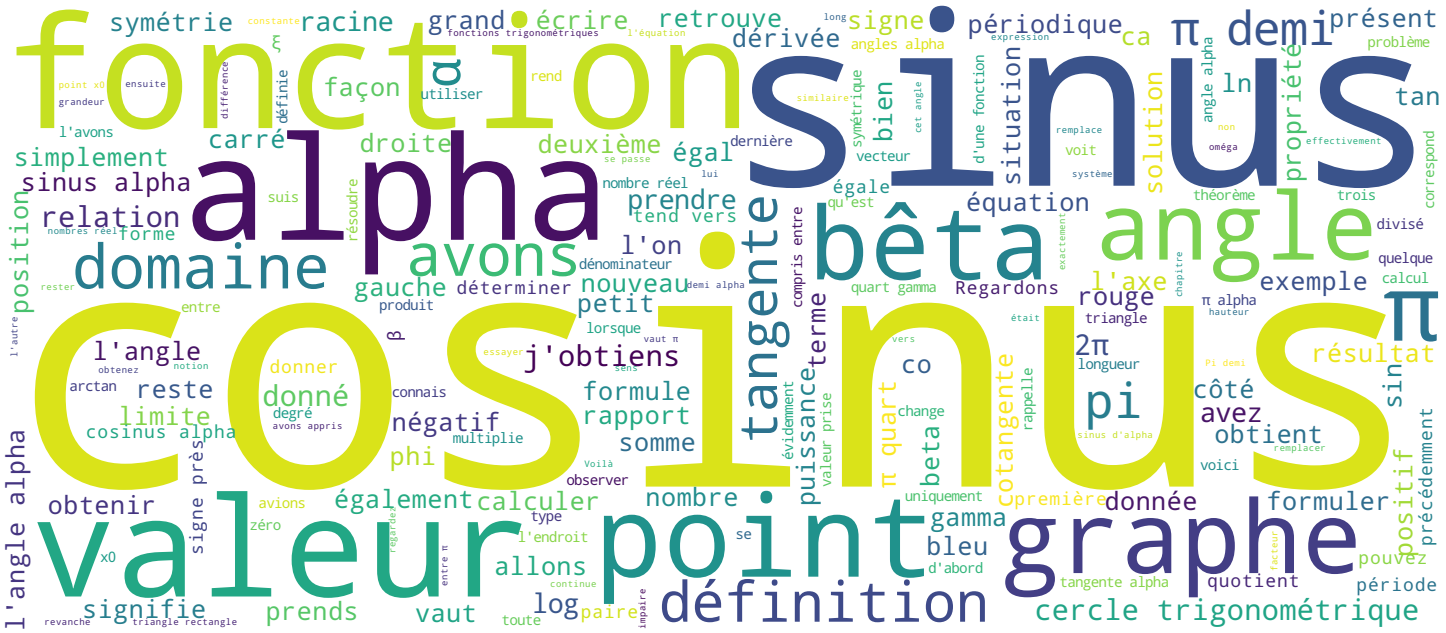
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus et leurs inverses

2.2 Les symétries des fonctions sinus et cosinus

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

Video

EPFL

Rappel sur les fonctions périodiques

Définition

Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ est T-périodique (avec $T > 0$) si

Bonjour. La dernière fois, j'ai introduit les fonctions trigonométriques sinus et cosinus. C'était peut être quelque peu remarquable, quelque peu surprenant. J'avais introduit ces fonctions sans donner une expression algébrique pour calculer les valeurs prises par le sinus et le cosinus pour un angle donné alpha. Non, on a définit ces fonctions comme des abscisses et des ordonnées d'un point P alpha sur le cercle trigonométrique. Il est assez remarquable que, malgré l'absence d'une formule de calcul algébrique on peut déterminer des propriétés importantes de ces fonctions sinus et cosinus. Du reste nous l'avons déjà fait. Nous avons trouvé que ces fonctions prennent des valeurs maximales, minimales, plus ou moins 1... en des points bien déterminés. Nous avons trouvé où ces fonctions sinus et cosinus s'annulent. Nous avons trouvé des plages de valeurs sur lesquelles ces fonctions sont monotones croissantes ou décroissantes. Aujourd'hui, je continue mon étude de ces fonctions sinus et cosinus. Pour commencer, je vais donner un rappel pour ceux qui ont déjà vu cette notion, sans ça je vais expliquer ce qu'on entend par une fonction périodique.

Notes

Summary

0m 04s

Rappel sur les fonctions périodiques

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Définition

Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ est T-périodique (avec $T > 0$) si

- son domaine de définition $\mathbf{D}_f$ est T-périodique dans le sens que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{D}_f \quad \Rightarrow \quad x + T \in \mathbf{D}_f;$$

- la fonction f prend la même valeur en x et en $x + T$:

$$\forall x \in \mathbf{D}_f, \quad f(x) = f(x + T).$$

Nous partons d'une fonction f qui est définie sur un domaine que je nomme Df qui est un sous-ensemble de nombres réels ici, et nous allons prendre une fonction qui, avec un nombre x dans le domaine Tf me rend une valeur f de x qui est un nombre réel. Une telle fonction, je vais dire qu'elle est T-périodique. T est une valeur positive, T-périodique. Ici, cette fonction f remplit deux conditions. La première, c'est que son domaine de définition Df est lui T-périodique. Alors, qu'est ce que cela veut dire ? Cela signifie la chose suivante : c'est que si je prend une valeur de x quelconque, un nombre réel quelconque qui est dans le domaine de définition le translater, donc x + t se retrouve également dans le domaine de définition. La deuxième condition, la voici : si je considère maintenant la valeur prise, ou les valeurs prises par la fonction f, à l'endroit x et x + t, les deux points sont en même temps dans le domaine de définition, donc dès que x est dans le domaine de définition, x + T l'est aussi. Je peux donc calculer la valeur f de x et f de x + T et je dois retrouver toujours cette même valeur.

Notes

Summary

1m 23s

Rappel sur les fonctions périodiques

Définition

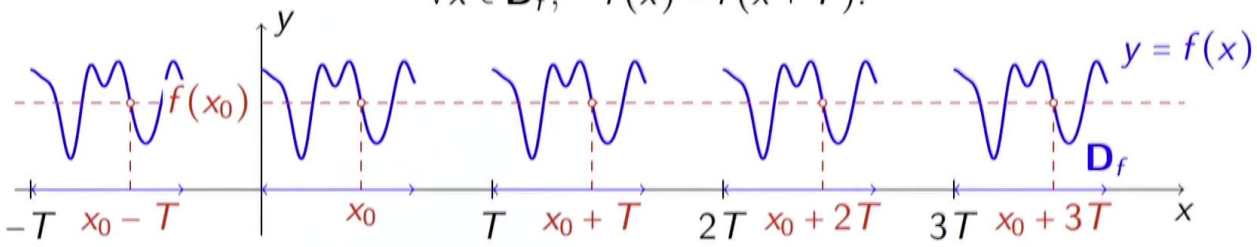
Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ est T-périodique (avec $T > 0$) si

- son domaine de définition $\mathbf{D}_f$ est T-périodique dans le sens que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{D}_f \quad \Rightarrow \quad x + T \in \mathbf{D}_f;$$

- la fonction f prend la même valeur en x et en $x + T$:

$$\forall x \in \mathbf{D}_f, \quad f(x) = f(x + T).$$



Insistons sur le fait que, évidemment si x bouge à l'intérieur du domaine de définition, le x + T bouge lui aussi, la valeur f de x peut changer, elle changera usuellement la valeur f de x plus T va changer dans le même sens. Ils resteront égaux entre eux. Voici, sur le graphe ce que cela signifie. J'ai ici une fonction, j'ai son domaine de définition. Le domaine de définition, nous le symbolisons ici par ces flèches bleues. C'est là, par exemple ici, j'ai une plage de valeur x pour laquelle j'ai une valeur f de x inscrite. Si je me place maintenant en un point quelconque, je vais noter x0. J'ai ici la valeur prise par la fonction f de x0. Si je modifie ce x0, c'est-à-dire si je le translate, si je lui rajoute t, je suis en un autre point du domaine de définition et la valeur prise par la fonction est à nouveau cette même valeur f de x0.

Notes

Summary

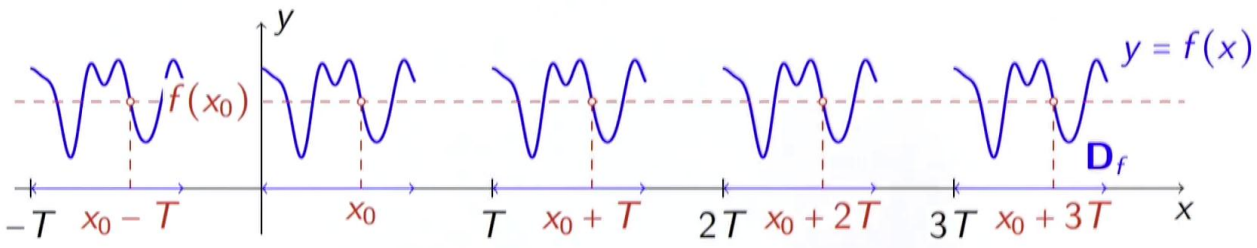
2m 41s

Proposition

Proposition

Toute fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$, *$T$-périodique est également (nT)-périodique pour tout* $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$:

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{D}_f \quad \Rightarrow \quad x + nT \in \mathbf{D}_f$ *et*
- $\forall x \in \mathbf{D}_f, \quad f(x) = f(x + nT)$.



Remarquons que les deux conditions que je viens de donner pour une fonction périodique doivent être formulées d'une façon quelque peu différente. On peut en effet modifier la définition dans le sens suivant : c'est-à-dire que si x est dans le domaine de définition, on peut dire au lieu de x + T on peut translater vers la gauche, dire que c'est x - T qui est dans le domaine de définition et que dans les points x et x - T, la fonction f prend la même valeur. En effet, vous pouvez tout à fait, dans le graphe que j'ai utilisé précédemment, regarder le point x0 la valeur de la fonction au point x0 donc f de x0. Si je translate vers la gauche, je suis ici à x0 - T, et je dois ré-obtenir la même valeur pour la fonction. On peut même faire plus fort que cela. On a la proposition suivante : ici, on a une fonction qui est T - périodique. Alors elle est également n x T-périodique donc n pour 1, 2, 3 etc... Elle est également 2T -périodique, 3T -périodique, etc... Cela signifie simplement que si un point est dans le domaine de définition, je peux translater n x 2T, je reste dans le domaine de définition et la valeur prise en ces deux points par la fonction f reste la même.

Notes

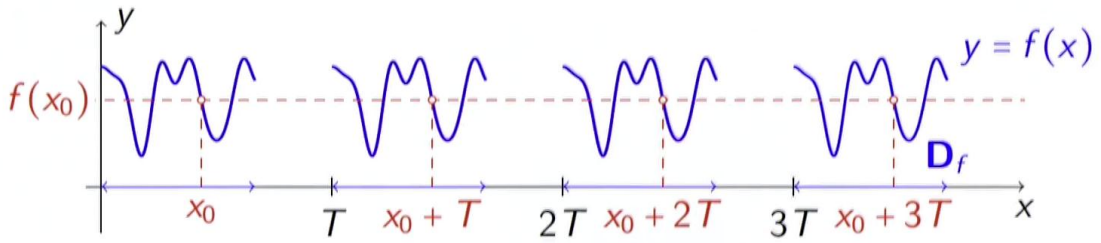
Summary

3m 48s

Proposition

Proposition

Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$, *est* T*-périodique si et seulement si son graphe* $\mathcal{G}_f$ *reste invariant par une translation de* T *unités le long de l'axe des* x.



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

On le voit immédiatement sur le graphe, ici le point x0 avec la valeur prise, f de x 0. Si je translate, par exemple, 2T et encore une fois 2T donc de deux T en tout, je retrouve la même valeur, cette fonction est également 2T périodique. Ce que j'ai fait avec 2T, vous pouvez également le faire avec 3T, ou avec - T voir - 2T si vous le voulez. Formulons à présent une proposition qui lie la notion de périodicité avec le graphe de la fonction correspondante. Je prend une fonction f, domaine de définition Df dans R et x transformé en f de x, je vais admettre qu'elle est T - périodique. Le graphe d'une fonction, je le dénomme Gf donc c'est l'ensemble des points x y tel que le y est toujours donné par le f de x correspondant. Nous avons ici un exemple, l'axe des x, des y et le graphe de la fonction, y = f de x, en bleu. Alors, la fonction va être T -périodique si, et seulement si, ce graphe reste invariant par une translation de T unité, le long de l'axe des x. Regardons ça un peu de plus près : voici cette translation, je prends le graphe, je le translate de T unité vers la droite et je retrouve le même graphe partout, donc c'est la propriété T périodique vu sur le graphe.

Notes

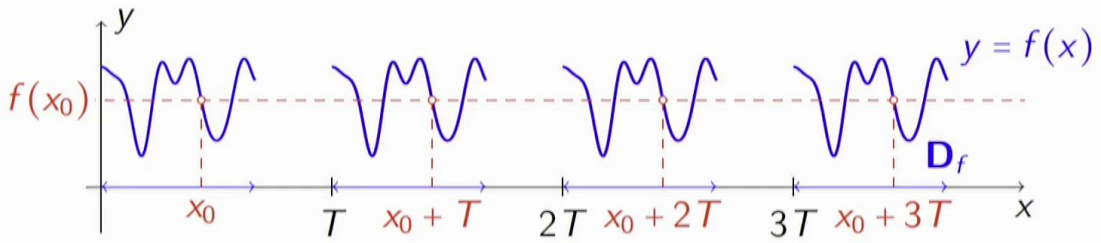
Summary

5m 10s

Proposition

Proposition

Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$, *est* T*-périodique si et seulement si son graphe* $\mathcal{G}_f$ *reste invariant par une translation de* T *unités le long de l'axe des* x.



REPLAY

Ca va dans les deux sens, c'est si, et seulement si la fonction T est périodique seulement si ce graphe a cette symétrie de rester invariant par rapport aux translations de T unité le long de l'axe des x alors la fonction correspondante est T -périodique.

Notes

Summary

6m 44s

Définition

Définition

Soit f une fonction périodique. Nous dirons que T est la période de f si cette fonction est T-périodique, mais qu'elle n'est pas T'-périodique pour tout $T' \in]0, T[$.

En d'autres termes : $T = \min \left\{ P > 0 \;\middle|\; f(x+P) = f(x),\ \forall x \in \mathbf{D}_f \right\}$.

Remarquons que si f est un fonction constante, alors f est T-périodique pour tout $T > 0$, mais que la période de f n'existe pas.

Affinons encore quelque peu cette notion. Nous allons prendre une fonction qui est périodique. Nous allons dire que T est la période de f, si d'abord la fonction f est effectivement T -périodique mais si en plus il n'existe aucune valeur T ' comprise entre 0 et T donc une valeur plus petite tel que f serait T ' -périodique. On va dire que ceci est la période de la fonction f. On peut dire que la période c'est la plus petite valeur tel que f de x + P redonne f de x pour tous les x dans le domaine de définition. Il faut être quelque peu prudent, ici j'ai mis "minimum", c'est-à-dire qu'il faut qu'une plus petite valeur positive de ce type existe. Si vous prenez par exemple, la fonction constante f de x définie sur tout l'axe des x réels qui rend toujours le même nombre, une fonction constante, alors elle est T -périodique pour tout T positif. Mais là, on ne peut pas dire qu'elle a une période parce que il n'y a pas de période positive que l'on peut qualifier d'être la plus petite des périodes possible.

Notes

Summary

7m 02s

Périodicité des fonctions sinus et cosinus

Nous avons déjà mentionné le fait que

$$P(\alpha) = P(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{avec} \quad \beta = \alpha + k\,2\pi.$$

Il en découle que les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

Alors, revenons maintenant après cette clarification sur la notion de T - périodicité d'une fonction, à la fonction sinus et cosinus. Rappelons un fait que nous avions mentionné à l'époque. On s'était intéressé au fait : que ce passe-t-il si pour deux angles alpha et delta donnés, nous avons les points P alpha et P bêta qui coïncident ? Nous avons donné une réponse claire. Nous avons dit : "ok, l'angle alpha et bêta évidemment si les angles sont égaux, ces points coïncident mais ce n'est pas la seule possibilité". En fait, nous avons vu qu'il suffit d'avoir bêta égal à alpha module aux 2π. On peut obtenir bêta à partir de alpha en ajoutant un multiple entier de 2π à cet angle alpha. Si vous regardez cela, cela signifie que, pour le sinus et le cosinus, ce sont les ordonnées et l'abscisse des points P alpha. Si l'angle alpha est augmenté, disons de 2π, le sinus et le cosinus sont restés les mêmes.

Notes

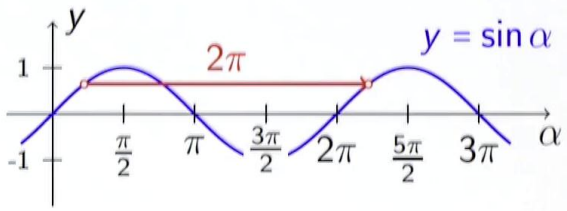
Summary

8m 23s

La période des fonctions sinus et cosinus

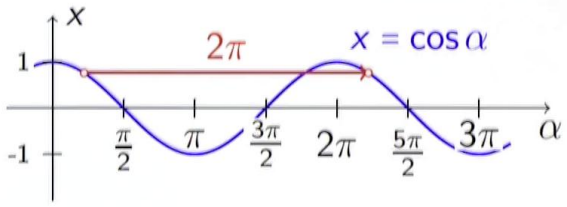
- La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \sin\alpha$ est 2π-périodique :

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi), \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$



- La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \cos\alpha$ est 2π-périodique :

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi), \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$



Ces deux fonctions n'admettent pas de période strictement comprise entre 0 et 2π.

Leur période est donc égale à 2π.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous formulons donc le résultat suivant : la fonction sinus, donc sin qui va de R dans R, avec alpha me rend un sinus alpha qui doit rester compris entre -1 et 1, nous l'avons dit la dernière fois, alors cette fonction est 2π périodique. C'est-à-dire que si je change l'angle alpha en alpha + 2π, le sinus reste le même. Cela s'observe tout à fait sur le graphe. Vous avez ici le graphe de sinus alpha. Ici, entre 0 et 2 π c'est le graphe fondamental que nous avions dessiné la dernière fois point par point. Effectivement, si ici vous augmentez le alpha de 2π, vous retrouvez la même valeur pour sinus alpha. Le sinus d'alpha et le sinus d'alpha +2π restent le même pour tous les alpha dans R. Pour le cosinus, vous avez le résultat similaire. Cette fois-ci la fonction cos est aussi 2π périodique. C'est-à-dire que le cosinus à l'endroit alpha est absolument le même que le cosinus à l'endroit alpha +2π. Le rajout de 2π à l'angle alpha ne change pas la valeur du cosinus alpha. Evidemment, on pourrait encore se poser la question : est-ce que 2π est effectivement la période ? Est-ce que on pourrait trouver une période plus petite que 2π pour le sinus et le cosinus ?

Notes

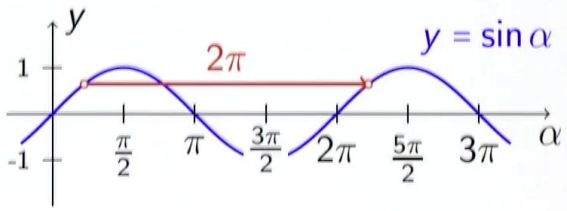
Summary

9m 35s

La période des fonctions sinus et cosinus

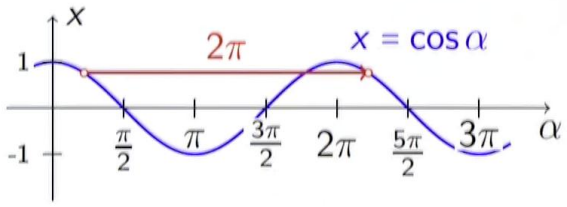
- La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \sin \alpha$ est 2π-périodique :

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi), \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$



- La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \cos \alpha$ est 2π-périodique :

$$\cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi), \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$



Ces deux fonctions n'admettent pas de période strictement comprise entre 0 et 2π.

Leur période est donc égale à 2π.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Un regard rapide sur le graphe montre immédiatement que cela ne sera pas possible. La période du sinus et du cosinus est effectivement 2π, c'est là le nombre le plus petit que l'on peut choisir comme périodicité de ces fonctions.

Notes

Summary

10m 56s

Rappel : les fonctions paires

Définition

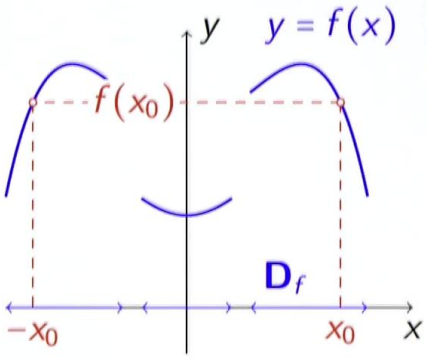
Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ est paire si

- son domaine de définition $\mathbf{D}_f$ est symétrique dans le sens que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{D}_f \quad \Rightarrow \quad -x \in \mathbf{D}_f ;$$

- la fonction f prend la même valeur en x et en $-x$:

$$\forall x \in \mathbf{D}_f, \quad f(x) = f(-x).$$



Changeons quelque peu de thème et revenons à une autre propriété que les fonctions peuvent avoir : ce sont les propriétés paire et impaire. Commençons par la propriété paire. Regardons une fonction, à nouveau définie sur un domaine de f sous-ensemble de nombres réels qui me rend un nombre réel que je note f de x. Je vais dire que cette fonction est paire si les deux conditions suivantes sont remplies. La première condition c'est que si un nombre réel est compris dans le domaine de définition, si ce nombre x est dans Df - x l'est aussi. Vous avez ici le graphe d'une fonction qui va être paire. Vous avez ici, de nouveau, le domaine de définition. Un bout ici, un deuxième ici un troisième ici. Il faudra que, si un élément x est dans le domaine, le -x l'est aussi. Deuxième condition : c'est que la fonction f prend, dans ces points x et -x la même valeur. C'est-à-dire que si, en x j'ai une valeur de fonction f de x en -x j'ai la même valeur.

Notes

Summary

11m 15s

Rappel : les fonctions impaires

Définition

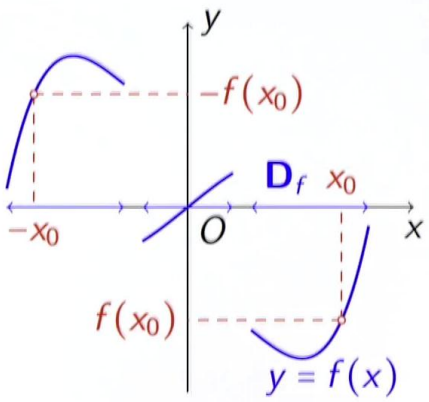
Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ est impaire si

- son domaine de définition $\mathbf{D}_f$ est symétrique dans le sens que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{D}_f \quad \Rightarrow \quad -x \in \mathbf{D}_f ;$$

- la fonction f prend des valeurs opposées en x et en $-x$:

$$\forall x \in \mathbf{D}_f, \quad f(x) = -f(-x).$$



Définissons à présent ce que veut dire une fonction impaire. Cette fois-ci, pour la fonction définie sur son domaine Df dans R, x est transformé en f de x c'est tout à fait la situation que nous avions. On pourra dire que elle est impaire si on a les deux conditions suivantes : c'est que d'abord le domaine de définition est symétrique. C'est la même condition que précédemment. Donc si un point est dans le domaine de définition comme ici, là il est sur ce tronçon du domaine de définition, le - est également dans le domaine de définition. C'est la condition suivante qui change quelque peu. Cette fois ci, dans des points x et -x la fonction ne prendre pas la même valeur mais va prendre la même valeur au signe près. Ici, si je regarde la valeur prise dans un point x0 et je la compare la valeur prise en un point -x0, j'obtiens la même valeur au signe près.

Notes

Summary

12m 24s

Remarque

Si f est une fonction définie sur un domaine symétrique par rapport à l'origine :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{D}_f \quad \Rightarrow \quad -x \in \mathbf{D}_f \,,$$

on teste la parité de f en calculant $f(-x)$:

- si $\forall\, x \in \mathbf{D}_f \,,\ f(-x) = f(x)\,,$ la fonction f est paire,
- si $\forall\, x \in \mathbf{D}_f \,,\ f(-x) = -f(x)\,,$ la fonction f est impaire,
- sinon, la fonction f n'est ni paire ni impaire.

Une remarque, peut-être, sur ces fonctions paires et impaires. Si on est en présence d'une fonction f qui est définie sur un domaine symétrique c'est-à-dire que, toujours lorsque le x est dans le domaine, le point -x l'est aussi. On peut tester ce qu'on appelle la parité. On peut voir si cette fonction est paire ou impaire, ou est ce qu'elle est ni l'un ni l'autre. Pour le faire, le mieux c'est de calculer f à l'endroit -x. On change la valeur d'entrée x en -x. On calcule autant qu'on peut. Si on retrouve pour f de -x la même valeur que pour f de x, on va dire que la fonction est paire. Si on retrouve la même valeur mais au signe près uniquement, on va dire que la fonction est impaire. Si on retrouve ni la même valeur, ni la même valeur au signe près, on pourra qu'elle est ni paire ni impaire.

Notes

Summary

13m 21s

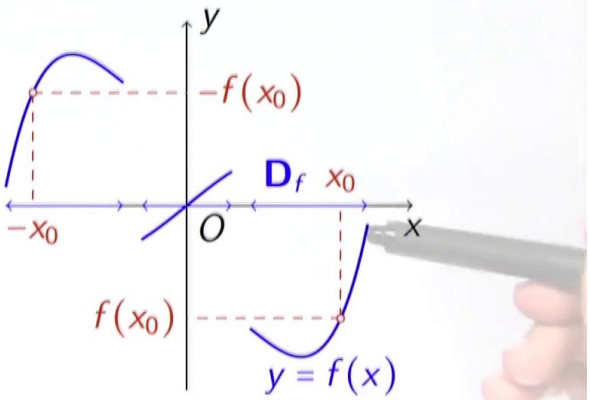
Graphe d'une fonction impaire

Proposition

Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x)$
est impaire si et seulement si son graphe

$$\mathcal{G}_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \mathbf{D}_f,\ y = f(x)\right\}$$

admet une symétrie de centre O (origine du système d'axes xy).



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Regardons le lien entre parité et le graphe de la fonction correspondante. Commençons par la fonction paire. J'ai ici une fonction f, comme précédemment. On va dire qu'elle est paire si, et seulement si, le graphe, ça c'est l'ensemble de x y, le x est dans le domaine de définition, le y est donné par la fonction; si le graphe admet une symétrie d'axe y, c'est une symétrie le long de l'axe ici, de là à là. Cela est une conséquence immédiate du fait que la fonction prend, en deux points, x0 et -x0, la même valeur, c'est cette même valeur qui permet de formuler cette symétrie. Encore une fois, c'est une propriété qui va dans les deux sens. Si, et seulement si. Pour les fonctions impaires, dans la situation correspondante : une fonction, comme précédemment, avec son graphe. Elle sera impaire si le graphe présente une symétrie de centre O, O est l'origine du système d'axe. Si je suis en un point x0, avec la valeur de la fonction ici, si je passe dans -x0, la valeur de la fonction change de signe si bien que les points correspondants du graphe sont symétriques par rapport à l'origine.

Notes

Summary

14m 14s

Graphe d'une fonction impaire

Proposition

Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x)$ *est impaire si et seulement si son graphe*

$$\mathcal{G}_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \mathbf{D}_f\,,\; y = f(x)\right\}$$

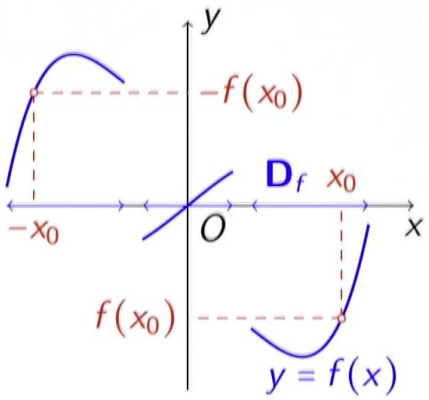
admet une symétrie de centre O (origine du système d'axes xy).

Remarquons que si f est impaire,

$$0 \in \mathbf{D}_f \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0.$$

Cela découle du fait que

$$f(0) = f(-0) = -f(0)\,.$$



Ici peut-être une remarque : si vous avez une fonction impaire et si 0 appartient au domaine de définition, ce qui est le cas ici dans cette figure, nécessairement, cette fonction va prendre la valeur nul pour x égal à 0. Cela découle immédiatement de la définition parce que la valeur f de 0, par parité, (nous avons une fonction qui est impaire donc elle devrait être égale à -f de -0, puisque 0 vaut -0, f de 0 vaut f de -0) le -, par parité, passe devant et l'unique nombre réel, f0 qui est égal à lui-même au signe près, également à -f 0, c'est 0 !

Notes

Summary

15m 34s

Parité des fonctions sinus et cosinus

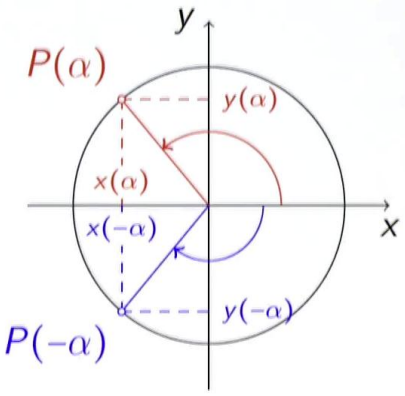
Les points $P(\alpha)$ et $P(-\alpha)$ sont symétriques par rapport à l'axe x.

On en déduit que ces deux points ont même abscisse :

$$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$$

et des ordonnées opposées :

$$\sin\alpha = -\sin(-\alpha)\,.$$



Revenons après cette notion de parité à ce que l'on peut dire sur le sinus et le cosinus. On va revenir sur ces symétries sur le cercle trigonométrique. Ici, vous avez une première symétrie : j'ai le cercle trigonométrique, j'ai pris un angle, alpha et je prend un angle -alpha. Comme ça je suis dans la situation de parité, je vais comparer le sinus, respectivement le cosinus pour l'angle alpha et -alpha. Observons et nous l'avons déjà fait lors d'une dernière séquence. Observons les points P alpha et P -alpha et observons surtout leurs coordonnés. On observe immédiatement, pour le cosinus le cosinus c'est l'abscisse des points. L'abscisse de P alpha et l'abscisse de P -alpha, c'est le même abscisse, ça signifie que le cosinus de alpha, ou le cosinus de -alpha doit toujours redonner la même valeur. Quant au sinus, c'est les ordonnées, le sinus de P alpha et le sinus de P -alpha en valeur absolue sont égaux, mais de signes contraires. Cette fois-ci, il faut écrire que le sinus d'alpha c'est - le sinus de -alpha.

Notes

Summary

16m 22s

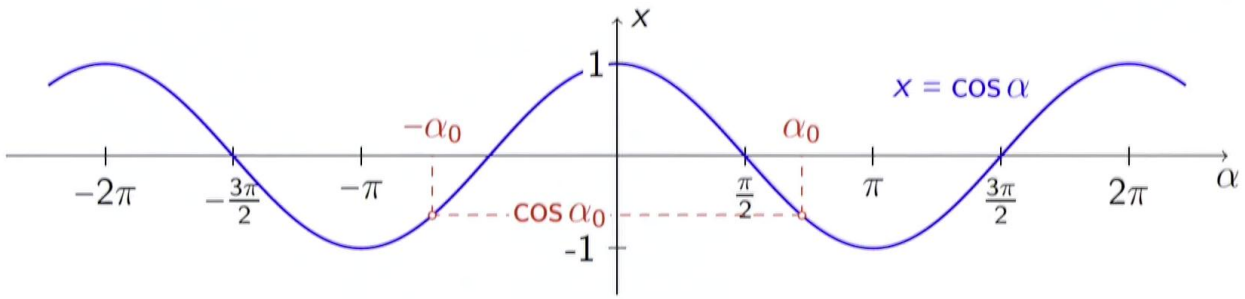
La fonction cosinus est paire

Proposition

La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto x = \cos\alpha$, *est paire :*

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Son graphe $\mathcal{G}_{\cos}$ *admet une symétrie d'axe x (dans le système d'axes* αx*).*



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Cela nous mène à la proposition suivante qui dit, en essence, que le sinus est une fonction impaire. C'est-à-dire que le sinus de -alpha est toujours -sinus d'alpha. Ca c'est vrai pour tous les alpha, nombres réels et cela revient à dire que le graphe du sinus a une symétrie de centre O. On l'observe ici, très aisément. A l'endroit alpha, j'ai une valeur sinus alpha; à l'endroit -alpha, j'ai la même valeur au signe près et cela donne deux points sur le graphe du sinus, G sinus, qui sont en position de symétrie de centre 0. Le cosinus, en revanche, est pair c'est-à-dire que le cosinus de -alpha redonne toujours le cosinus d'alpha, toujours, pour tous les alpha nombres réel et cela signifie que le graphe admet une symétrie d'axe x. Je vous rappelle que, ici, pour le cosinus nous avons toujours le choix de l'axe alpha horizontal, et l'axe vertical s'appelle x. Nous avons donc une symétrie d'axe vertical. En effet, en un point alpha, et en un point -alpha, j'observe la même valeur pour le cosinus et cela correspond précisément à cette symétrie d'axe.

Notes

Summary

17m 38s

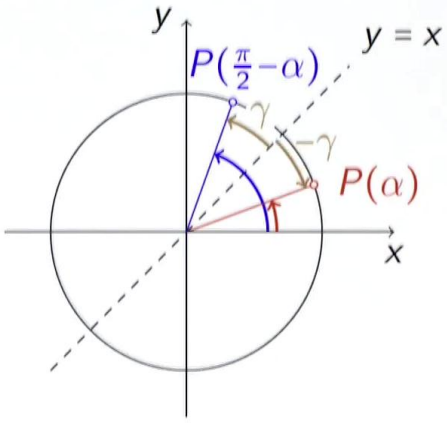
Angles complémentaires

Les angles α et β sont complémentaires si leur somme vaut $\frac{\pi}{2}$.

Les points $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ sont alors symétriques par rapport à l'axe $y = x$.

En posant $\gamma := \frac{\beta-\alpha}{2}$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= \frac{\pi}{2} \\ -\alpha+\beta &= 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= \frac{\pi}{4}-\gamma \\ \beta &= \frac{\pi}{4}+\gamma \end{cases}$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Passons encore à d'autres symétries que l'on peut observer sur le cercle trigonométrique et transcrire de cette façon sur les fonctions. C'est une étape qui est, je pense, difficile à apprendre mais qui est importante. Il faut essayer de formuler ces propriétés aussi bien sur le cercle trigonométrique que sur le graphe des fonctions. Il faut essayer de formuler ces propriétés pour finir dans une relation écrite. Pour illustrer cette façon de faire, on va considérer deux angles, alpha et bêta qui sont complémentaires. C'est à dire, en prenant un alpha et un bêta dont la somme vaut π demi. Là vous avez le cercle trigonométrique. Un angle alpha, avec P alpha. J'ai un angle en bleu, dont la somme doit valoir π demi. Pour bleu, je prend simplement π demi - alpha, c'est-à-dire que je prend π demi moins alpha donc la partie où je reviens ici en arrière correspond à l'angle alpha. Là, j'obtiens deux points et ces points vont toujours être situés de façon symétrique par rapport à un axe y égale x. Si vous faites varier alpha, vous verrez que cette symétrie reste préservée. Cette symétrie peut être exprimée encore par une autre relation, on peut la découvrir sur le cercle trigonométrique.

Notes

Summary

18m 59s

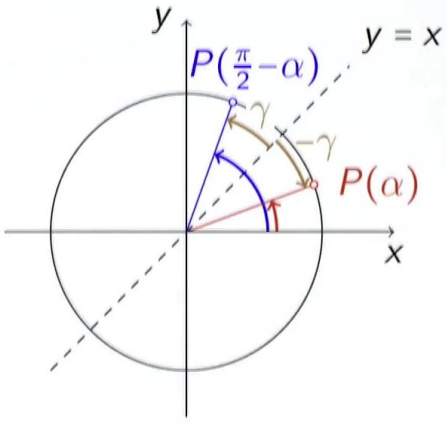
Angles complémentaires

Les angles α et β sont complémentaires si leur somme vaut $\frac{\pi}{2}$.

Les points $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ sont alors symétriques par rapport à l'axe $y = x$.

En posant $\gamma := \frac{\beta-\alpha}{2}$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= \frac{\pi}{2} \\ -\alpha+\beta &= 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= \frac{\pi}{4}-\gamma \\ \beta &= \frac{\pi}{4}+\gamma \end{cases}$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

On peut d'abord la découvrir ici, le long de l'axe, on voit que pour obtenir alpha ou bêta, il faut se déplacer d'une même quantité. On peut aussi très formellement retrouver cela : on prend la différence entre bêta et alpha, on la divise par deux, et on l'appelle gamma. Nous avons dit que la somme des angles alpha bêta vaut π demi. Nous savons que, ici, gamma est donné par cette formule. Donc -alpha + beta c'est 2 gamma. Vous avez là un système, que vous pouvez résoudre par rapport à alpha et bêta et vous obtenez pour alpha, π quart - gamma et pour bêta, π quart + gamma. On obtient exactement ce que l'on observe ici : 2π π quart, on fait une fois un + gamma vers bêta et un - gamma vers alpha. Dans ce cas, on retrouve cette même position de symétrie des deux points correspondants.

Notes

Summary

20m 26s

Proposition : angles complémentaires

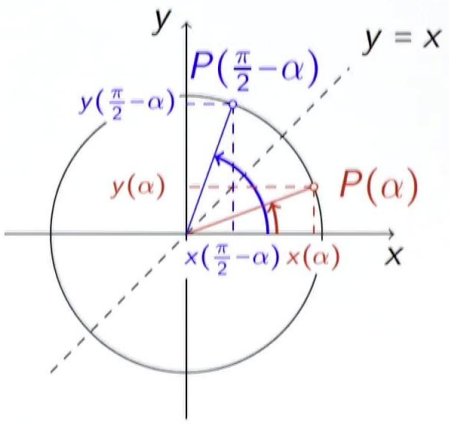
Proposition

Si les angles α et β sont complémentaires ($\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$), alors

$$\sin\beta = \cos\alpha \quad \textit{et} \quad \cos\beta = \sin\alpha\,.$$

On a donc, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \quad \textit{et} \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha\,,$$



Si les angles alpha et bêta sont complémentaires, si leur somme vaut π demi et là on formule une proposition pour ces angles complémentaires. Qu'est ce que l'on peut observer ? Il faut observer les coordonnés des point P alpha et P bêta ou, si vous voulez, π demi - alpha. Si j'observe, pour commencer, le sinus de bêta, le bleu : le sinus, c'est l'ordonnée ici. Je retrouve, par symétrie, cette même quantité comme abscisse de P alpha et l'abscisse, c'est cosinus alpha. Donc j'obtiens sinus bêta est égal à cosinus alpha. De façon similaire, le cosinus bêta, là je le retrouve comme sinus de alpha. Je peux formuler le sinus de bêta, c'est le cosinus de alpha et le cosinus de bêta, c'est le sinus de alpha. Il y a échange des valeurs, lorsque les angles sont complémentaires. Vous pouvez tout à fait formuler ça de façon différente, c'est-à-dire que vous pouvez remplacer le bêta par le π demi - alpha. Alors vous obtenez que le sinus de π demi - alpha, c'est le cosinus alpha et le cosinus de π demi -alpha c'est le sinus de alpha. C'est la même relation, mais cette fois-ci écrite avec une seule lettre.

Notes

Summary

21m 22s

Proposition : angles complémentaires

Proposition

Si les angles α et β sont complémentaires ($\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$), alors

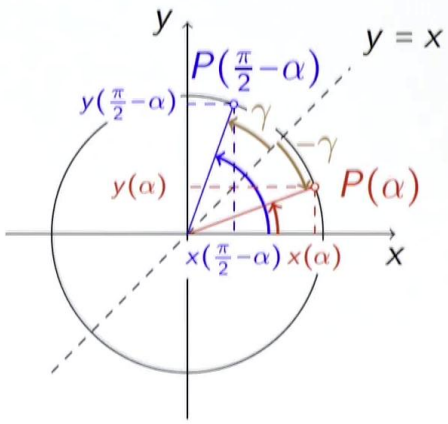
$$\sin\beta = \cos\alpha \quad \textit{et} \quad \cos\beta = \sin\alpha\,.$$

On a donc, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \quad \textit{et} \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha\,,$$

ou, sous une forme plus symétrique :

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{4} + \gamma\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{4} - \gamma\right)\,, \quad (\gamma \in \mathbb{R}).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

De façon, plus symétrique, vous pouvez remplacer les angles alpha et bêta, le rouge et le bleu, vous pouvez dire : "ok, je préfère utiliser les angles π quart + gamma et π quart - gamma". Si vous avez cela, ça signifie simplement que le sinus de π quart + gamma redonne le cosinus de π quart - gamma. Il suffit d'écrire, là, une seule fois cette relation, parce que gamma peut être positif ou négatif. Alors on obtient les deux formules obtenues précédemment. Là, la formulation est plus symétrique, elle est plus dense.

Notes

Summary

22m 47s

Proposition : angles complémentaires

Proposition

Si les angles α et β sont complémentaires ($\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$), alors

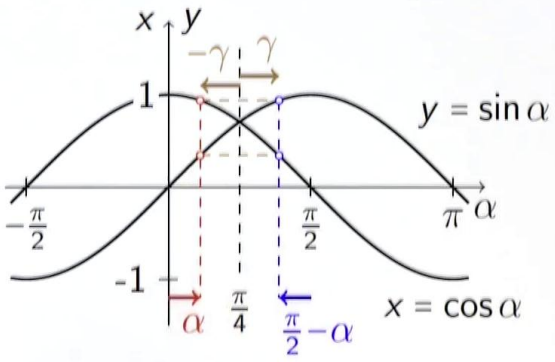
$$\sin\beta = \cos\alpha \quad \textit{et} \quad \cos\beta = \sin\alpha\,.$$

On a donc, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \quad \textit{et} \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha\,,$$

ou, sous une forme plus symétrique :

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{4} + \gamma\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{4} - \gamma\right)\,, \quad (\gamma \in \mathbb{R}).$$



On peut observer cette dernière formulation, tous comme les autres, sur le graphe. Au lieu d'interpréter ces relations sur le cercle trigonométrique, on peut les interpréter sur le graphe des fonctions. Nous avons, ici, dans un système d'axe alpha y, pour commencer, le graphe du sinus, qui est ici. Pour le cosinus, on prend le système d'axe alpha x, donc l'axe vertical, je lui ai donné deux noms conformément au fait que nous avons choisi ce type de dénomination pour les graphes. ici vous avez le cosinus. Pour la formulation, disons de la première ligne ou de la deuxième ligne, ici, on peut tout à fait formuler ça de la façon suivante : si, par exemple, je me place ici en ce point. Ca c'est le sinus de alpha. Ici, j'ai le point π demi - alpha donc + alpha - alpha. J'ai la même valeur, mais cette fois-ci pour le cosinus. C'est bien ce que j'ai ici. Dans la formulation symétrique, on se met à π quart. Ca c'est un point d'intersection des deux graphes et, par exemple, on peut dire que si je prends + gamma ou - gamma, alors le sinus correspond au cosinus. Donc, le sinus de π quart + gamma donne le cosinus de π quart - gamma qui est ici.

Notes

Summary

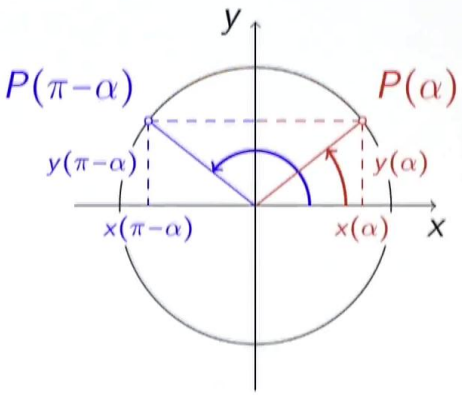
23m 24s

Proposition : angles supplémentaires

Proposition

Si les angles α et β sont supplémentaires ($\alpha + \beta = \pi$), alors

$$\sin\beta = \sin\alpha \quad \textit{et} \quad \cos\beta = -\cos\alpha\,.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Parlons encore d'angles supplémentaires cette fois-ci. Deux angles alpha et bêta, on va les appeler supplémentaires si leurs somme vaut π, un demi-tour. Ici, dans le cercle trigonométrique, j'ai dessiné une telle situation. En rouge on a l'angle alpha, position P alpha. En bleu, on a l'angle bêta. La somme des angles doit valoir π c'est-à-dire que pour bêta, je peux écrire π - alpha, si bien que la somme des deux angles va me redonner π. On voit, immédiatement, c'est π - alpha, que cette fois-ci les deux points P alpha et P π - alpha sont symétriques par rapport à l'axe vertical, l'axe des y. De nouveau, on peut utiliser la même astuce que précédemment. On peut prendre la demi différence. On prend beta - alpha, c'est l'angle ici entre deux. On le divise par deux et on l'appelle gamma et on considère le système que la somme des angles alpha et bêta au π que ici, moins alpha + beta vaut 2 gamma. On résout ce système, et on obtient ce que l'on observe sur le cercle trigonométrique : si je part à π demi, si je fais + gamma, j'obtient bêta et avec - gamma, j'obtient alpha. Donc je suis en des positions π demi, plus ou moins gamma. Regardons ce que l'on peut dire pour des angles supplémentaires en présence d'un sinus ou d'un cosinus.

Notes

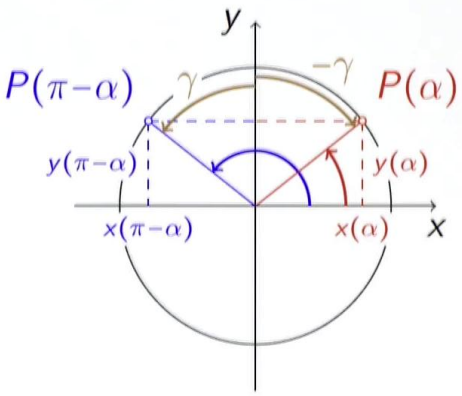
Summary

24m 56s

Remarque : angles supplémentaires

On peut écrire les deux relations précédentes sous une forme plus symétrique :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right), \quad (\gamma \in \mathbb{R}),$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous le faisons sur le cercle trigonométrique sur le dessin introduit précédemment. Si je compare, ici par exemple, la valeur du sinus de beta, la valeur ici en bleu, je la retrouve ici en rouge, donc le sinus de alpha et de bêta sont les mêmes. Les cosinus, en revanche, sont différents. Le cosinus de bêta, le cosinus d'alpha sont identiques, uniquement au signe près. Je peux écrire que sinus alpha est égal à sinus bêta. En revanche, le cosinus de bêta est égal à - le cosinus d'alpha. On peut aussi, comme nous l'avons déjà fait précédemment, nous défaire de la deuxième lettre bêta et formuler avec une seule variable alpha. On remplace formellement, simplement, le bêta par π - alpha pour obtenir ces relations. Le sinus de π - alpha c'est sinus alpha. Le cosinus π - alpha c'est - cosinus alpha. On peut aussi décrire ces deux relations sous une forme plus symétrique en se servant justement de l'angle gamma. Dans ce cas-là, vous voyez, si vous regardez le sinus pour π demi + ou - gamma, le sinus reste le même et on peut observer ce fait sur le graphe du sinus.

Notes

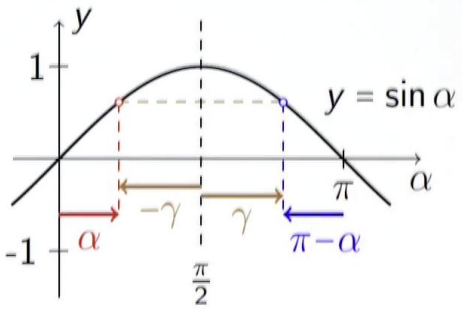
Summary

26m 25s

Remarque : angles supplémentaires

On peut écrire les deux relations précédentes sous une forme plus symétrique :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right), \quad (\gamma\in\mathbb{R}),$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

J'ai π demi, si je prends le sinus à l'endroit + gamma ou - gamma, je conserve le même sinus, cela correspond à prendre un angle alpha et π - alpha, où j'ai le même sinus.

Notes

Summary

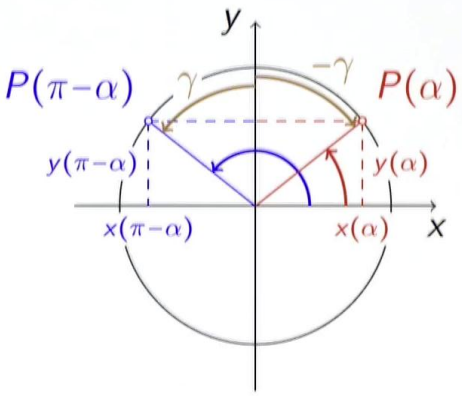
27m 40s

Remarque : angles supplémentaires

On peut écrire les deux relations précédentes sous une forme plus symétrique :

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\gamma\right)=\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\gamma\right), \quad (\gamma\in\mathbb{R}),$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\gamma\right)=-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\gamma\right), \quad (\gamma\in\mathbb{R}).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Pour le cosinus, le raisonnement est tout à fait similaire. Je vais à π demi, + et - gamma et j'obtiens les cosinus de signes contraires. Le cosinus de π demi + gamma, qui est ici et de π demi - gamma, sont égaux au signe près.

Notes

Summary

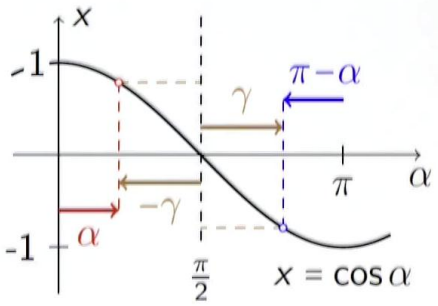
27m 56s

Remarque : angles supplémentaires

On peut écrire les deux relations précédentes sous une forme plus symétrique :

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\gamma\right)=\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\gamma\right), \quad (\gamma\in\mathbb{R}),$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\gamma\right)=-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\gamma\right), \quad (\gamma\in\mathbb{R}).$$



Là, de nouveau, vous pouvez faire le même raisonnement sur le graphe des cosinus. Là, vous avez le graphe du cosinus, vous avez le 0 de ce cosinus en π demi. Si vous regardez la valeur du cosinus en vous écartant de + ou - gamma de π demi, vous obtenez des valeurs différentes pour le cosinus, c'est ce que j'écris ici, le cosinus de π demi + gamma et de π demi - gamma sont de signes contraires. Cela revient au fait de dire que si, ici je prend alpha et là, π - alpha, j'obtient des cosinus de signes contraires.

Notes

Summary

28m 14s

Les symétries des fonctions sinus et cosinus

Ce que nous avons appris :

- la périodicité des fonctions sinus et cosinus ;
- la parité des fonctions sinus et cosinus ;
- sinus et cosinus des angles complémentaires ;
- sinus et cosinus des angles supplémentaires.

Prochaine étape :

l'utilisation du sinus et du cosinus dans les triangles rectangles.

Résumons ! Qu'est ce que nous appris aujourd'hui ? Nous avons appris que ces fonctions, sinus et cosinus -qui étaient définies, justement, uniquement par leurs propriétés d'être des abscisses et des ordonnées d'un point P alpha sur le cercle trigonométrique- nous avons appris qu'elles sont périodiques, qu'elles ont des parités, paires, impaires, selon le sinus et le cosinus. Nous avons appris à manipuler le sinus et le cosinus pour des angles complémentaires et pour des angles supplémentaires, c'est-à-dire des angles dont la somme vaut π demi et π. La prochaine étape, nous allons introduire là quelque chose d'intermédiaire, on va montrer comment on peut utiliser ces fonctions sinus et cosinus dans le calcul de triangles rectangles. C'était un chapitre qui, je pense, a une valeur historique mais aussi tout à fait réelle dans des calculs quotidiens en présence de triangle rectangles. Merci, de votre attention. A la prochaine !

Notes

Summary

28m 49s