur l'axe des y. C'est ce qui justifie ici, le choix des noms pour ce système d'axe alpha y. Voilà, là nous sommes dans une situation où on voit très bien cet arc alpha qui est repris ici, en même longueur alpha positif, Je vais dans le sens positf de l'axe des alpha. Et pour relever l'ordonnée du point P alpha, elle est ici en bleu je prend simplement cette longueur, et je la place au-dessus de la valeur alpha correspondante. Je continue à procéder de la sorte en faisant varier alpha alpha va devenir de plus en plus grand et nous observons alors que le sinus de alpha se comporte de la façon suivante : il grandit, puis diminue, atteint un minimum et là, on a fait un tour complet.

Notes

Summary

6m 19s

Animation de la fonction sinus



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

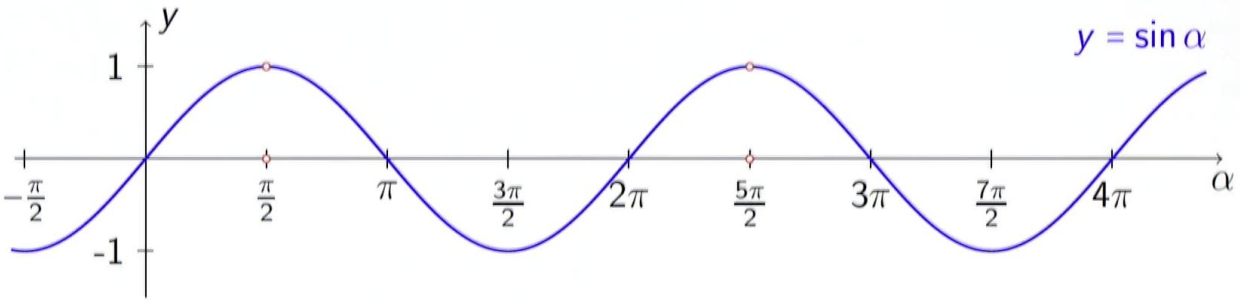
Notons bien que si vous continuez à faire croître l'angle alpha ce même jeu va se répéter, c'est-à-dire que cette allure de courbe va se répéter sur la droite mais aussi sur la gauche, indéfiniment.

Notes

Summary

8m 01s

Les points remarquables du sinus



- Le sinus est nul pour $\alpha = 0 \mod \pi$.
- Le sinus est maximal et vaut 1 pour $\alpha = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

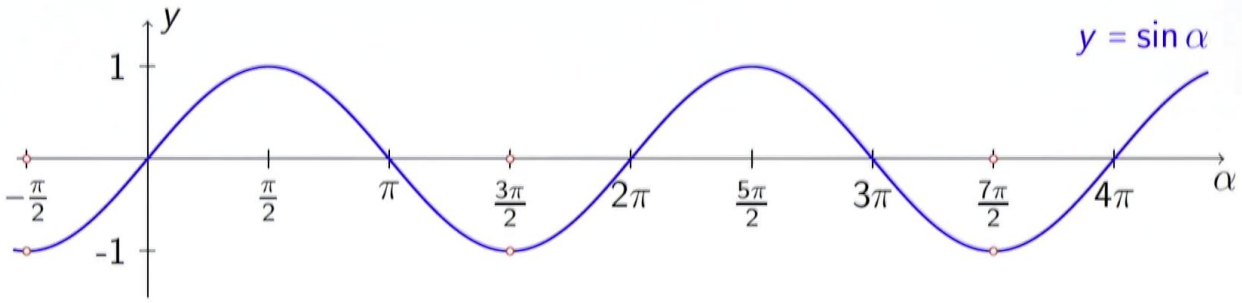
Retenons quand même quelques propriétés de ce graphe de la fonction sinus Des propriétés qui découlent immédiatement de l'observation que l'on peut faire sur le cercle trigonométrique Première observation : le sinus sera nul, si alpha est nul. Regardez la situation dans le cercle trigonométrique : l'angle alpha nul, cela signifie que le point P alpha est à l'endroit 1-0. Effectivement, l'ordonnée vaut 0. On a cela ici, pour alpha égale à 0. La fonction sinus vaut 0 mais elle vaut 0 également après un demi-tour. Donc pour π, je retrouve cette valeur 0. Je retrouve aussi après un tour complet 2π, et cela continue de la sorte En fait, le sinus s'annule toujours lorsque alpha vaut 0 module au π. Donc aux endroits 0, π, 2π, 3π, 4π mais aussi -π, -2π, -3π etc... Le sinus atteint une valeur maximale lorsque le point P de alpha est positionné sur le cercle trigonométrique, tout en haut Cela arrive la première fois, lorsque l'angle vaut π demi. Le sinus va être maximal et la valeur maximale va être le rayon du cercle unitaire, c'est 1 Mais, ce maximum est repris après un tour complet. Donc le sinus est maximal, il prend la valeur de 1 pour alpha égale à π demi mais attention, module aux 2π pas module au π, module aux 2π.

Notes

Summary

8m 17s

Les points remarquables du sinus



- Le sinus est nul pour $\alpha = 0 \mod \pi$.
- Le sinus est maximal et vaut 1 pour $\alpha = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi$.
- Le sinus est minimal et vaut -1 pour $\alpha = -\frac{\pi}{2} \mod 2\pi$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

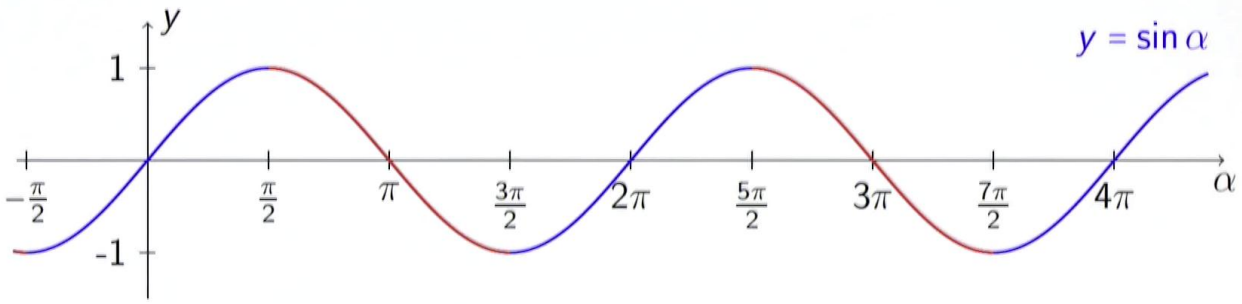
Il faut rajouter un tour complet pour retourner à cette valeur maximale. Le minimum, quant à lui, il est pris tout en bas sur le cercle trigonométrique et correspond à un trois quart de tour c'est à dire, il correspond à la situation d'un angle alpha 3π demi on retrouve cette valeur minimale de -1 à l'endroit 3π demi, module aux 2π on peut aussi dire que c'est à l'endroit -π demi c'est peut être plus facile à retenir -π demi module aux 2π.

Notes

Summary

9m 55s

Croissance, décroissance du sinus



- La fonction sinus est croissante pour $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ mod 2π.
- La fonction sinus est décroissante pour $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ mod 2π.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

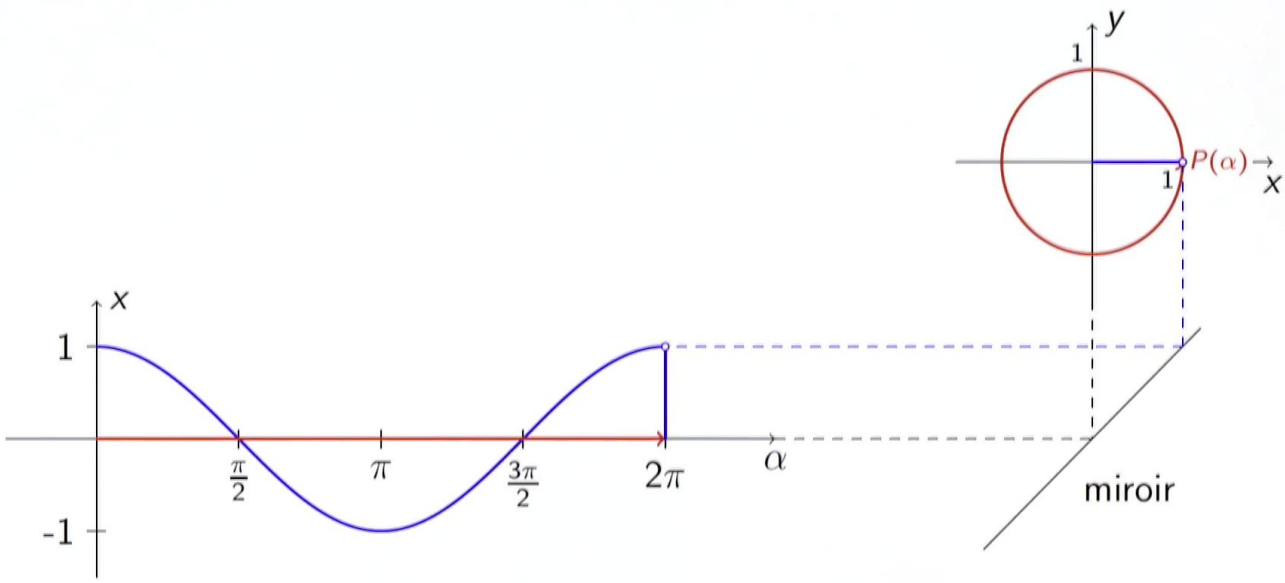
Voici encore une autre observation faite sur ce graphe du sinus que nous avons obtenu, la fonction sinus est croissante entre -π demi et π demi. En effet, lorsque l'angle alpha parcourt l'intervalle -π demi, jusqu'à π demi le point sur le cercle trigonométrique tourne, il tourne à droite depuis la position minimale, en bas vers la position maximale d'en haut. Nous pouvons dire que le sinus est croissant pour alpha entre -π demi et π demi et cela se répète de nouveau tous les 2π donc c'est module aux 2π. Sur les autres tronçons, c'est-à-dire par exemple entre π demi et 3π demi la fonction sinus est décroissante entre π demi et 3π, par exemple, lorsque l'angle croît depuis π demi à 3π demi, le point correspondant sur le cercle trigonométrique se met à tourner, dans le sens positif depuis la position supérieure sur le cercle trigonométrique, jusqu'à ce qu'il atteint, en passant du côté gauche, jusqu'à atteindre la position inférieure minimale. Ce phénomène se répète de nouveau, toujours 2π plus tard, donc nous pouvons dire que le sinus est décroissant pour alpha entre π demi et 3π demi, module aux 2π c'est-à-dire que ce phénomène se répète ici entre déplaçant le π demi, 3π demi de 2π.

Notes

Summary

10m 31s

Animation de la fonction cosinus



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

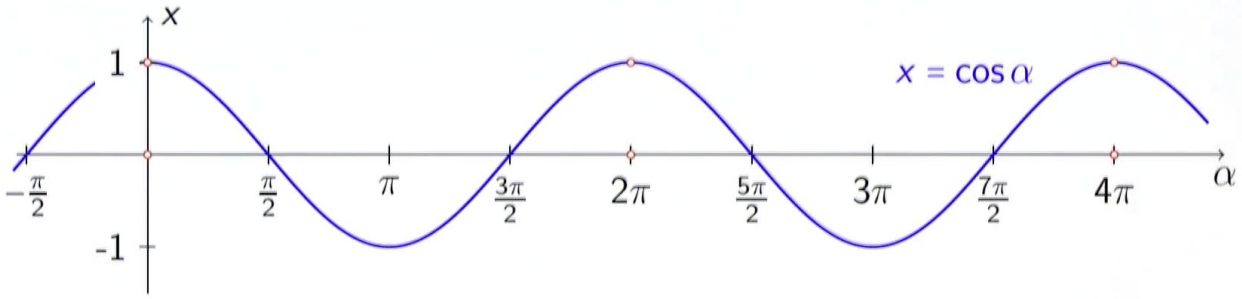
Regardons à présent ce qui se passe avec l'autre fonction trigonométrique que nous avons introduite, c'est le cosinus. Nous allons procéder de façon tout à fait similaire C'est-à-dire que nous allons nous placer dans un système d'axe alpha, c'est l'angle trigonométrique. A la verticale je prend x, parce que cette fois-ci je vais observer la coordonnée x de ce point P de alpha. Ici j'ai le cercle trigonométrique J'ai le point P alpha, qui va se mettre à tourner lorsque alpha varie. Voilà, ce qui est arrivé donc, ici, j'ai un angle alpha que je reporte ici et l'abscisse du point P alpha, ici en bleu, je vais devoir la rapporter vers la verticale alors j'utilise un miroir, qui va miroiter cet axe horizontal sur cette longueur et ça c'est la valeur ici, prise par le cosinus pour l'angle alpha correspondant et je continue de la sorte. Observons ce qui se passe : on observe ici, un phénomène d'allers-retours qui ressemble quelque peu au sinus mais qui a des propriétés différentes.

Notes

Summary

12m 04s

Les points remarquables du cosinus



- Le cosinus est nul pour $\alpha = \frac{\pi}{2} \mod \pi$.
- Le cosinus est maximal et vaut 1 pour $\alpha = 0 \mod 2\pi$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

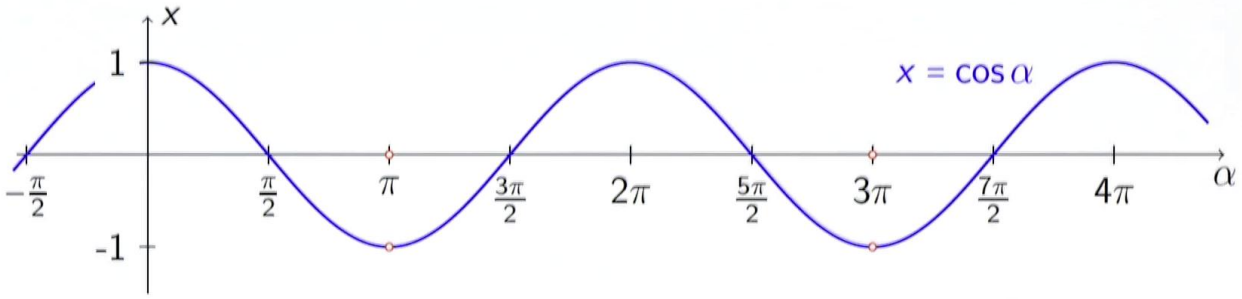
Regardons quelques-unes de ces propriétés Là, nous avons le cosinus Lui aussi se répète, c'est-à-dire que le tronçon entre 0 et 2π que nous venons d'observer, se répète après entre 2π et 4π, etc... Il se répète aussi du côté négatif, tous les deux π Première observation : le cosinus va s'annuler, le cosinus c'est l'abscisse, la coordonnée x du point P alpha. Si alpha est nul, cette abscisse n'est pas nulle Elle vaut 1. Il faut commençer à faire croître l'angle alpha sur le cercle trigonométrique Jusqu'à ce que le point atteint le point supérieur, tout en haut c'est-à-dire lorsque l'angle vaut π demi et pour π demi, ce cosinus va s'annuler. Il va également s'annuler, un demi-tour pus tard, à 3π demi, 5π demi, etc... Donc nous pouvons dire que le cosinus est nul pour alpha égal à π demi module Oπ module 0 demi tour complet. Le cosinus atteint sa valeur maximale qui correspond au rayon du cercle trigonométrique sa valeur maximale 1, lorsque alpha est nul et il va ré-atteindre cette valeur 2π plus tard, ou 4π plus tard. Donc nous allons obtenir une valeur maximale de 1 pour le cosinus si alpha vaut 0 mod 0 des tours complets, module 0 2π.

Notes

Summary

13m 24s

Les points remarquables du cosinus



- Le cosinus est nul pour $\alpha = \frac{\pi}{2} \mod \pi$.
- Le cosinus est maximal et vaut 1 pour $\alpha = 0 \mod 2\pi$.
- Le cosinus est minimal et vaut -1 pour $\alpha = \pi \mod 2\pi$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

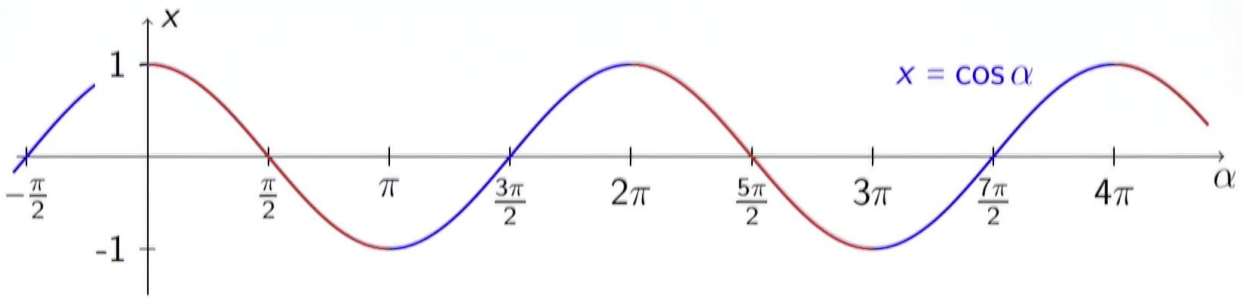
Quant à la valeur minimale, -1 elle est atteinte lorsque alpha partant de 0 fait, ou complète, un demi-tour. Lorsque alpha devient π l'ordonnée du point P correspondant atteint sa valeur minimal -1 et ce phénomène ce répète après rajout d'un tour complet. J'observe cela à π, à 3π, à 5π et aussi en enlevant, -π, -3π etc...

Notes

Summary

14m 51s

Croissance, décroissance du cosinus



- La fonction cosinus est croissante pour $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ mod 2π.
- La fonction cosinus est décroissante pour $\alpha \in [0, \pi]$ mod 2π.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Regardons encore, la croissance ou la décroissance du cosinus Je prétend que le cosinus est croissant lorsque alpha varie entre π et 2π : c'est le tronçon ici. Sur le cercle trigonométrique, si vous prenez l'angle alpha égal à π et vous le faite grandir de π jusqu'à 2π, le point correspondant sur le cercle trigonométrique bouge. Il bouge sur la partie inférieure du cercle trigonométrique et le cosinus, qui est l'abscisse du point P alpha, va, depuis une valeur de -1, devenir de plus en plus grande et à 2π, au retour complété, le cosinus va prendre sa valeur maximale de 1. On retrouve ce phénomène un tour plus tard c'est-à-dire que nous avons une croissance entre π et 2π, module aux 2π. Nous avons une croissance ici, entre π et 2π et si nous déplaçons cet intervalle de 2π on se retrouve ici à 3π - 4π et on retrouve cette même croissance. On peut également déplacer cet intervalle de croissance de 2π vers la gauche. La fonction cosinus est décroissante lorsque alpha varie entre 0 et π Là, je vous invite à faire vous-même la reflexion sur le cercle trigonométrique où vous faites bouger l'angle alpha entre 0 et π et où vous suivez l'ordonnée du point correspondant.

Notes

Summary

15m 22s

Les fonctions sinus et cosinus

Ce que nous avons appris :

- la définition des fonctions sinus et cosinus ;
- le graphe de ces fonctions ;
- les valeurs remarquables de ces fonctions ;
- leurs domaines de croissance et de décroissance.

Prochaine étape :

- la périodicité des fonctions sinus et cosinus ;
- la parité des fonctions sinus et cosinus ;
- sinus et cosinus des angles complémentaires ;
- sinus et cosinus des angles supplémentaires.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors, résumé. Qu'est-ce que nous avons appris aujourd'hui dans cette séquence ? Nous avons donné une définition pour les fonctions sinus et cosinus une définition, encore une fois surprenante puisque nous ne donnons pas une expression algébrique que l'on peut calculer, mais nous définissions ces fonctions par une signification sur le cercle trigonométrique Nous avons appris à connaître les graphes de ces fonctions J'aimerais insister sur le fait que vous devez absolument pouvoir esquisser un sinus et un cosinus avec les points remarquables, où ces grandeurs s'annulent où elles prennent les grandeurs maximales et minimales où ces grandeurs croissent et décroissent. Nous avons donné quelques valeurs remarquables c'est-à-dire les valeurs où ces fonctions trigonométriques prennent les valeurs nulles 1 et -1 Qu'est-ce qui nous attend la prochaine fois ? Nous allons analyser ces fonctions, sinus et cosinus quelque peu de façon plus précise. Nous allons nous intéresser, à ce qu'on appelle la périodicité, nous l'avons déjà un peu vu : les graphes ont un caractère de répétition. On va s'intéresser à la parité, on va s'intéresser à ce qui se passe quand on utilise des angles complémentaires et supplémentaires pour le sinus et le cosinus. Voilà, ça y est ! Je vous remercie.

Notes

Summary

16m 48s