ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus et leurs inverses

2.2 Les symétries des fonctions sinus et cosinus

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

EPFL

Rappel sur les fonctions périodiques

Définition

Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ est T-périodique (avec $T > 0$) si

Guten Tag. Beim letzten Mal habe ich die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus eingeführt. Das war wahrscheinlich ziemlich unspektakulär, wenig überraschend. Ich hatte diese Funktionen eingeführt, ohne einen algebraischen Ausdruck anzugeben, um die Werte, die Sinus und Kosinus annehmen, für einen gegebenen Winkel alpha zu berechnen. Nein, wir haben diese Funtionen als Abszisse und Ordinate von einem von einem Punkt P alpha auf dem Einheitskreis definiert. Es ist bemerkenswert, dass man trotz des Fehlens einer algebraischen Rechenformel wichtige Eigenschaften dieser Sinus- und Kosinusfunktionen festlegen kann. Übrigens haben wir das auch schon getan. Wir haben herausgefunden, dass diese Funktionen maximale und minimale Werte größer oder kleiner 1 annehmen, an ganz bestimmten Punkten. Wir haben herausgefunden, wo diese Sinus- und Kosinusfunktionen den Wert Null annehmen. Wir haben Werte- bereiche gefunden, in denen diese Funktionen monoton steigend oder abnehmend sind. Heute setze ich meine Studie dieser Sinus- und Kosinusfunktionen fort. Zu Beginn möchte ich diejenigen, die diese Begriffe schon kennen, darüber informieren, dass ich danach erklären werde, was eine periodische Funktion ist.

Notes

Summary

0m 04s

Rappel sur les fonctions périodiques

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Définition

Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ est T-périodique (avec $T > 0$) si

- son domaine de définition $\mathbf{D}_f$ est T-périodique dans le sens que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{D}_f \quad \Rightarrow \quad x + T \in \mathbf{D}_f;$$

- la fonction f prend la même valeur en x et en $x + T$:

$$\forall x \in \mathbf{D}_f, \quad f(x) = f(x + T).$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir gehen von einer Funktion f aus, die für einen Datenbereich definiert ist, den ich Df nenne und der eine Teilmenge reeller Zahlen ist. Wir werden eine Funktion nehmen, die mir mit einer Zahl x im Datenberreich Tf für f von x eine reale Zahl liefert. Eine solche Funktion bezeichne ich als T-periodisch. T ist ein positiver, T-periodischer Wert. Hierbei erfüllt diese Funktion f zwei Bedingungen. Die Erste ist, dass ihr Definiionsbereich Df T-periodisch ist. Was bedeutet das also? Das bedeutet folgendes: wenn ich einen beliebigen X-Wert, eine beliebige reale Zahl einsetze, die sich im Definitionsbereich befindet, kann ich sie verschieben, also ist x + t ebenfalls im Definitionsbereich. Und hier die zweite Bedingung: wenn ich jetzt davon ausgehe, dass der gewählte Wert oder die Werte, die die Funktion f an der Stelle x und x + t annimmt, dann sind die beiden Punkte gleichzeitig im Definitionsbereich, also ist x + t im Definitionsbereich, wenn x es ist. Ich kann also den Wert von f von x und von f von x + t berechnen und ich muss immer diesen gleichen Wert erhalten.

Notes

Summary

1m 23s

Rappel sur les fonctions périodiques

Définition

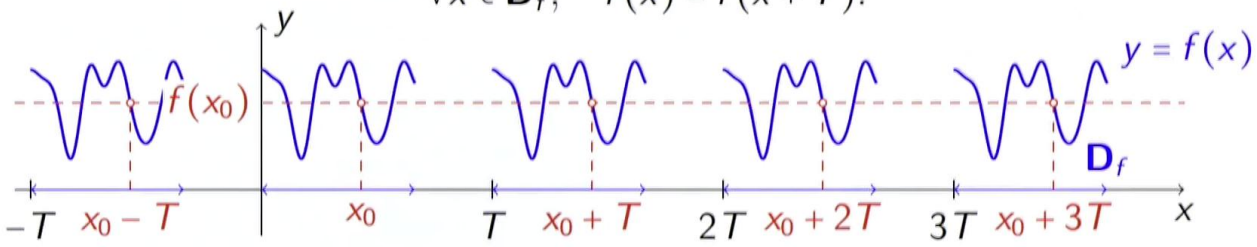
Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ est T-périodique (avec $T > 0$) si

- son domaine de définition $\mathbf{D}_f$ est T-périodique dans le sens que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{D}_f \quad \Rightarrow \quad x + T \in \mathbf{D}_f;$$

- la fonction f prend la même valeur en x et en $x + T$:

$$\forall x \in \mathbf{D}_f, \quad f(x) = f(x + T).$$



Man sollte sich also merken, dass wenn ich x im Definitionsbereich verschiebe, sich natürlich auch der x + T-Wert verschiebt, der f von x-Wert kann sich ändern, er ändert sich im Allgemeinen, der Wert von f von x + T wird sich in der gleichen Richtung bewegen. Sie gleichen sich gegenseitig aus. Hier auf dem Graphen sieht man, was das bedeutet. Hier habe ich eine Funktion und ihren Definitionsbereich. Der Definitionsbereich wird hier durch diese blauen Pfeile symbolisiert. Hier zum Beispiel habe ich einen x-Wert-Bereich, für den ich einen entsprechenden f von x-Wert habe. Wenn ich mir nun einen beliebigen Punkt anschaue, notiere ich x0. Hier habe ich den Wert, den die Funktion f von x0 annimmt. Wenn ich dieses x0 verändere, es also verschiebe, wenn ich t hinzurechne, Dann komme ich zu einem anderen Punkt des Definitionsbereichs und der Wert, den die Funktion annimmt, ist wieder der gleiche f von x0-Wert.

Notes

Summary

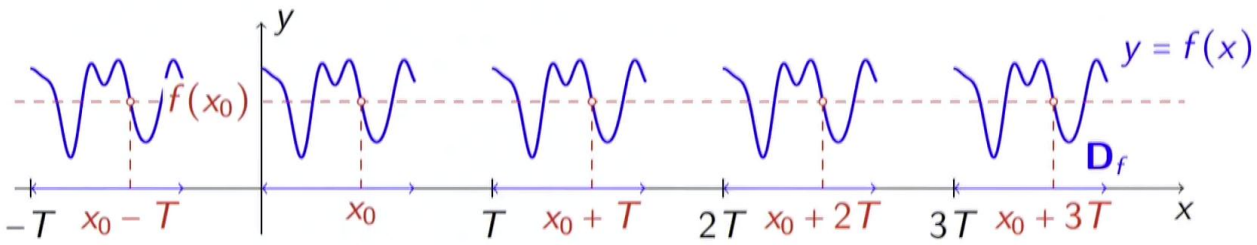
2m 41s

Proposition

Proposition

Toute fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$, *$T$-périodique est également (nT)-périodique pour tout* $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$:

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{D}_f \quad \Rightarrow \quad x + nT \in \mathbf{D}_f$ *et*
- $\forall x \in \mathbf{D}_f, \quad f(x) = f(x + nT)$.



Wir bemerken, dass die beiden Bedingungen, die ich für eine periodische Funktion gegeben habe, etwas anders formuliert werden müssen. Man kann die Definition wie folgt ändern: Das heißt, wenn x im Definitionsbereich ist, kann man anstelle von x + T nach links verschieben und damit ein x - T annehmen, das sich im Definitionsbereich befindet und dass die Funktion f an den Stellen x und x - T den gleichen Wert annimmt. Sie können sich bei dem Graphen, den ich zuvor benutzt habe, die Stelle x0 anschauen, den Wert der Funktion an der Stelle x0 also f von x0. Wenn ich nach links verschiebe, komme ich hier an, bei x0 - T, und ich müsste wieder den gleichen Wert für die Funktion erhalten. Man kann sogar noch weiter gehen. Wir haben folgende Aufgabe: Hier haben wir eine Funktion, die T-periodisch ist. Sie ist also auch n x T-periodisch. Also n für 1, 2, 3, usw... Sie ist auch 2T-periodisch, 3T-periodisch, etc... Das bedeutet einfach, dass, wenn ein Punkt sich im Definitionsbereich befindet, ich n x 2T verschieben kann, ich bleibe im gleichen Definitions- bereich und der Wert, den die Funktion an diesen beiden Stellen annimmt, bleibt derselbe. Man sieht es sofort am Graphen, hier an der Stelle x0 mit dem zugehörigen f von x0-Wert.

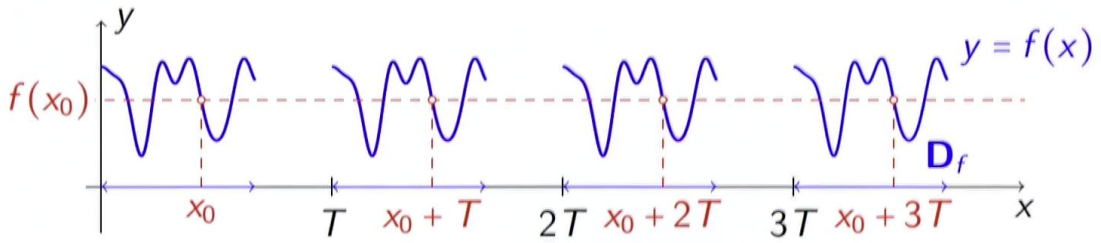
Notes

Summary

3m 48s

Proposition

Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$, *est* T*-périodique si et seulement si son graphe* $\mathcal{G}_f$ *reste invariant par une translation de* T *unités le long de l'axe des* x.



REPLAY

Wenn ich zum Beispiel um 2T und noch einmal 2T verschiebe also um insgesamt zwei Mal T, komme ich auf den gleichen Wert, diese Funktion ist ebenfalls 2T-periodisch. Was ich mit 2T gemacht habe, können Sie auch mit 3T,- T oder - 2T durchführen, wenn Sie möchten. Lassen Sie uns nun eine Aufgabe stellen, die den Begriff der Periodizität mit dem Graph der entsprechenden Funktion verbindet. Ich nehme eine Funktion f, Definitions- bereich Df in R und verändertes x in f von x, ich nehme an, dass sie T-periodisch ist. Der Graph einer Funktion, ich nenne ihn Gf, ist also die Gesamtheit der Punkte x y, wobei das y immer vom entsprechenden f von x gegeben wird. Hier haben wir ein Beispiel, die X-Achse, die Y-Achse und den Graphen der Funktion, y = f von x, in Blau. Die Funktion wird also T-periodisch sein, wenn, und nur wenn dieser Graph bei einer Verschiebung um T Einheiten auf der X-Achse unverändert bleibt. Schauen wir uns das einmal ein Bisschen genauer an: Bei dieser Verschiebung nehme ich den Graphen und verschiebe ihn um T Einheiten nach rechts und ich habe an jeder Stelle den gleichen Graphen, das ist also die T-periodische Eigenschaft, wie man sie am Graphen sieht.

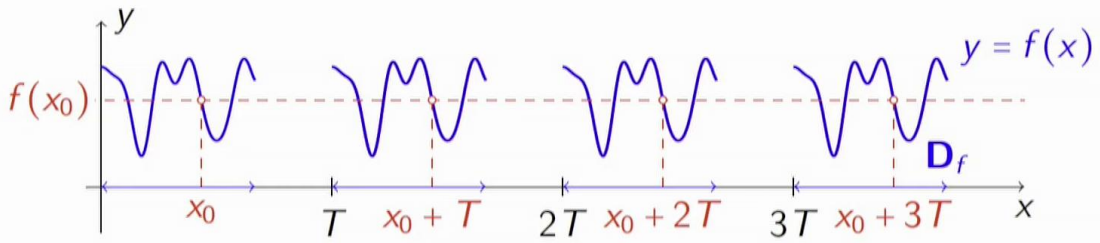
Notes

Summary

5m 15s

Proposition

Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$, *est* T*-périodique si et seulement si son graphe* $\mathcal{G}_f$ *reste invariant par une translation de* T *unités le long de l'axe des* x.



REPLAY

Das funktioniert in beide Richtungen, das geht nur, und nur wenn die Funktion T periodisch ist. Nur wenn dieser Graph diese Symmetrie hat, und bei Verschiebungen um T Einheiten auf der X-Achse unverändert bleibt, ist die zugehörige Funktion T-periodisch.

Notes

Summary

6m 44s

Définition

Définition

Soit f une fonction périodique. Nous dirons que T est la période de f si cette fonction est T-périodique, mais qu'elle n'est pas T'-périodique pour tout $T' \in]0, T[$.

En d'autres termes : $T = \min \left\{ P > 0 \;\middle|\; f(x+P) = f(x),\ \forall x \in \mathbf{D}_f \right\}$.

Remarquons que si f est un fonction constante, alors f est T-périodique pour tout $T > 0$, mais que la période de f n'existe pas.

Betrachten wir diesen Begriff noch etwas genauer. Wir nehmen eine Funktion, die periodisch ist. Nehmen wir an, dass T die Periode von f ist, wenn die Funktion f tatsächlich T-periodisch ist. Wenn es noch dazu keinen T'-Wert zwischen 0 und T gibt, dann ist ein kleinerer Wert als f T'-periodisch. Man spricht dann von der Periode der Funktion f. Man kann sagen, dass die Periode der kleinste Wert ist, da f von x + P wieder f von x für alle x-Werte im Definitionsbereich ergibt. Dabei muss man ein wenig aufpassen, ich habe hier "minimum" notiert, d.h. dass es einen kleineren positiven Wert dieser Art geben muss. Wenn Sie sich zum Beispiel die konstante Funktion f von x ansehen die für die ganze Achse von realen X-Werten definiert ist, und immer zum gleichen Ergebnis führt, eine konstante Funktion, dann ist sie T-periodisch für alle positiven T-Werte. Aber in dem Fall kann man nicht sagen, dass sie eine Periode hat, weil es keine positive Periode gibt, die man als kleinste mögliche Periode definieren kann.

Notes

Summary

7m 02s

Périodicité des fonctions sinus et cosinus

Nous avons déjà mentionné le fait que

$$P(\alpha) = P(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{avec} \quad \beta = \alpha + k\,2\pi.$$

Il en découle que les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

Kommen wir also nach diesen Erklärungen zum Begriff der T-Periodizität einer Funktion zu den Sinus- und Kosinusfunktionen. Rufen wir uns einen Aspekt in Er- innerung, den wir damals erwähnt hatten. Wir haben uns für die Frage interessiert, was passiert, wenn wir für zwei gegebene Winkel alpha und delta die Punkte P alpha und P beta haben, die zusammenfallen? Wir haben eine klare Antwort gefunden. Wir haben gesagt: "ok, mit dem Winkel alpha und beta fallen diese Punkte natürlich zusammen, wenn die Winkel gleich sind, aber das ist nicht die einzige Möglichkeit". Wir haben gesehen, dass es reicht, beta gleich alpha plus k2π zu haben. Man kann beta aus alpha errechnen, indem man ein ganzzahliges Vielfaches von 2π zu diesem Winkel alpha hinzurechnet. Wenn Sie sich das anschauen, bedeutet das, dass es für den Sinus und den Kosinus die Ordinaten und Abszisse der Punkte P alpha sind. Wenn der Winkel Alpha vergrößert wird, sagen wir um 2π, bleiben der Sinus und der Kosinus gleich.

Notes

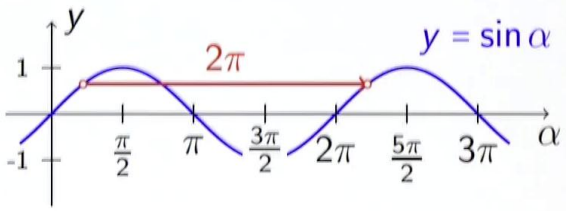
Summary

8m 23s

La période des fonctions sinus et cosinus

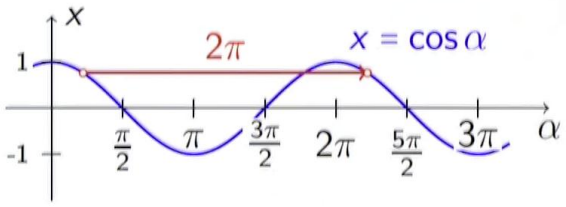
- La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \sin\alpha$ est 2π-périodique :

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi), \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$



- La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \cos\alpha$ est 2π-périodique :

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi), \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$



Ces deux fonctions n'admettent pas de période strictement comprise entre 0 et 2π.

Leur période est donc égale à 2π.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir können also zu folgendem Ergebnis kommen: Die Sinusfunktion, also sin aus R in R, mit alpha ergibt einen sinus alpha der sich zwischen -1 und 1 befinden muss, das haben wir beim letzten Mal gesagt. Diese Funktion ist also 2π-periodisch. Das heißt, wenn ich den Winkel alpha zu alpha + 2π ändere, bleibt der Sinus gleich. Das kann man ganz leicht am Graphen sehen. Hier haben Sie den Graphen von Sinus alpha. Hier, zwischen 0 und 2 π ist es der grundlegende Graphenverlauf, den wir beim letzten Mal Punkt für Punkt gezeichnet haben. Wenn Sie alpha um 2π erhöhen, finden Sie denselben Wert für Sinus alpha. Der Sinus von alpha und der Sinus von alpha +2π bleiben für alle alpha-Werte in R gleich. Für den Kosinus ist das Ergebnis ähnlich. Dieses Mal in die Funktion cos ebenfalls 2π-periodisch. Das heißt, dass der Kosinus an der Stelle Alpha genau derselbe ist wie der Kosinus an der Stelle alpha +2π. Das Hinzufügen von 2π zum Winkel alpha ändert nicht den Wert von cos alpha. Natürlich könnte man sich noch die Frage stellen, ob 2π wirklich die Periode ist? Könnte man eine kleinere Periode als 2π für Sinus und Kosinus finden? Ein kurzer Blick auf den Graphen zeigt gleich, dass das nicht möglich sein wird. Die Periode von Sinus und Kosinus ist tatsächlich 2π, das ist die kleinste Zahl, die man als Periodizität dieser Funktionen wählen kann.

Notes

Summary

9m 35s

Rappel : les fonctions paires

Définition

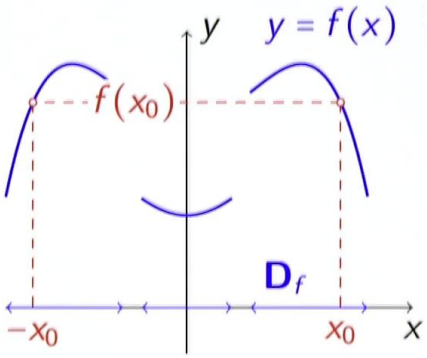
Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ est paire si

- son domaine de définition $\mathbf{D}_f$ est symétrique dans le sens que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{D}_f \quad \Rightarrow \quad -x \in \mathbf{D}_f ;$$

- la fonction f prend la même valeur en x et en $-x$:

$$\forall x \in \mathbf{D}_f, \quad f(x) = f(-x).$$



Wechseln wir ein wenig das Thema und kommen wir auf eine andere Eigenschaft zurück, die die Funktionen haben können: Sie können gerade oder ungerade sein. Beginnen wir mit der geraden Eigenschaft. Schauen wir uns eine Funktion an, die wieder für den Bereich von f, eine Teilmenge von reellen Zahlen, definiert ist, und mir eine relle Zahl liefert, die ich als f von x bezeichne. Ich gehe davon aus, dass diese Funktion gerade ist, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind. Die erste Bedingung ist, dass, wenn eine reelle Zahl im Definitionsbereich eingeschlossen ist, wenn also diese Zahl x in Df ist, dies auch für - x der Fall ist. Hier haben Sie den Graphen einer Funktion, die gerade ist. Hier haben Sie wieder den Definitionsbereich. Einen Teil hier, einen zweiten hier und einen dritten hier. Wenn sich ein Element x im Bereich befindet, ist -x auch darin. Zweite Bedingung: Die Funktion F muss an diesen Stellen x und -x den gleichen Wert annehmen. Das heißt, wenn ich an der Stelle x einen Funktionswert f(x) habe, habe ich an -x den gleichen Wert.

Notes

Summary

11m 15s

Rappel : les fonctions impaires

Définition

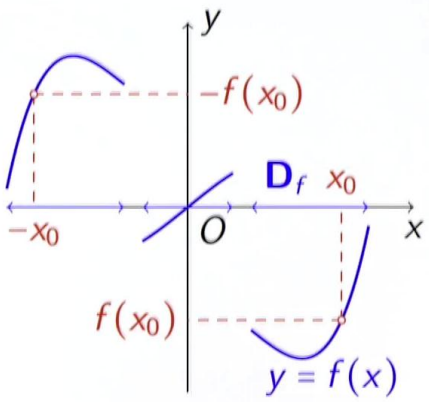
Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ est impaire si

- son domaine de définition $\mathbf{D}_f$ est symétrique dans le sens que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{D}_f \quad \Rightarrow \quad -x \in \mathbf{D}_f ;$$

- la fonction f prend des valeurs opposées en x et en $-x$:

$$\forall x \in \mathbf{D}_f, \quad f(x) = -f(-x).$$



Nun werden wir definieren, was eine ungerade Funktion ist. Dieses Mal wird für die für einen Definitionsbereich Df definierte Funktion in R, x in f von x transformiert. Das ist genau die Situation, die wir gesehen haben. Man kann sagen, dass sie ungerade ist, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind: Zunächst muss der Definitionsbereich symmetrisch sein. Das ist die gleiche Bedingung wie zuvor. Wenn also ein Punkt wie hier in einem Definitionsbereich ist, hier ist er in diesem Abschnitt des Definitionsbereichs, dann ist - ebenfalls im Definitionsbereich. Es ist die folgende Bedingung, die sich ein wenig ändert. Dieses Mal nimmt die Funktion an den Stellen x und -x nicht den gleichen Wert an, sondern denselben mit anderem Vorzeichen. Wenn ich hier schaue, welcher Wert zur Stelle x0 gehört, und ihn mit dem Wert an der Stelle -x0 vergleiche, erhalte ich den gleichen Wert mit anderem Vorzeichen.

Notes

Summary

12m 24s

Remarque

Si f est une fonction définie sur un domaine symétrique par rapport à l'origine :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{D}_f \quad \Rightarrow \quad -x \in \mathbf{D}_f \,,$$

on teste la parité de f en calculant $f(-x)$:

- si $\forall\, x \in \mathbf{D}_f \,,\ f(-x) = f(x)\,,$ la fonction f est paire,
- si $\forall\, x \in \mathbf{D}_f \,,\ f(-x) = -f(x)\,,$ la fonction f est impaire,
- sinon, la fonction f n'est ni paire ni impaire.

Eine Anmerkung zu diesen geraden und ungeraden Funktionen. Wenn man eine Funktion f hat, die für einen symmetrischen Bereich definiert ist, heißt das, dass immer wenn der x-Wert sich im Bereich befindet, ist auch -x darin. Man kann das testen, was man als Parität bezeichnet. Man kann sehen, ob diese Funktion gerade oder ungerade ist, oder weder das Eine, noch das Andere. Um das herauszufinden, ist es am besten, f an der Stelle -x auszurechnen. Man ändert den eingegebenen Wert x in -x. Man rechnet, soviel man kann. Wenn man für f von -x den gleichen Wert erhält wie für f von x, spricht man von einer geraden Funktion. Wenn man den gleichen Wert, aber mit anderem Vorzeichen erhält, spricht man von einer ungeraden Funktion. Wenn man weder den gleichen Wert, noch den gleichen Wert mit anderem Vorzeichen erhält, kann man sagen, dass sie weder gerade noch ungerade ist.

Notes

Summary

13m 21s

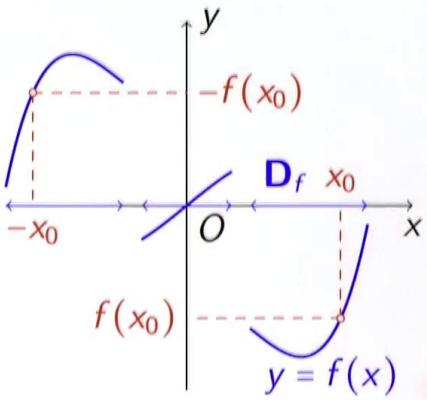
Graphe d'une fonction impaire

Proposition

Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x)$
est impaire si et seulement si son graphe

$$\mathcal{G}_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \mathbf{D}_f,\ y = f(x)\right\}$$

admet une symétrie de centre O (origine du système d'axes xy).



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Schauen wir uns die Verbindung zwischen Parität und Graph der dazugehörigen Funktion an. Beginnen wir mit der geraden Funktion. Ich habe hier eine Funktion f, wie zuvor. Man kann sagen, dass sie gerade ist, wenn, und nur wenn der Graph die Gesamtheit von x und y ist. Das x ist im Definitionsbereich, das y wird von der Funktion vorgegeben. Wenn der Grapf eine Symmetrie an der y-Achse aufweist, ist es eine Symmetrie an dieser Achse hier, von hier bis da. Dies ist eine direkte Folge aus de, Umstand, dass die Funktion an zwei Stellen, x0 und -x0, den gleichen Wert annimmt, und es ist dieser gleiche Wert, der es ermöglicht, diese Symmetrie zu formulieren. Noch einmal, das ist eine Eigenschaft, die in beiden Richtungen funktioniert. Wenn, und nur wenn. Für ungerade Funktionen, in der entsprechenden Situation: eine Funktion, wie zuvor, mit ihrem Graphen. Sie wird ungerade sein, wenn der Graph zum Zentrum 0 symmetrisch ist, 0 ist der Ursprung des Achsensystems. Wenn ich an einer Stelle x0 bin, mit dem Funktionswert an dieser Stelle, und dann zu -x0 gehe, ändert der Funktionswert das Vorzeichen. Damit sind die dazugehörigen Punkte auf dem Graphen symmetrisch zum Ursprung.

Notes

Summary

14m 14s

Graphe d'une fonction impaire

Proposition

Une fonction $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x)$ *est impaire si et seulement si son graphe*

$$\mathcal{G}_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \mathbf{D}_f\,,\ y = f(x)\right\}$$

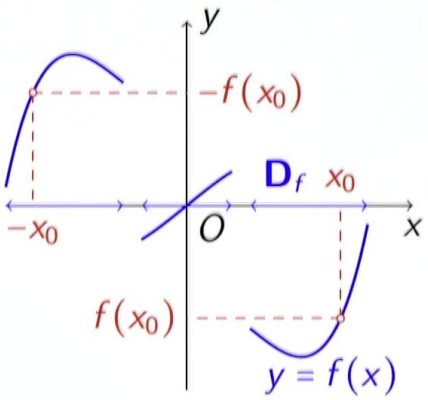
admet une symétrie de centre O (origine du système d'axes xy).

Remarquons que si f est impaire,

$$0 \in \mathbf{D}_f \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0.$$

Cela découle du fait que

$$f(0) = f(-0) = -f(0)\,.$$



An dieser Stelle vielleicht eine Anmerkung: Wenn Sie eine ungerade Funktion haben und 0 zum Definitionsbereich gehört, was hier in diesem Schema der Fall ist, dann wird diese Funktion für x gleich 0 den Wert Null annehmen. Dies resultiert direkt aus der Definition, weil der Wert von f von 0 aufgrund der Parität (es liegt eine ungerade Funktion vor, also sollte sie gleich -f von -0 sein, denn 0 ist -0, f von 0 ist f von -0) das -, wandert aufgrund der Parität vor, und die einzige reelle Zahl, f0, das selbst bis auf das Vorzeichen -f 0 entspricht, ist 0!

Notes

Summary

15m 34s

Parité des fonctions sinus et cosinus

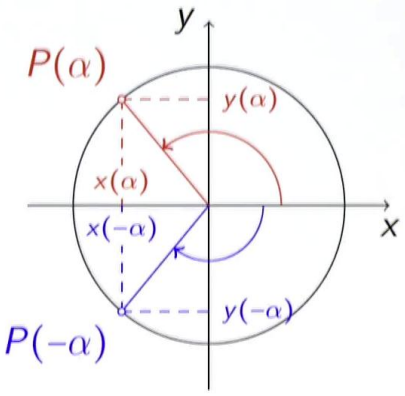
Les points $P(\alpha)$ et $P(-\alpha)$ sont symétriques par rapport à l'axe x.

On en déduit que ces deux points ont même abscisse :

$$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$$

et des ordonnées opposées :

$$\sin\alpha = -\sin(-\alpha)\,.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Lassen Sie uns nach dem Paritätsbegriff nun darauf zurückkommen, was man zu Sinus und Kosinus sagen kann. Wir kommen auf diese Symmetrien und den Einheitskreis zurück. Hier haben Sie eine erste Symmetrie: Ich habe den Einheitskreis, ich habe einen Winkel genommen, alpha, und ich nehme einen Winkel -alpha. So bin ich in der Paritätssituation, ich werde den Sinus beziehungsweise den Kosinus auf den Winkel alpha und -alpha prüfen. Schauen wir uns das wie schon in einer vorherigen Sequenz an. Schauen wir uns die Punkte P alpha und P -alpha an und beobachten vor allem ihre Koordinaten. Man sieht beim Cosinus sofort, dass er der Absziss der Punkte ist. Der Absziss von P alpha und der Absziss von P -alpha ist derselbe, Das bedeutet, dass der Kosinus von alpha oder der Kosinus von - alpha immer den gleichen Wert ergeben muss. Was den Sinus anbelangt, sind es die Ordinaten, der Sinus von P alpha und der Sinus von P -alpha sind vom absoluten Wert her gleich, aber mit verschiedenen Vorzeichen. Dieses Mal muss man schreiben, dass der Sinus von alpha - der Sinus von -alpha ist.

Notes

Summary

16m 22s

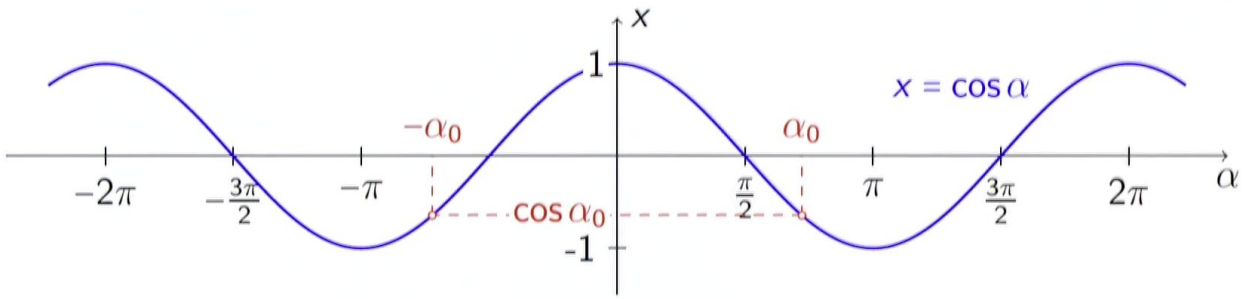
La fonction cosinus est paire

Proposition

La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto x = \cos\alpha$, *est paire :*

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Son graphe $\mathcal{G}_{\cos}$ *admet une symétrie d'axe x (dans le système d'axes* αx*).*



Das bringt uns zu folgendem Satz der im Kern aussagt, dass der Sinus eine ungerade Funktion ist. Das heißt, dass der Sinus von -alpha immer der -Sinus von alpha ist Das gilt für alle alphas in rellen Zahlen und bedeutet, dass der Sinusgraph symmetrisch zum Ursprung ist. Man sieht es hier sehr deutlich. An der Stelle alpha habe ich einen Wert Sinus alpha; an der Stelle -alpha habe ich den- selben Wert mit anderem Vorzeichen und das ergibt zwei Punkte auf dem Sinusgraphen, G Sinus, die symmetrisch zum Ursprung sind. Der Kosinus hingegen ist gerade, das heißt, dass der Kosinus von -alpha immer den Kosinus von alpha ergibt, immer, für alle alphas in reellen Zahlen. Und das bedeutet, dass der Graph symmetrisch zur x-Achse ist. Ich erinnere daran, dass wir hier für den Kosinus immer die Wahl der horizontalen Achse haben, und die vertikale Achse heißt x. Wir haben also eine Symmetrie zur vertikalen Achse. An einer Stelle alpha und -alpha habe ich den gleichen Wert für den Kosinus und das entspricht genau dieser Symmetrieachse.

Notes

Summary

17m 38s

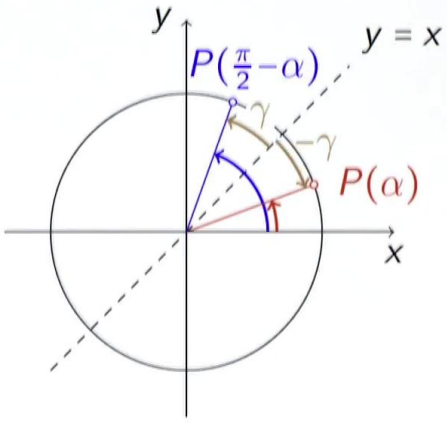
Angles complémentaires

Les angles α et β sont complémentaires si leur somme vaut $\frac{\pi}{2}$.

Les points $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ sont alors symétriques par rapport à l'axe $y = x$.

En posant $\gamma := \frac{\beta-\alpha}{2}$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= \frac{\pi}{2} \\ -\alpha+\beta &= 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= \frac{\pi}{4}-\gamma \\ \beta &= \frac{\pi}{4}+\gamma \end{cases}$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Schauen wir uns noch andere Symmetrien an, die man auf dem Einheitskreis beobachten kann und übertragen wir sie so auf die Funktionen. Das ist eine Etappe, schwierig zu erlernen ist, denke ich, aber sie ist wichtig. Man muss versuchen, diese Eigenschaften auf dem Einheitskreis sowie auf dem Graphen der Funktionen zu formulieren. Man muss versuchen, diese Eigen- schaften in Formeln auszudrücken um die Beziehung verschriftlichen zu können. Um dieses Vorgehen darzustellen, gehen wir davon aus, dass zwei Winkel, alpha und beta, komplementär zueinander sind. Das heiß, wenn ich alpha und beta addiere, ergibt sich 1/2 π. Hier haben Sie den Einheitskreis. Einen Winkel alpha mit P alpha. Ich habe einen Winkel blau markiert, dessen Summe 1/2 π sein muss. Für den Blauen nehme ich einfach 1/2 π - alpha, das heißt, dass ich 1/2 π minus alpha rechne. Der Teil, wo ich hier nach hinten gehe entspricht also dem Winkel alpha. Ich erhalte zwei Punkte und diese Punkte werden immer symmetrisch zu einer y gleich x-Achse sein. Wenn Sie alpha variieren, werden Sie sehen, dass diese Symmetrie erhalten bleibt. Diese Symmetrie kann auch durch eine andere Beziehung ausgedrückt werden, und man kann sie auf dem Einheitskreis finden.

Notes

Summary

18m 59s

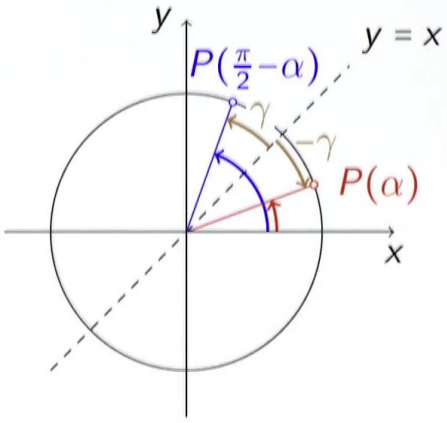
Angles complémentaires

Les angles α et β sont complémentaires si leur somme vaut $\frac{\pi}{2}$.

Les points $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ sont alors symétriques par rapport à l'axe $y = x$.

En posant $\gamma := \frac{\beta-\alpha}{2}$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= \frac{\pi}{2} \\ -\alpha+\beta &= 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= \frac{\pi}{4}-\gamma \\ \beta &= \frac{\pi}{4}+\gamma \end{cases}$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Man kann sie zunächst hier entdecken, entlang der Achse sieht man, dass man sich für das berechnen von alpha oder beta um den gleichen Abstand deplatzieren muss. Man kann auch das hier antreffen: Man nimmt den Unterschied zwischen beta und alpha, man teilt ihn durch zwei, und man nennt ihn gamma. Wir haben gesagt, dass die Summe der beiden Winkel alpha und beta 1/2 π ist. Wir wissen, dass hier gamma durch diese Formel gegeben ist. Also ist -alpha + beta 2 gamma. Sie haben da ein System, das sie auflösen können. Nach alpha und nach beta. Und Sie erhalten für alpha 1/4 π - gamma und für beta 1/4 π + gamma. Man erhält genau das, was man hier sehen kann: 2π 1/4 π, man rechnet einmal + gamma für beta und - gamma für alpha. In diesem Fall findet man dieselbe Symmetrieposition der beiden entsprechenden Punkte.

Notes

Summary

20m 26s

Proposition : angles complémentaires

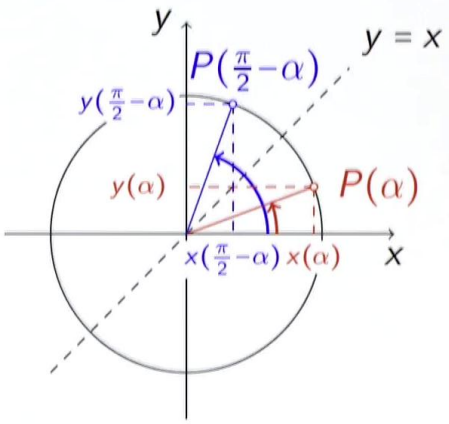
Proposition

Si les angles α et β sont complémentaires ($\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$), alors

$$\sin\beta = \cos\alpha \quad \textit{et} \quad \cos\beta = \sin\alpha\,.$$

On a donc, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \quad \textit{et} \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha\,,$$



Wenn die Winkel alpha und beta komplementär sind, wenn ihre Summe 1/2 π ist, dann formulieren wir einen Satz für die komplementären Winkel. Was ist zu beobachten? Man muss die Koordinaten der Punkte P alpha und P beta beobachten, oder, wenn Sie so wollen, 1/2 π - alpha. Wenn ich mir zunächst den Sinus von beta, den Blauen anschaue: Der Sinus ist diese Ordinate. Durch die Symmetrie finde ich denselben Abstand als Absziss von P alpha und der Absziss ist Kosinus alpha. Ich erhalte also Sinus beta ist gleich Kosinus alpha. Für den Kosinus beta ist es dasselbe, ich finde ihn hier als Sinus von Alpha. Ich kann den Sinus von beta ausdrücken, das ist der Kosinus von alpha und der Kosinus von beta ist der Sinus von alpha. Die Werte lassen sich austauschen, wenn die Winkel komplementär sind. Sie können das natürlich auch anders ausdrücken, das heißt, Sie können beta als 1/2 π - alpha formulieren. Sie erhalten also, dass der Sinus von 1/2 π - alpha, der Kosinus alpha und der Kosinus von 1/2 π -alpha der Sinus von alpha ist. Das ist dieselbe Beziehung, aber diesmal in einem einzigen Buchstaben ausgedrückt.

Notes

Summary

21m 22s

Proposition : angles complémentaires

Proposition

Si les angles α et β sont complémentaires ($\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$), alors

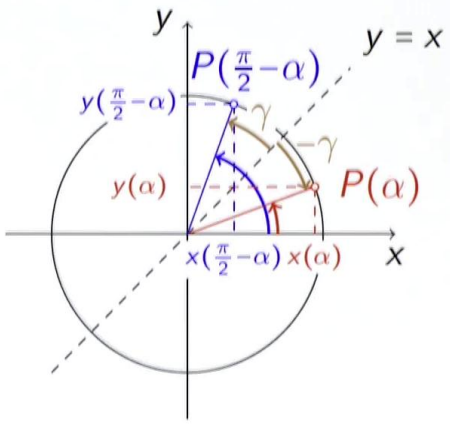
$$\sin\beta = \cos\alpha \quad \textit{et} \quad \cos\beta = \sin\alpha\,.$$

On a donc, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \quad \textit{et} \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha\,,$$

ou, sous une forme plus symétrique :

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{4} + \gamma\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{4} - \gamma\right)\,, \quad (\gamma \in \mathbb{R}).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wenn Sie mehr der Symmetrie folgen, können Sie die Winkel alpha und beta, den Roten und den Blauen, ersetzen und sagen "okay, ich benutze lieber die Winkel 1/4 π + gamma und 1/4 π - gamma." Wenn Sie das machen, bedeutet das einfach, dass der Sinus von 1/4 π + gamma wieder den Kosinus von 1/4 π - gamma ergibt. Es reicht hier aus, diese Beziehung einmal aufzuschreiben, weil gamma positiv oder negativ sein kann. Man erhält also die zwei Formeln, zu denen wir zuvor gekommen sind. Die Formel ist dann symmetrischer und dichter.

Notes

Summary

22m 47s

Proposition : angles complémentaires

Proposition

Si les angles α et β sont complémentaires ($\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$), alors

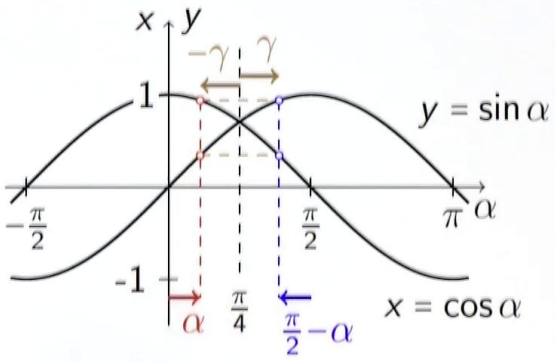
$$\sin\beta = \cos\alpha \quad \textit{et} \quad \cos\beta = \sin\alpha\,.$$

On a donc, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \quad \textit{et} \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha\,,$$

ou, sous une forme plus symétrique :

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{4} + \gamma\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{4} - \gamma\right)\,, \quad (\gamma \in \mathbb{R}).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Man kann diese letzte Formel so wie die anderen auf dem Graphen beobachten. Anstatt diese Beziehungen anhand des Einheitskreises nachzuvoll- ziehen, kann man sie anhand des Funktionsgraphen beobachten. Wir haben hier, in einem alpha-y- Achsensystem, den Sinusgraphen, der sich hier befindet. Für den Kosinus nehmen wir das Achsensystem alpha-x, also habe ich der vertikalen Achse zwei Namen gegeben, da wir uns für diese Benennung der Graphen entschieden haben. Hier haben Sie den Kosinus. Für den mathematischen Ausdruck können wir sagen, dass für die oder die zweite Linie hier folgendes gilt: Wenn ich mich zum Beispiel an diesem Punkt platziere, ist das der Sinus von Alpha. Hier habe ich den Punkt 1/2 π - alpha, also + alpha - alpha. Ich erhalte den gleichen Wert, aber diesmal für den Kosinus. Das ist genau das, was ich hier habe. Im symmetrischen Ausdruck geht man von 1/4 π aus. Das ist ein Schnittpunkt zwischen den beiden Graphen und man kann zum Beispiel sagen, dass wenn ich + gamma oder - gamma nehme, der Sinus dem Kosinus entspricht. Der Sinus von 1/4 π + gamma ergibt den Kosinus von 1/4 π - gamma, der sich hier befindet.

Notes

Summary

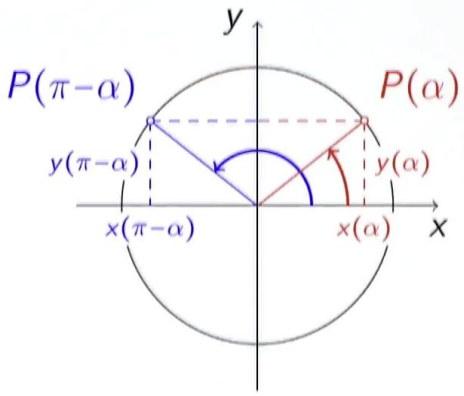
23m 24s

Proposition : angles supplémentaires

Proposition

Si les angles α et β sont supplémentaires ($\alpha + \beta = \pi$), alors

$$\sin\beta = \sin\alpha \quad \textit{et} \quad \cos\beta = -\cos\alpha\,.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Lassen Sie uns noch einmal über Ergänzungswinkel sprechen. Zwei Winkel alpha und beta nennen wir Ergänzungswinkel, wenn ihre Summe π ist, ein Halbkreis. Hier, in diesem Einheitskreis, habe ich eine solche Situation eingezeichnet. Der Winkel alpha ist rot gekennzeichnet, in der Position P alpha. In Blau haben wir den Winkel beta. Die Summe der Winkel muss π ergeben. das heißt, für beta kann ich schreiben π - alpha, da die Summe der beiden Winkel wieder π ergibt. Man sieht gleich -das ist π - alpha- das die beiden Punkte P alpha und P π - alpha symmetrisch zur vertikalen y-Achse sind. Man kann nun wieder den gleichen Trick benutzen wie zuvor. Man kann die Hälfte der Differenz nehmen. Man nimmt beta - alpha, das ist der Winkel hier. Man teilt ihn druch zwei und nennt ihn gamma und berücksichtigt die Regel, dass die Summe der Winkel alpha und beta π ist. Hier ist minus alpha + beta 2 gamma. Man löst dieses System auf und man erhält das, was man auf diesem Einheitskreis sieht: wenn ich von 1/2 π ausgehe und + gamma rechne, erhalte ich beta. und mit - gamma bekomme ich alpha. Ich bin also an den Stellen 1/2 π plus oder minus gamma. Schauen wir uns einmal an, was man über Ergänzungswinkel sagen kann wenn ein Sinus oder ein Kosinus vorliegt.

Notes

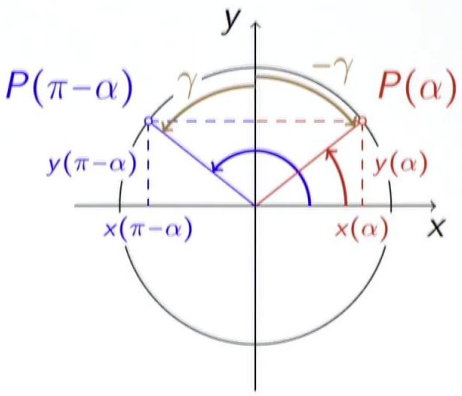
Summary

24m 56s

Remarque : angles supplémentaires

On peut écrire les deux relations précédentes sous une forme plus symétrique :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right), \quad (\gamma \in \mathbb{R}),$$



Wir sehen das anhand des Einheits- kreises auf dem zuvor gezeigten Bild. Wenn ich zum Beispiel hier den Sinuswert von beta, dem Wert, der hier blau markiert ist, nehme finde ich ihn hier in Rot wieder, also sind die Sinus-Werte von alpha und beta dieselben. Die Kosinus-Werte hingegen sind unterschiedlich. Der Kosinus von beta und der Kosinus von alpha sind bis auf das Vorzeichen gleich. Ich kann notieren, dass Sinus alpha gleich Sinus beta ist. Der Kosinus von beta ist gleich - Kosinus von alpha. Wie wir es schon zuvor gemacht haben, kann man auch die Variable beta weglassen und die Formel nur mit der Variablen alpha aufstellen. Man ersetzt einfach in der Formel beta durch π - alpha um diese Relationen darzustellen. Der Sinus von π - alpha ist der Sinus alpha. Der Kosinus π - alpha ist - Kosinus alpha. Man kann diese beiden Abhängigkeiten auch in symmetrischerer Form abbilden, indem man den Winkel Gamma gebraucht. In diesem Fall bleibt der Sinuswert derselbe, egal, ob Sie sich den Sinus von 1/2 π + oder - gamma ansehen, man kann dies anhand der Sinuskurve erkennen.

Notes

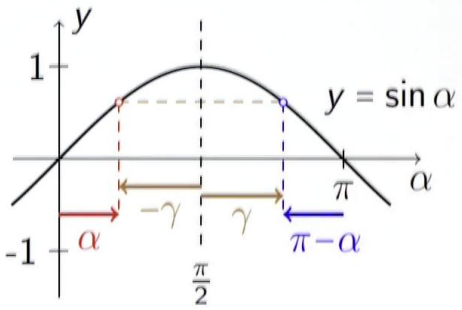
Summary

26m 25s

Remarque : angles supplémentaires

On peut écrire les deux relations précédentes sous une forme plus symétrique :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right), \quad (\gamma \in \mathbb{R}),$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Ich habe 1/2 π, wenn ich den Sinus an der Stelle + gamma oder - gamma nehme, behalte ich denselben Sinuswert. Das entspricht dem Einsetzen eines Winkels alpha und π - alpha, bei denen ich denselben Sinus habe.

Notes

Summary

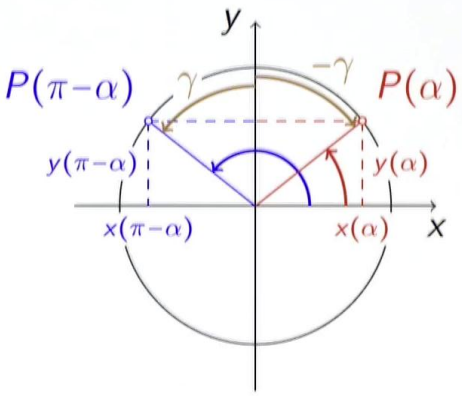
27m 40s

Remarque : angles supplémentaires

On peut écrire les deux relations précédentes sous une forme plus symétrique :

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\gamma\right)=\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\gamma\right), \quad (\gamma\in\mathbb{R}),$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\gamma\right)=-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\gamma\right), \quad (\gamma\in\mathbb{R}).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Für den Kosinus ist die Überlegung genau die Gleiche. Ich gehe von 1/2 π aus, + und - gamma und ich erhalte die Kosinus-Werte mit unterschiedlichen Vorzeichen. Der Kosinus von 1/2 π + gamma, der sich hier befindet, und der von 1/2 π - gamma sind bis auf das Vorzeichen gleich.

Notes

Summary

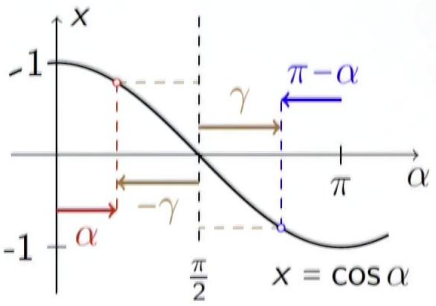
27m 56s

Remarque : angles supplémentaires

On peut écrire les deux relations précédentes sous une forme plus symétrique :

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\gamma\right)=\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\gamma\right), \quad (\gamma\in\mathbb{R}),$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\gamma\right)=-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\gamma\right), \quad (\gamma\in\mathbb{R}).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Hier können Sie wieder die gleiche Überlegung auf den Kosinusgraphen anwenden. Hier haben Sie den Kosinusgraphen, den 0-Wert dieses Kosinus an 1/2 π. Wenn Sie sich den Kosinuswert ansehen, und sich um + oder - gamma von 1/2 π bewegen, dann erhalten Sie verschiedene Werte für den Kosinus, Das notiere ich hier, der Kosinus von 1/2 π + gamma und von 1/2 π - gamma haben unterschiedliche Vorzeichen. Das entspricht der Aussage, dass, wenn ich hier alpha und dort π - alpha nehme, dabei Kosinuswerte mit unterschiedlichen Vorzeichen herauskommen.

Notes

Summary

28m 14s

Les symétries des fonctions sinus et cosinus

Ce que nous avons appris :

- la périodicité des fonctions sinus et cosinus ;
- la parité des fonctions sinus et cosinus ;
- sinus et cosinus des angles complémentaires ;
- sinus et cosinus des angles supplémentaires.

Prochaine étape :

l'utilisation du sinus et du cosinus dans les triangles rectangles.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Fassen wir noch einmal zusammen! Was haben wir heute gelernt? Wir haben gelernt, dass diese Funktionen, Sinus und Kosinus, die nur durch ihre Eigenschaften definiert waren, Abszisse und Ordinate eine Punktes P alpha auf dem Einheitskreis sind, periodisch sind, dass sie Paritäten besitzen, gerade und ungerade, je nach Sinus und Kosinus. Wir haben gelernt, den Sinus und den Kosinus mit komplementären- und Ergänzungswinkeln zu handhaben. Es handelt sich hier um Winkel, deren Summe 1/2 π und π ist. In einer nächsten Etappe werden wir etwas neues einführen, wir werden sehen, wie man diese Sinus- und Kosinus- Funktionen für die Berechnung von rechtwinkligen Dreiecken nutzen kann. Das wird ein Kapitel, das meiner An- sicht nach geschichtlich wertvoll ist, aber auch in alltäglichen Rechnungen sehr wertvoll sein kann, wenn man mit rechtwinkligen Dreiecken zu tun hat. Danke für Ihre Aufmerksamkeit. Bis zum nächsten Mal!

Notes

Summary

28m 49s