ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus et leurs inverses

2.1 Les fonctions sinus et cosinus

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

EPFL

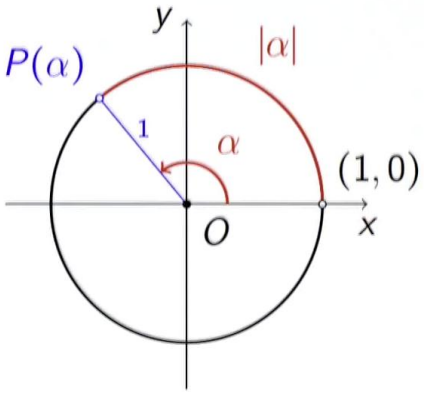
Rappel : le cercle trigonométrique

Nous avons défini une application

$$P(\cdot) : \mathbb{R} \to C, \quad \alpha \mapsto P(\alpha),$$

- C désigne le cercle trigonométrique centré à l'origine O,
- le point $P(\alpha)$ est le point obtenu par rotation du point $(1,0)$ autour de l'origine O d'un angle α (mesuré en radians).

Rappelons que le signe de α détermine le sens de la rotation.



Hallo. In den vergangenen Folgen habe ich den Einheitskreis und den trigonometrischen Winkel vorgestellt und hatte im Anschluss ebenfalls über fundamentale Bausteine gesprochen. Heute werde ich anhand dieser fundamentalen Bausteine zwei trigonometrische Funktionen einführen, und zwar Sinus und Kosinus. Dabei sollten wir uns in Erinnerung rufen, was sich genau auf dem Einheitskreis abspielt. Wir haben eine als P bezeichnete Abbildung definiert. Diese hat einen reellen Winkel alpha und liefert den Punkt p alpha auf dem Einheitskreis in einem gebräuchlichen x-y-Bezugssystem. Wie haben wir den Punkt P von alpha ermittelt? Zur Erinnerung: Eingesetzt wird hier der Absolutwert von alpha, der ab dem Punkt (1.0) entlang des Kreises verläuft. Der Verlauf erfolgt in positive Richtung, sofern alpha positiv ist. Dies ist in unserem Schaubild der Fall und in die entgegengesetzte Richtung, sofern alpha negativ ist Auf diese Weise erhielten wir den Punkt P von alpha.

Notes

Summary

0m 05s

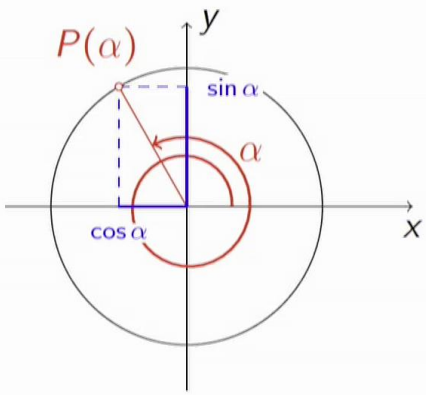
Introduction des fonctions sinus et cosinus

Le point $P(\alpha)$ a pour coordonnées cartésiennes $x(\alpha)$ et $y(\alpha)$.

Il s'avère que dans bien des problèmes, la valeur de ces coordonnées joue un rôle capital.

C'est pourquoi on introduit les notations suivantes :

$$\sin\alpha := y(\alpha) \quad \text{et} \quad \cos\alpha := x(\alpha).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir erwähnten bereits, dass der Punkt P von alpha über x- und y-Koordinaten verfügt und nannten diese x alpha und y alpha. Sehen wir uns nun das Verhalten dieser Koordinaten an, wenn wir alpha verändern. In vielen Abbildungen spielen die Größen x alpha - y alpha eine wichtige Rolle Daher führen wir die Schreibweise für die y-Koordinate den y-Wert des Punktes P alpha ein. Wir nennen diesen fortan Sinus alpha. Was die Abszisse betrifft, also die x-Koordinate von P, so erhält diese die Bezeichnung Kosinus.

Notes

Summary

1m 14s

Définition des fonctions sinus et cosinus

Définition

- La fonction *sinus*

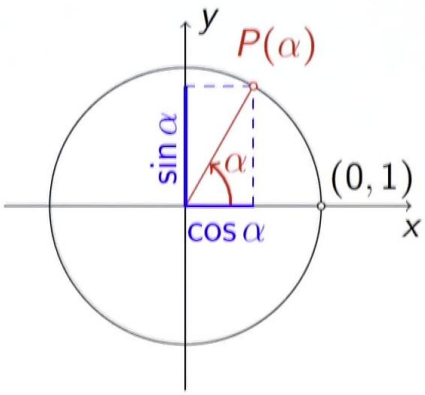
$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \mapsto \sin \alpha$$

est définie par l'ordonnée $y(\alpha)$ du point $P(\alpha)$ sur le cercle trigonométrique.

- La fonction *cosinus*

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \mapsto \cos \alpha$$

est définie par l'abscisse $x(\alpha)$ du point $P(\alpha)$ sur le cercle trigonométrique.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Dies führt uns zu folgender Definition: Wir bezeichnen dies als Sinus-Funktion, die mit sin abgekürzt wird. Es ist eine Funktion, die eine reelle Zahl erfordert und eine reelle Zahl ergibt. Sie basiert auf einer reellen Zahl alpha und ergibt die reelle Zahl Sinus alpha, die auf folgende Art definiert wird: Es soll gelten, dass Sinus von alpha der Ordinatenwert y alpha des Punktes P alpha ist. Für den Winkel alpha in diesem Schaubild entspricht folglich der Punkt P alpha der Größe Sinus alpha. Es handelt sich folglich um eine Länge mit einem Zeichen, wie jeder Punkt auf der y-Achse. Wir sprechen nun über die Kosinus-Funktion, die wir mit cos abkürzen. Eine Funktion, die eine reelle Zahl alpha erfordert und die eine reelle Zahl Kosinus alpha ergibt. Wie wird diese ermittelte Zahl Kosinus alpha definiert? Für Kosinus alpha ziehen wir den x-Wert x alpha des Punktes P alpha heran. Hier ist also der Winkel alpha, der Punkt P alpha und das ist der Kosinus. Der Kosinus alpha ist eine Länge, die mit einem Zeichen versehen ist, wie jeder Punkt auf der x-Achse. Es kann passieren, dass es für den Lernenden möglicherweise enttäuschend sein kann, diese Definitionen der Funktionen Sinus und Kosinus zu erfahren, bei denen die Gesetzlichkeiten sich nicht durch eine Rechenformel ergeben, sondern durch eine Eigenschaft.

Notes

Summary

1m 59s

Définition des fonctions sinus et cosinus

Définition

- La fonction *sinus*

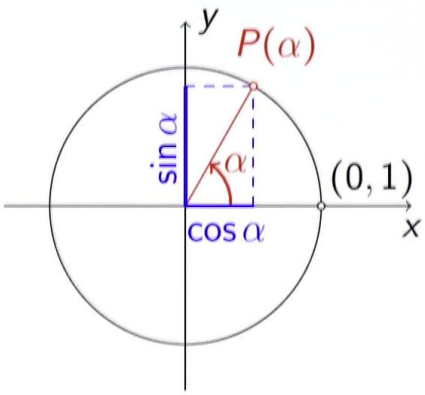
$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \mapsto \sin \alpha$$

est définie par l'ordonnée $y(\alpha)$ du point $P(\alpha)$ sur le cercle trigonométrique.

- La fonction *cosinus*

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \mapsto \cos \alpha$$

est définie par l'abscisse $x(\alpha)$ du point $P(\alpha)$ sur le cercle trigonométrique.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Später werden wir sehen, dass hierin die Stärke der trigonomischen Funktionen liegt. Doch gleichzeitig werden hierdurch das Erlernen und die Anwendung dieser Funktionen schwerer, als dies üblicherweise bei Polynomen oder den wohlbekannten ratinalen Funktionen der Fall ist. Sehen wir uns einmal an, wie der Sinus von alpha variiert. Der Sinus von alpha ist also der Ordinatenwert des Punktes P alpha.

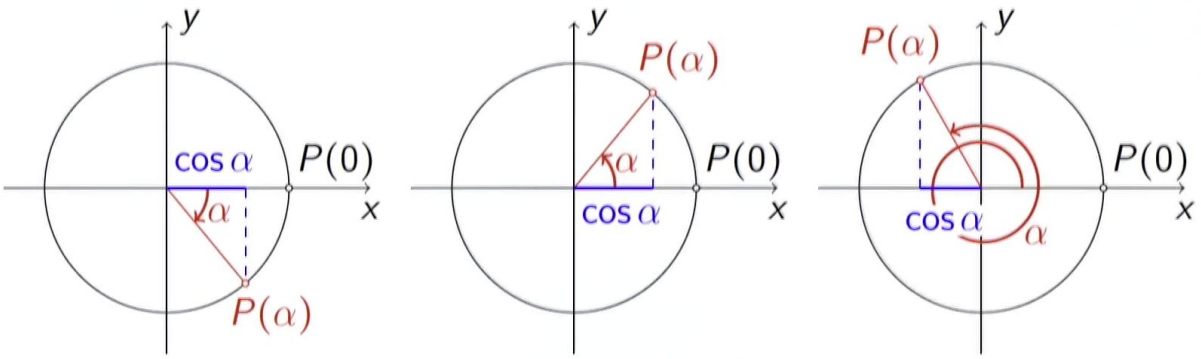
Notes

Summary

3m 32s

Exemples de valeurs de la fonction cosinus

Quelques exemples de valeurs de $\cos\alpha$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Auf welche Weise varriert der Sinus von alpha, wenn alpha einige unterschiedliche Werte annimmt. Sehen wir uns also hier das linke Schaubild an. Für alpha haben wir einen negativen Winkel zwischen 0 und -π/2 gewählt. Es ergibt sich, dass Sinus alpha in diesem Falle negativ ist. Nehme ich jedoch einen Winkel alpha, der hier im mittleren Schaubild zwischen 0 und π/2 liegt, hat Sinus alpha einen positiven Wert. Wähle ich hier einen Winkel, mache eine komplette Umrundung und ein wenig mehr als eine Viertel-Umrundung, befinde ich mich in einer Position, in der der Sinus von alpha ebenfalls positiv ist. Sehen wir uns einige Beispiele von Werten für die Kosinus-Funktion an. Der Kosinus ist der x-Wert des Punktes P alpha. Ich habe die gleichen Winkel gewählt, die ich zuvor für den Sinus verwendet habe. Das heißt also einen leicht negativen Winkel alpha. Der Kosinus ist in diesem Falle positiv. Bei einem leicht positiven Winkel bleibt der Kosinus positiv. Nach einer kompletten Umrundung plus ein wenig mehr als einer Viertel-Umrundung ergibt sich ein negativer Kosinus.

Notes

Summary

3m 55s

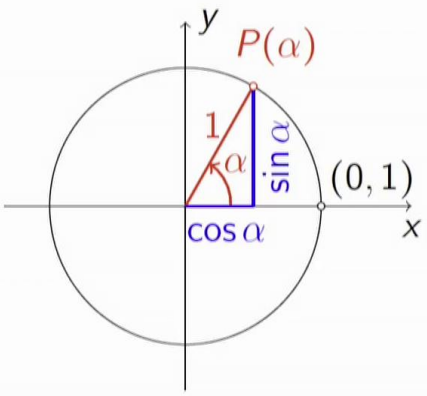
Relation de Pythagore

Proposition

Pour tout α réel, $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ sont les coordonnées du point $P(\alpha)$ situé sur le cercle trigonométrique : cercle de rayon 1 et centré à l'origine.

La relation de Pythagore s'écrit donc :

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

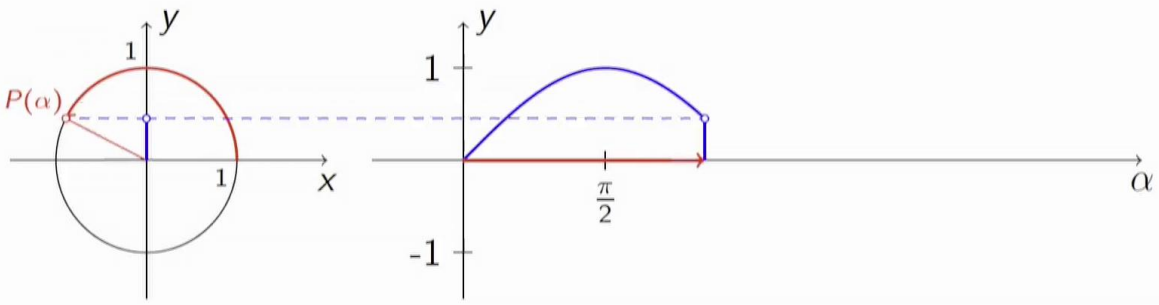
Hieraus können wir nun eine Eigenschaft ableiten, die die Funktionen Sinus und Kosinus miteinander verbindet und zwar dadurch, dass sich der Punkt P alpha auf einem Kreis mit dem Radius 1 befindet. Wenden wir den Satz des Pythagoras an, ergibt sich unmittelbar der Zusammenhang, dass Kosinus zum Quadrat plus Sinus zum Quadrat 1 ergibt. Das habe ich hier aufgeschrieben, Kosinus zum Quadrat alpha + Sinus zum Quadrat alpha ist gleich 1. An dieser Stelle möchte ich kurz erläutern, dass, wenn man Kosinus alpha potenziert, selbstverständlich auch Kosinus alpha schreiben, in Klammern setzen und anschließend zum Quadrat nehmen kann. Da es sich aber um Begriffe handelt, die häufig wiederkehren, haben wir uns entschieden, den Exponenten hinter den cos zu setzen. Diese Schreibweise soll also bedeuten, dass wir den Kosinus alpha nehmen Gleiches gilt hier selbstverständlich auch für den Sinus.

Notes

Summary

5m 14s

Animation de la fonction sinus



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

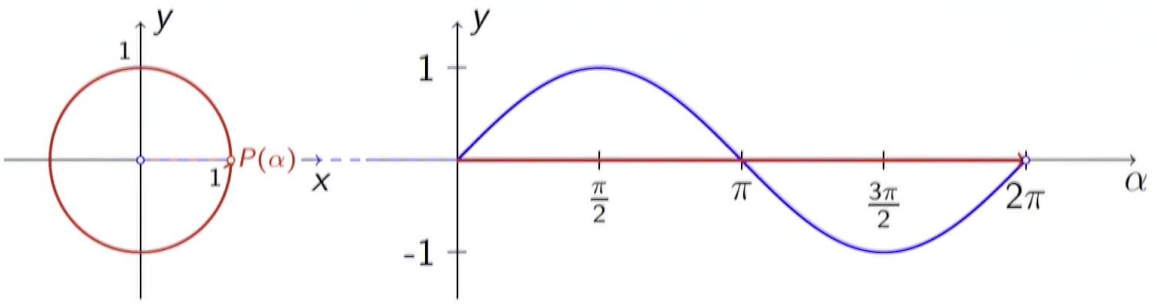
Richtig ist auch, dass Kosinus und Sinus negative Werte haben können, doch ändert dies nichts in Bezug auf den pythagoreischen Zusammenhang. Nun kennen wir also die Definition von Sinus und auch Kosinus. Was lässt sich über diese Funktionen feststellen? Wir werden uns nun ein wenig mit den Graphen dieser Funktionen beschäftigen. Wir beginnen mit der Sinus-Funktion. Um einen Graphen zu erhalten, werden wir auf folgende Weise verfahren: Auf dem Einheitskreis werden wir den Punkt P alpha mit unterschiedlichen alpha-Werten positionieren und werden für den Sinus beobachten, welches der y-Wert dieses Punktes P alpha ist. Die Bogenlänge alpha lässt sich hier entlang der alpha-Achse ausmachen und der Ordinatenwert des Punktes P findet sich auf der y-Achse. Hieraus leitet sich die Bezeichnung für dieses Achsensystem ab alpha y. Hier sehen wir also eine Situation, in der die Bogenlänge alpha besonders gut sichtbar ist, der hier mit der gleichen positiven Länge alpha übernommen wurde. Ich bewege mich in positive Richtung auf der alpha-Achse Und um die y-Koordinate des Punktes P alpha abzulesen, hier in blau gekennzeichnet, nehme ich einfach diese Länge und positioniere sie auf dem entsprechenden alpha-Wert.

Notes

Summary

6m 11s

Animation de la fonction sinus



REPLAY

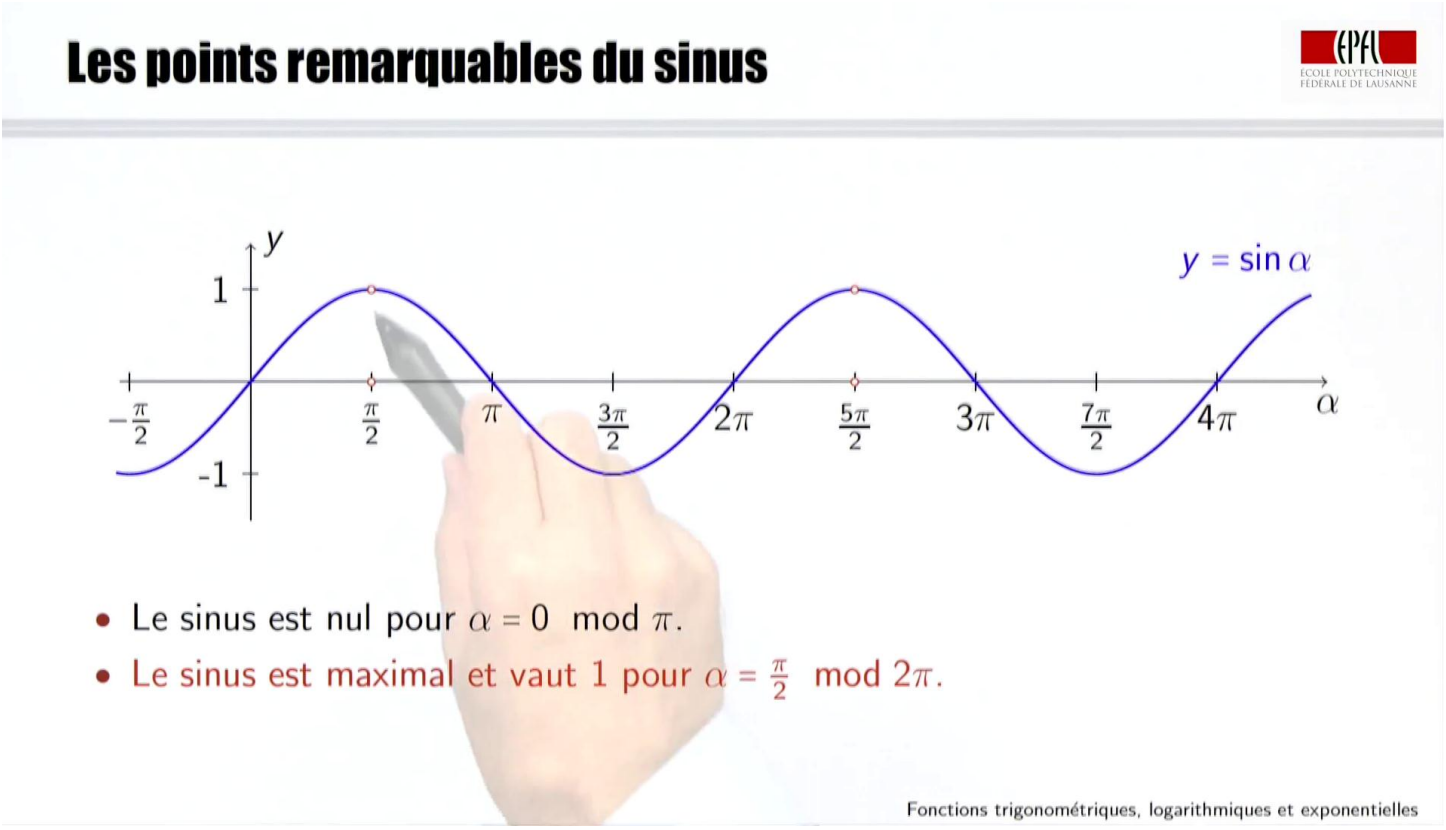
Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Ich fahre so fort und variiere auf diese Weise alpha alpha wird größer und größer und wir können beobachten, dass der Sinus von alpha sich auf folgende Weise verhält: Er wird größer, dann kleiner, erreicht ein Minimum und, schon haben wir eine volle Umrundung vollzogen Wenn Sie damit fortfahren, den Winkel alpha zu vergrößern, wiederholt sich das ganze Spiel, beziehungsweise wiederholt sich das Verhalten der Kurve sowohl rechts als auch links, und das unendlich oft.

Notes

Summary

7m 39s



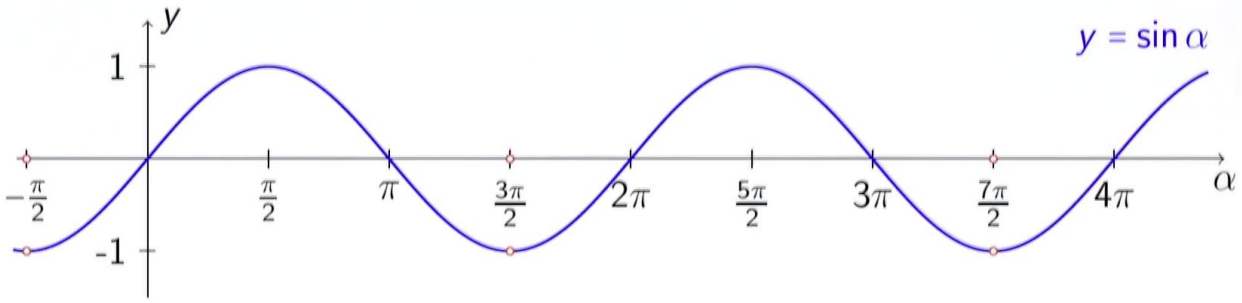
Wir sollten trotz allem einige Eigenschaften dieses Graphen der Sinus-Funktion festhalten. Eigenschaften, die sich unmittelbar ableiten von der soeben erfolgten Beobachtung auf dem Einheitskreis. Erste Beobachtung: Sinus ist gleich Null, wenn alpha gleich Null ist. Sehen Sie sich die Situation im Einheitskreis an: Ein Winkel alpha gleich Null bedeutet, dass der Punkt P alpha an der Position 1-0 liegt Tatsächlich beträgt der y-Wert 0. Das haben wir hier, für alpha gleich Null. Der Wert der Sinus-Funktion beträgt 0, aber er beträgt ebenfalls 0 nach einer halben Umrundung. Für π finden wir also auch diesen Wert 0 wieder. Und er kehrt auch nach einer kompletten Umrundung wieder 2π, und das ganze setzt sich gleichermaßen fort. Tatsächlich wird der Sinus immer dann aufgehoben, wenn alpha mod π Null ist. Folglich also an den Positionen 0, π, 2π, 3π, 4π aber auch -π, -2π, -3π etc.... Der Sinuswert erreicht seine maximale Höhe, wenn der Punkt P von alpha ganz oben auf dem Einheitkreis positioniert ist. Dies geschieht zum ersten Mal, wenn der Winkel π/2 beträgt. Der Sinus erreicht sein Maximum und der Maximalwert wird dem Radius des Einheitskreises, nämlich 1 entsprechen.

Notes

Summary

8m 17s

Les points remarquables du sinus



- Le sinus est nul pour $\alpha = 0 \mod \pi$.
- Le sinus est maximal et vaut 1 pour $\alpha = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi$.
- Le sinus est minimal et vaut -1 pour $\alpha = -\frac{\pi}{2} \mod 2\pi$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

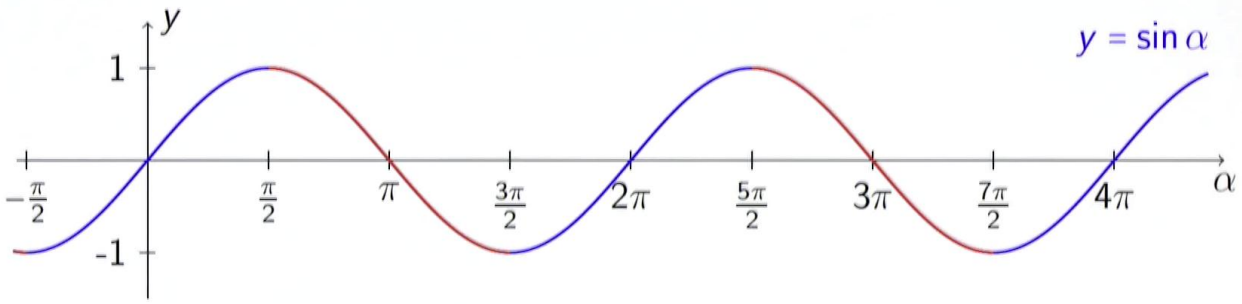
Dieses Maximum wird erneut erreicht nach einer kompletten Umrundung Liegt der Sinus also bei seinem Maximum, ist der Wert 1 wenn alpha gleich π/2 ist, aber vorsicht: mod 2π, nicht mod π, mod 2π. Eine komplette Umrundung ist hinzuzufügen, damit dieser maximale Wert erneut erreicht wird. Das Minimum hingegen befindet sich ganz unten auf dem Einheitskreis und entspricht einer Dreiviertel-Umrundung das heißt, dass es einem Winkel alpha von 3π/2 entspricht. Diesen Minimalwert von -1 finden wir an der Position 3π/2 wieder, mod 2π man kann auch sagen an der Position -π/2. Das kann man sich vielleicht besser merken -π/2 mod 2π.

Notes

Summary

9m 40s

Croissance, décroissance du sinus



- La fonction sinus est croissante pour $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ mod 2π.
- La fonction sinus est décroissante pour $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ mod 2π.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

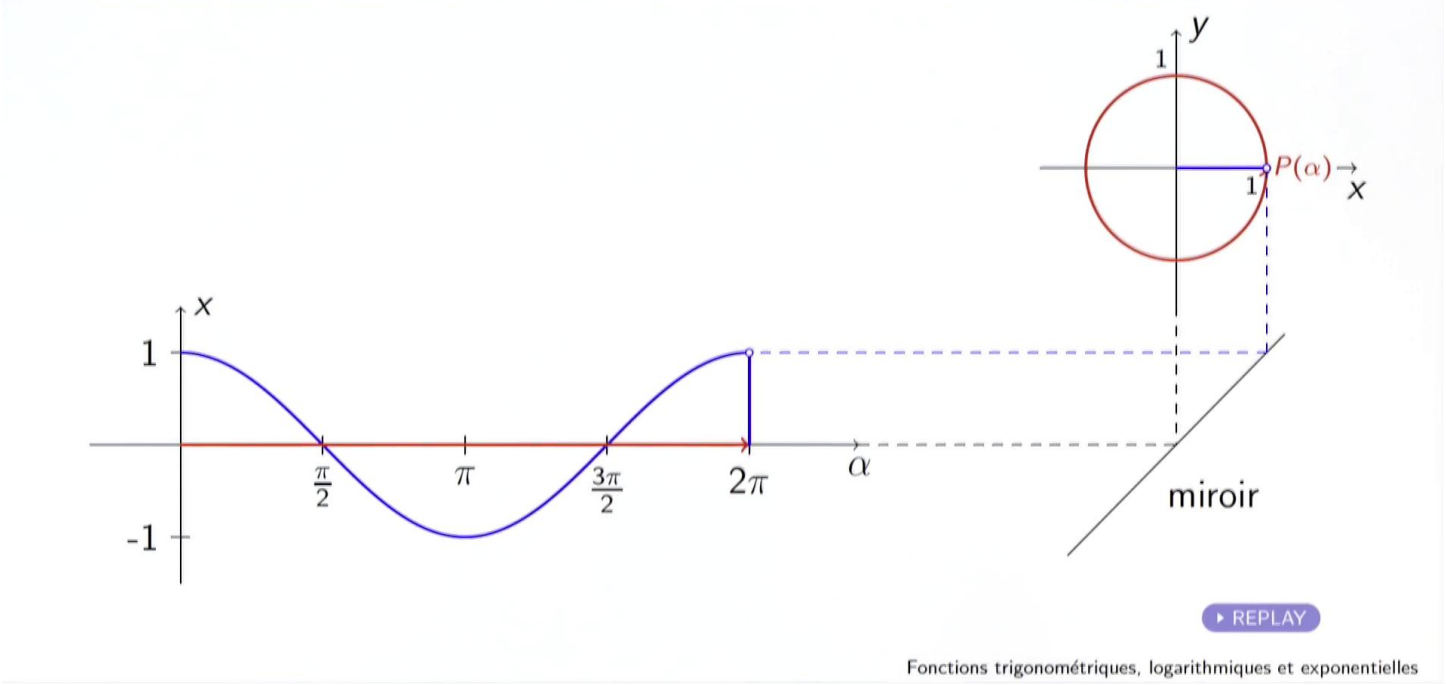
Und hier eine weitere Beobachtung auf dem Sinus-Graphen, den wir erhalten haben: Die Sinus-Funktion ist steigend zwischen -π/2 und π/2. Wenn also der Winkel alpha das Intervall von -π/2 bis π/2 durchläuft, dreht der Punkt auf dem Einheitskreis nach rechts ausgehend von der minimalen Position unten bis zur maximalen Position oben. Wir stellen also fest, dass der Sinuswert für alpha zwischen -π/2 und π/2 steigt und dies wiederholt sich im Abstand von 2π und ist folglich mod 2π. Auf den anderen Abschnitten, d. h. etwa zwischen π/2 und 3π/2 ist die Funktion absteigend und zwischen π/2 und 3π, zum Beispiel, wenn der Winkel von π/2 bis 3π/2 anwächst, beginnt der entsprechende Punkt auf dem Einheitskreis in positive Richtung zu drehen ausgehend von der oberen Position auf dem Einheitskreis, bis er im Verlauf über die linke Seite die minimale untere Position erreicht. Dieses Phänomen wiederholt sich erneut immer im Abstand von 2π, daher halten wir fest, dass der Sinus für alpha absteigend ist zwischen π/2 und 3π/2, mod 2π, was bedeutet, dass dieses Phänomen sich hier wiederholt, indem π/2, 3π/2 um 2π verschoben wird.

Notes

Summary

10m 31s

Animation de la fonction cosinus

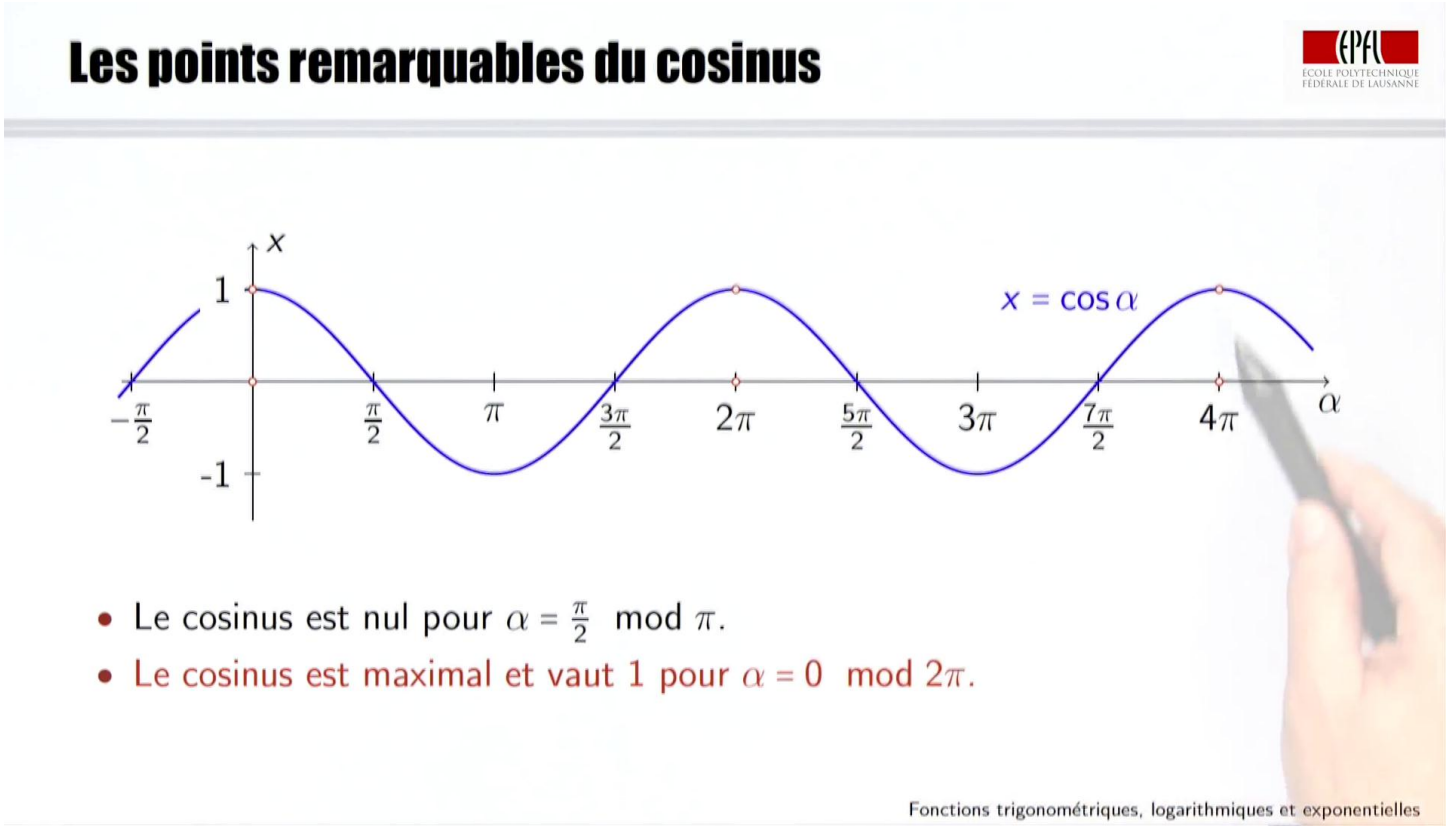


Sehen wir uns nun an, wie sich die andere trigonometrische Funktion verhält, die wir eingeführt haben, wir meinen den Kosinus. Wir werden so vorgehen, wie wir es bereits getan haben. Wir werden uns also in einem Achsen-System alpha positionieren, dem trigonometrischen Winkel. An der Vertikalen, lese ich x ab, denn dieses Mal werde ich die x-Koordinate des Punktes P von alpha beobachten. Hier habe ich den Einheitskreis und den Punkt P alpha, der seine Drehbewegung beginnen wird, wenn der Wert von alpha varriert. Und das hat sich nun abgespielt. Hier ist also der Winkel alpha, den ich hierher verschoben habe und die Abszisse des Punktes P alpha, hier in blau, die ich übertragen muss, auf die Vertikale. Ich werde also diese horizontale Achse auf dieser Länge spiegeln und das ist dieser Wert hier, der für den Kosinus ermittelt wurde für den entsprechenden Winkel alpha und ich fahre weiterhin so fort. Sehen wir uns nun an, was passiert: Es kann hier ein Phänomen des Wechsels beobachtet werden, der in gewisser Weise an den Sinus erinnert, dabei aber unterschiedliche Eigenschaften aufweist. Sehen wir uns einige dieser Eigenschaften an.

Notes

Summary

12m 04s



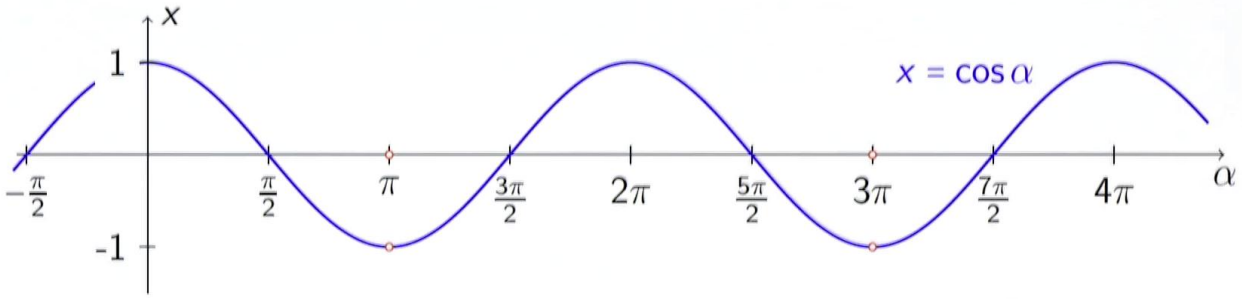
Hier haben wir den Kosinus. Auch er wiederholt sich, das heißt, dass die Abschnitte zwischen 0 und 2π, die wir soeben beobachtet haben, wiederholt werden zwischen 2π und 4π etc.... Auch auf der negativen Seite wiederholt er sich im Abstand von 2π Erste Beobachtung: Der Kosinus hebt sich auf, der Kosinus ist die Abszisse, die x-Koordinate des Punktes P alpha. Wenn alpha gleich Null ist, ist diese Abszisse nicht gleich Null Sie hat den Wert 1. Es muss damit begonnen werden, den Winkel alpha auf dem Einheitskreis zu vergrößern, bis der Punkt die höchste Stelle am obersten Punkt erreicht, beziehungsweise wenn der Winkel π/2 groß ist und bei π/2 hebt sich der Kosinus auf. Auch bei einer halben Umrundung hebt er sich auf, später dann bei 3π/2, 5π/2 etc.... Wir können daher feststellen, dass der Kosinus gleich Null ist, bei alpha π/2 mod Oπ Modulo 0 komplette Halbumrundung. Der Kosinus erreicht seinen maximalen Wert, der mit dem Radius des Einheitskreises übereinstimmt. Sein maximaler Wert ist 1, wenn alpha gleich Null ist. Und er erreicht erneut diesen Wert, im Abstand von 2π bzw. von 4π.

Notes

Summary

13m 26s

Les points remarquables du cosinus



- Le cosinus est nul pour $\alpha = \frac{\pi}{2} \mod \pi$.
- Le cosinus est maximal et vaut 1 pour $\alpha = 0 \mod 2\pi$.
- Le cosinus est minimal et vaut -1 pour $\alpha = \pi \mod 2\pi$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

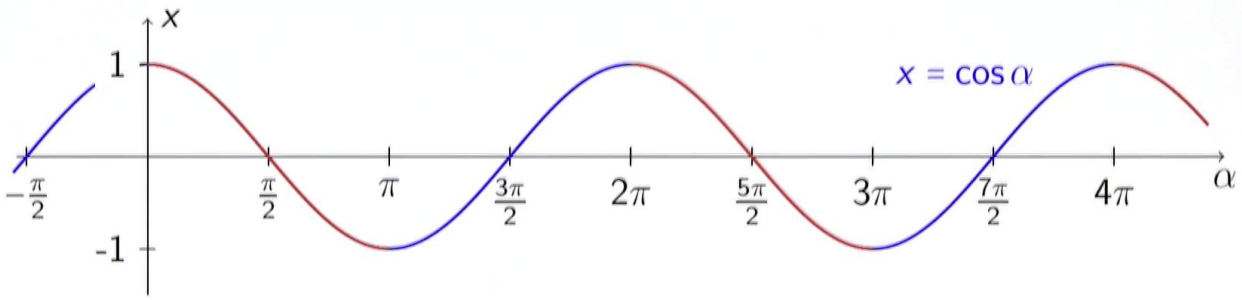
Wir erhalten also einen Wert, der für den Kosinus maximal bei 1 liegt, wenn alpha gleich 0 modulo 0 der vollen Umrundungen ist, modulo 0 2π Was den minimalen Wert -1 betrifft, so wird dieser erreicht, wenn alpha, ausgehend bei 0, eine halbe Umrundung vollzieht. Liegt alpha bei π, erreicht der y-Wert des Punktes P seinen minimalen Wert -1 und dieses Phänomen wiederholt sich, wenn eine komplette Umrundung vollzogen wird. Ich beobachte dies bei π, 3π, 5π, aber auch abnehmend bei -π, -3π etc....

Notes

Summary

14m 41s

Croissance, décroissance du cosinus



- La fonction cosinus est croissante pour $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ mod 2π.
- La fonction cosinus est décroissante pour $\alpha \in [0, \pi]$ mod 2π.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Sehen wir uns noch einmal die Zunahme oder Abnahme des Kosinus an. Ich gehe von einer Zunahme des Kosinus aus, wenn alpha zwischen π und 2π variiert: Es handelt sich um diesen Abschnitt hier. Wenn Sie auf dem Einheitskreis einen Winkel gleich π wählen und Sie ihn von π bis 2π vergrößern, bewegt sich der entsprechende Punkt auf dem Einheitskreis. Er bewegt sich im unteren Bereich des Einheitskreises und der Kosinus, der die Abszisse des Punktes P alpha ist, wird, ausgehend von einem Wert -1, immer größer werden und bei 2π, bei vollendeter Umrundung, wird der Kosinus seinen maximalen Wert 1 erreichen. Dieses Phänomen taucht eine Umrundung später erneut auf das bedeutet, dass eine Steigerung vorliegt, und zwar zwischen π und 2π mod 2π. Wir haben es hier mit einer Steigerung zu tun zwischen π und 2π und wenn wir dieses Intervall um 2π verschieben, befinden wir uns bei 3π - 4π und begegnen der gleichen Steigerung erneut. Man kann dieses Steigerungsintervall ebenfalls um 2π nach links verschieben. Die Sinusfunktion ist fallend, wenn alpha zwischen 0 und π variiert An dieser Stelle, lade ich Sie dazu ein, einmal selbst am Einheitskreis aktiv zu werden, auf dem Sie den Winkel alpha zwischen 0 und π bewegen werden oder auf dem Sie dem Ordinatenwert des entsprechenden Punktes folgen.

Notes

Summary

15m 22s

Les fonctions sinus et cosinus

Ce que nous avons appris :

- la définition des fonctions sinus et cosinus ;
- le graphe de ces fonctions ;
- les valeurs remarquables de ces fonctions ;
- leurs domaines de croissance et de décroissance.

Prochaine étape :

- la périodicité des fonctions sinus et cosinus ;
- la parité des fonctions sinus et cosinus ;
- sinus et cosinus des angles complémentaires ;
- sinus et cosinus des angles supplémentaires.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Fassen wir also zusammen. Was haben wir heute in dieser Folge gelernt? Wir haben eine Definition formuliert für die Funktionen Sinus und Kosinus, eine Definition, die, wie ich schon sagte, ein wenig überraschend ist, da hierfür keine algebraische Ausdrucksweise gegeben wird, die man ausrechnen könnte, sondern diese Funktionen werden definiert durch ihre Bedeutung auf dem Einheitskreis. Wir haben die Graphen dieser Funktionen kennengelernt. Ich muss darauf hinweisen, dass Sie unbedingt in der Lage sein müssen, eine Sinus- und Kosinus-Funktion zu skizzieren, und zwar mit den Besonderheiten wie den Größen, die sich aufheben oder die ihre Maximal- oder Minimalwerte annehmen, bei denen die Werte zu- oder abnehmen. Wir haben hier einige der besonderen Werte aufgezeigt, d. h. Werte, bei denen diese trigonometrischen Funktionen die Werte Null, 1 und -1 annehmen. Was erfahren wir beim nächsten mal? Wir werden die Funktionen Sinus und Kosinus ein wenig genauer analysieren. Wir werden uns beschäftigen mit der sogenannten Periodizität, die wir in gewisser Weise ja bereits gesehen haben: Die Graphen haben einen repetitiven Charakter. Wir werden uns mit der Parität auseinandersetzen und wir werden uns ansehen, was passiert, wenn man Winkel einsetzt, die komplementär und supplementär für Sinus und Kosinus sind. So, das war es dann auch schon! Vielen Dank.

Notes

Summary

16m 48s