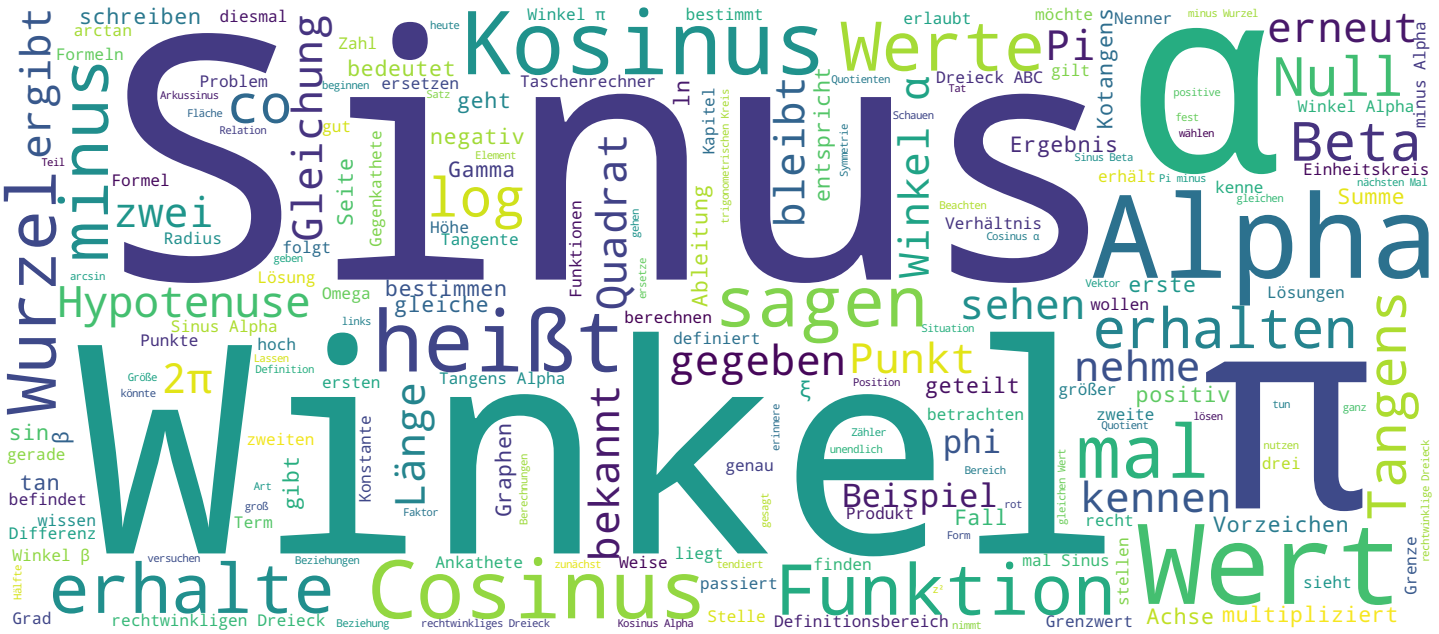
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus et leurs inverses

2.3 Le triangle rectangle

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

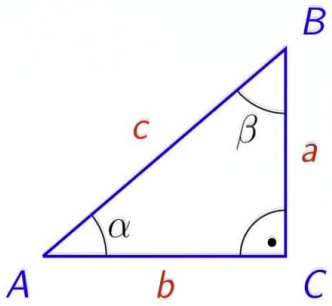


Video

Triangle rectangle : notations

Soit ABC un triangle rectangle en C.

- On note α l'angle en A, β l'angle en B et γ l'angle droit.
- On note a la longueur du segment BC (la cathète opposée à l'angle α), b la longueur du segment AC (la cathète opposée à l'angle β) et c la longueur de l'hypothénuse AB.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Guten Tag, In den vorherigen Sitzungen habe ich die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus vorgestellt. Heute werde ich diese beiden Funktionen, Sinus und Cosinus, auf Berechnungen in einem rechtwinkligen Dreieck anwenden. Stellen wir uns also ein rechtwinkliges Dreieck vor, ein Dreieck ABC, das bei C rechtwinklig ist. Zunächst einige Bemerkungen. Wir halten fest: α, der Winkel bei A, β, der Winkel bei B, der rechte Winkel, der sich bei C befindet, sei γ. Sagen wir "a" ist die Länge der Seite, die A oder α gegenüberliegt. Das heißt, "a" liegt A gegenüber und "a" liegt dem Winkel α gegenüber. Ebenso gilt: "b" ist die Länger der Seite AC, das heißt, die Länger der Seite, die sowohl B als auch β gegenüberliegt. Und "c" ist die Länge der Hypotenuse, die C gegenüberliegt.

Notes

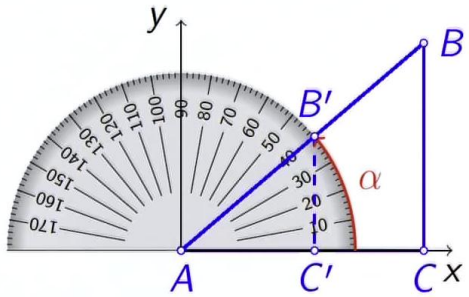
Summary

0m 04s

Cosinus de l'angle α

et de façon similaire :

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC'}}{1} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\text{cathète adjacente à l'angle } \alpha}{\text{hypothénuse}}.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Hier sehen Sie das Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C mit dem Winkel α bei A. Halten wir fest, dass eine Homothetie mit dem Zentrum A die Größenverhältnisse beibehält, was uns erlaubt, das Verhältnis festzuhalten, das Sie hier sehen. Also der Sinus von α - α ist der Winkel hier... Am einfachsten ist es zu sagen, der Sinus wird von B'C' vorgegeben, soweit der Radius des Gradbogens 1 entspricht. Für diese Strecke B'C', lege ich B'C' auf 1 fest, unter der Bedingung, dass der Radius auf 1 sei. Also ist AB' gleich 1. Folglich können wir sagen, dass der Sinus von α faktisch der Quotient der Längen zwischen B'C' und AB' ist und dieses Verhältnis beibehalten wird. Dieses Verhältnis B'C' / AB' kann ich durch BC/AB ersetzen. Oder in Worten ausgedrückt: der Sinus von α ist das Verhältnis von der Länge der Gegenkathete von α - das ist BC - zur Länge der Hypotenuse. Ebenso kann ich für den Cosinus mit gleicher Begründung sagen: wenn dieses Verhältnis einen Radius von 1 hat, entspricht der Cosinus von α der Länge AC'. AC' kann ich als AC' / 1 beschreiben, AC' auf dem Radius AB'. Und mittels der Homothetie kann ich feststellen, dass das Verhältnis ebenfalls für AC geteilt durch AB gilt. In diesem Fall habe ich die Ankathete zu "c" (zu α) geteilt durch die Hypotenuse.

Notes

Summary

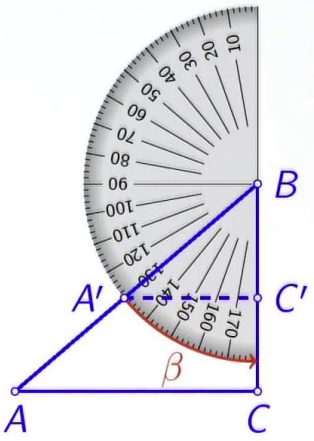
1m 08s

Sinus et cosinus de l'angle β

D'une manière analogue nous avons :

$$\sin\beta = \frac{\overline{A'C'}}{1} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\text{cathète opposée à l'angle } \beta}{\text{hypothénuse}},$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{BC'}}{1} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\text{cathète adjacente à l'angle } \beta}{\text{hypothénuse}}.$$



Dies kann man ebenso für den Winkel β begründen, für den ich erneut einen Radius von 1 setze. Und man kann für den Sinus von β sagen, bei dem β der Winkel bei B ist, dass der Sinus im vorliegenden Fall von A'C' gegeben wird oder A'C' geteilt durch 1. Dieses Verhältnis wird beibehalten und definiert AC zu AB. Das heißt erneut: die Gegenkathete geteilt durch die Hypotenuse. Und für den Cosinus führt die gleiche Überlegung zu folgendem Verhältnis: Ankathete zum Winkel β zur Hypotenuse.

Notes

Summary

2m 59s

Rapports trigonométriques dans le triangle rectangle

Proposition

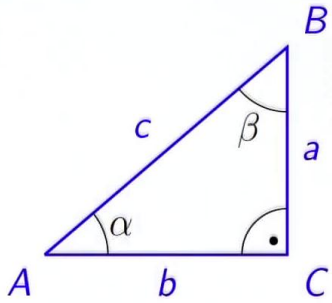
Dans le triangle rectangle ABC, on a :

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cathète opposée à l'angle } \alpha}{\text{hypothénuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cathète adjacente à l'angle } \alpha}{\text{hypothénuse}}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{cathète opposée à l'angle } \beta}{\text{hypothénuse}}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{cathète adjacente à l'angle } \beta}{\text{hypothénuse}}$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

In einem Satz formuliert heißt das: In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit den üblichen Benennungen, haben wir den Sinus von α, das heißt; a/c, also die Gegenkathete von α zur Hypotenuse. Der Cosinus ist: b/c, also die Ankathete von α geteilt durch die Hypotenuse. Der Sinus von β, hier die Gegenkathete, ist b/c, und der Cosinus ist: a, die Ankathete zu β, zur Hypotenuse.

Notes

Summary

3m 41s

Exemple 1

Exemple

Dans un triangle ABC rectangle en C, on connaît la longueur de l'hypothénuse c et la valeur de l'angle α en A :

$$c = 12.6 \qquad \text{et} \qquad \alpha = 38°.$$

Déterminer les éléments manquants de ce triangle.

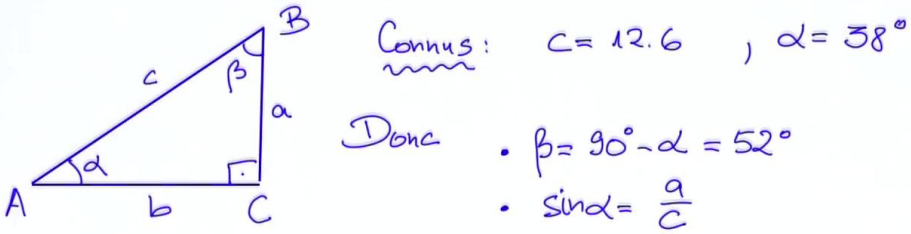
Diese Beziehungen im Dreieck können auf verschiedene Berechnungen innerhalb eines rechtwinkligen Dreiecks angewendet werden. Wir werden diese anhand einiger Beispiele erörtern. In einem ersten Beispiel nehmen wir das Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C, das heißt mit der üblichen Notation, und wir nehmen an, dass wir die Länge der Hypotenuse "c" kennen, welche 12,6 beträgt. Wir kennen außerdem den Wert des Winkels α bei A, α = 38°. Beachten Sie, dass üblicherweise im Rahmen der Berechnungen von Dreiecken die Winkel nicht in Radiant, sondern in Grad gemessen werden - und wir halten uns an diese Regeln. Wir nehmen also hier die Winkel, die wir üblicherweise in Grad messen. Was wir eigentlich in dieser Situation tun sollten, ist, zu bestimmen, welches die sogenannten fehlenden Elemente dieses Dreiecks sind. Was fehlt uns also? Es fehlen die Längen "a" und "b". Es fehlt der Winkel β.

Notes

Summary

4m 11s

Exemple 1 (solution)



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

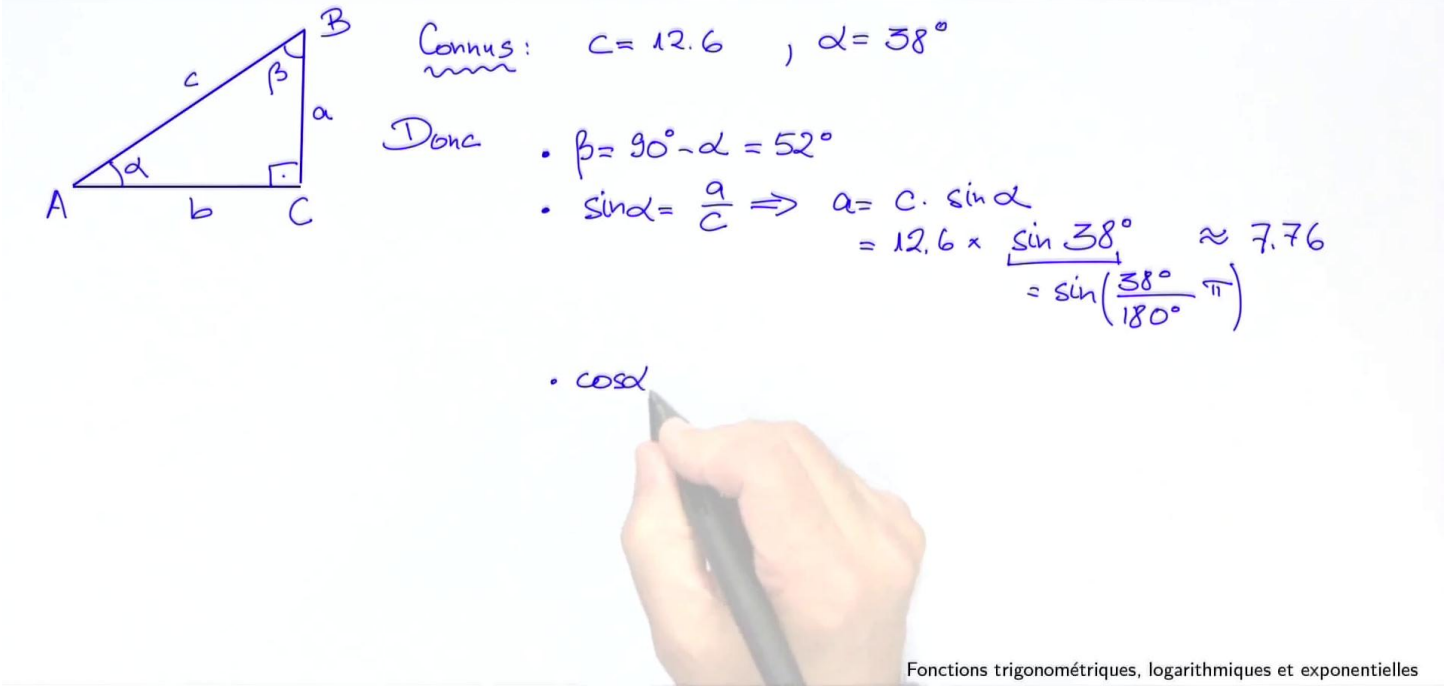
(Gut, α und der rechte Winkel sind gegeben.) Schauen wir, was passiert. Wir haben das Dreieck. Es hat seinen rechten Winkel bei C. Hier ist A. Hier ist B. Und hier ist der rechte Winkel. Hier also der Winkel α, der Winkel β und hier haben wir "a", "b" und "c". Was ist also bekannt? Nun, die Hypotenuse ist uns bekannt: c beträgt 12,6. Außerdem kenne ich den Winkel α. Ich kann also die folgenden Rechnungen anstellen: Ein erster Hinweis: Es ist offensichtlich, dass wenn mir ein Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks bekannt ist, einer der Winkel, die nicht rechtwinklig sind, ich auch den anderen Winkel kenne. β beträgt 90° minus α, ebenfalls in Grad anzugeben, und ich erhalte 52°. Mir ist die Hypotenuse bekannt, aber "a" und "b" kenne ich nicht, lassen sie uns zunächst "a" bestimmen. Ich habe ein Verhältnis, das zwischen dem Winkel α und "a" und "c" besteht. Folglich sind uns von den drei Größen (α, "a" und "c") zwei bekannt. Den Winkel α kennen wir und wir kennen die Hypotenuse "c". Beschreiben wir also dieses Verhältnis: Der Sinus von α wird definiert durch die Gegenseite "a" geteilt durch die Hypotenuse: a/c. Daraus kann ich die Größe "a" ableiten, die sich aus "c" multipliziert mit sin (α) ergibt.

Notes

Summary

5m 02s

Exemple 1 (solution)



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

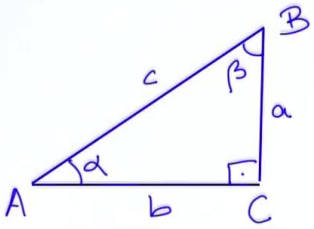
Wenn ich also die Werte einsetze, die mir bekannt sind: 12,6 multipliziert mit sin 38°. Beachten Sie, dass ich von Sinus von 38° spreche. Dies ist eine Abkürzung für Sinus... Eigentlich bezieht sich der Sinus in unserer Definition auf Winkel in Radiant. Das heißt, die 38° müssen in Radiant umgerechnet werden, ich muss diese 38° also durch 180° multipliziert mit π teilen. Wir werden allerdings nicht jedes Mal die Schreibweise derart erschweren. Wir sagen einfach, was wir schreiben sinus 38°, das heißt der Winkel ist in Radiant umzuwandeln, und anschließend sein Sinus zu bestimmen. Dies entspricht der üblichen Verständnisweise. Nehmen wir also einen Taschenrechner, auf dem Taschenrechner erhalten wir Werte für Sinus 38°, außerdem können wir die Werte für das Produkt erhalten Sie werden etwas wie 7,76 bekommen. Also bleibt noch "b". Was wissen wir also über "b"? Wir kennen beispielsweise β, "c" und B. Dies können wir nutzen. Wollen Sie vermeiden, den Winkel β zu nutzen, so können Sie auch sagen, Sie kennen α, "b" und "c", allerdings müssen Sie dann den Sinus durch den Cosinus ersetzen, was wir nun tun werden. Ich sage also der cos von α ist die Ankathete geteilt durch "c".

Notes

Summary

6m 56s

Exemple 1 (solution)



Connus : $c = 12.6$, $\alpha = 38°$

Donc

- $\beta = 90° - \alpha = 52°$
- $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin\alpha$
  $= 12.6 \times \underbrace{\sin 38°}_{= \sin\left(\frac{38°}{180°}\pi\right)} \approx 7.76$
- $\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos\alpha$
  $= 12.6 \times \cos 38° \approx 9.93$

Also b/c, was mir erlaubt, b als "c" multipliziert mit dem cos von α zu beschreiben. Ich setze die Werte ein, 12,6, multipliziert mit cos 38°. Den Kosinus zu wählen, ist hier gewissermaßen etwas besser, weil ich ein Ergebnis für "b" erhalte, das in der vorgegebenen Form bestehen bleibt: diese enthält nur bereits bekannte Elemente - "c" und α. Hätte ich den Winkel β zu Grunde gelegt, hätte ich einen berechneten Winkel eingesetzt, also einen mittelbar erhaltenen Wert. Nun nehmen Sie erneut einen Taschenrechner zur Hilfe: Sie erhalten den Näherungswert von cos 38°, multiplizieren ihn mit 12,6 und Sie erhalten ungefähr 9,93.

Notes

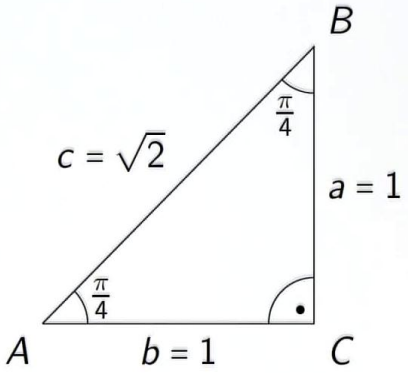
Summary

8m 40s

Trigonométrie dans le triangle rectangle isocèle

Dans un triangle isocèle ABC rectangle en C

- les angles α et β sont égaux : $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$
- et si les deux cathètes a et b valent 1, on en déduit par Pythagore que l'hypothénuse c vaut $\sqrt{2}$.



Il en résulte que

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Lassen Sie uns nun den Sinus und Cosinus im gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck anwenden. Das Dreieck ABC ist hier gleichschenklig, das heißt, die zwei Katheten "a" und "b" sind gleich lang. Darauf folgt, dass die Winkel α und β gleich groß sind und in der Summe 90° betragen. Sie betragen einzeln 45°, das heißt π/4. Stellen wir uns vor, die zwei Katheten "a" und "b" betragen 1. Ich habe also hier 1 und 1. Und nach Pythagoras bedeutet das für die Hypotenuse "c" Wurzel aus 2. Ich kenne also in diesem Dreieck die drei Seiten. Nun geben uns die Beziehungen, die wir für das rechtwinklige Dreieck definiert haben, die Möglichkeit, etwas über den Cosinus von α zu sagen. Der sinus von α ist beispielsweise sin 45°, das entspricht der Länge der Gegenkathete geteilt durch die Länge der Hypotenuse, also 1 durch Wurzel aus 2. Diese Größen schreibt man bevorzugt etwas anders. Man erweitert diesen Bruch mit Wurzel aus 2 und erhält Wurzel aus 2 durch 2. Und der Cosinus ist die Ankathete durch die Hypotenuse, das heißt 1 durch Wurzel aus 2. Dies führt zum gleichen Ergebnis. Man erhält Wurzel aus zwei durch zwei. In diesem Fall haben Sinus und Cosinus den gleichen Wert wie Wurzel aus 2 durch 2.

Notes

Summary

9m 35s

Trigonométrie dans le triangle équilatéral

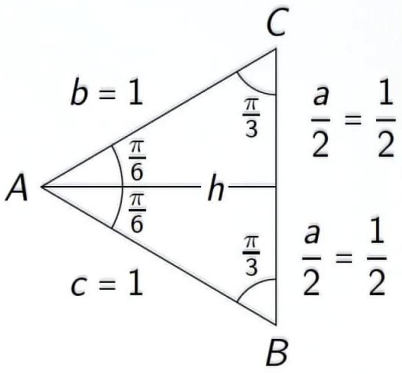
Dans un triangle équilatéral ABC

- les angles α, β et γ sont égaux :

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$$

- et si les trois côtés valent 1, on en déduit la longueur de la hauteur h à l'aide du théorème de Pythagore

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Nehmen wir ein anderes Dreieck, das von vornherein nicht rechtwinklig ist. Nehmen wir ein gleichseitiges Dreieck. Hier haben Sie ein gleichseitiges Dreieck ABC. Wir können über die drei Winkel sagen, Winkel α bei A, Winkel β bei B und Winkel γ bei C... Diese drei Winkel sind gleich groß. Ihre Summe muss also π betragen, das heißt jeder der drei Winkel beträgt π/3 oder wenn Sie so wollen, 60°. Nehmen wir die drei Seiten der Länge 1 und zeichnen die Höhe von A aus, so dass die Seite BC in zwei gleiche Teile geteilt wird, also jeder Teil der Hälfte von "a" entspricht, das heißt 1/2. Der Satz des Pythagoras erlaubt uns nun den Wert der Höhe h zu berechnen. Nimmt man zum Beispiel an, dass jede Seite den Wert 1 hat, so wie wir es in der Skizze getan haben. Also stellen wir für h fest, es ist die Hypotenuse zum Quadrat minus die Hälfte zum Quadrat. Das macht 1 minus 1/4, also 3/4. Ziehe ich nun die Wurzel, erhalte ich Wurzel aus 3 durch 2, für die Höhe h.

Notes

Summary

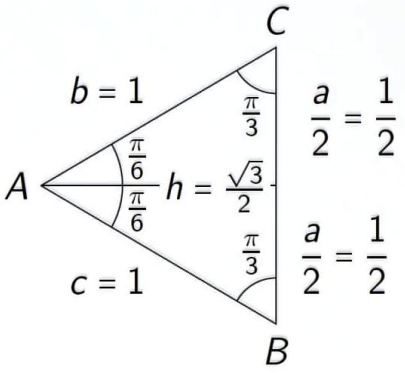
11m 05s

Trigonométrie dans le triangle équilatéral

On obtient alors

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$



Dies erlaubt uns nun, Schlüsse über die Innenseiten des rechtwinkligen Dreiecks zu ziehen. Nehme ich die Hälfte dieses Dreiecks, zum Beispiel hier, habe ich ein rechtwinkliges Dreieck. Und nun kann ich den Sinus beispielsweise berücksichtigen... Also, den Winkel π/3 durch 2 teilen, dann bleiben π/6, 30° wenn Sie so wollen. Für den Sinus gilt: Die Gegenseite der Hypotenuse ist 1/2 durch 1 folglich 1/2. Der Cosinus ist die Gegenkathete geteilt durch die Hypotenuse, also Wurzel aus 3 durch 2. Wir können auch den Winkel π/3 bei C nehmen. Der Sinus ist die Gegenseite, das heißt Wurzel aus 3 durch 2. Und der Cosinus ist die Ankathete geteilt durch die Hypotenuse 1, daraus folgt 1/2. Wir erhalten hier also, wie Sie sehen können, wichtige Werte für die Winkel π/3 und π/6. Vorher haben wir die Werte für Sinus und Cosinus für den Winkel π/4 erhalten.

Notes

Summary

12m 25s

Valeurs remarquables

Proposition

Le sinus et le cosinus prennent les valeurs suivantes pour les angles remarquables suivants :

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Halten wir all diese Werte in einem Satz fest, der besagt, dass Sinus und Cosinus an bestimmten Punkten die bekannten Werte haben, das heißt Winkel von 0°, 30°, 45°, 60° und 90° oder in der Einheit Radiant: 0; 30° sind π/6; 45° sind π/4; 60° sind π/3 und 90° sind π/2. Für den Sinus haben wir festgehalten, dass er 0 beim Winkel 0 beträgt, und 1 bei π/2; das sind die von uns errechneten Ergebnisse. Für π/4 haben wir Wurzel aus 2 durch 2 erhalten. Und für π/6 und π/4 haben wir die Werte 1/2 und Wurzel aus 3 durch 2. Ebenso gilt für den Cosinus: 1 und 0, die in Bezug auf den Sinus miteinander vertauscht sind. Wir haben für 45° oder π/4 den gleichen Wert wie für Sinus und Cosinus. Für π/6 und π/3 sind die Werte zwischen Cosinus und Sinus austauschbar. Sie könnten nun die Frage stellen, ob dies auf die Symmetrie zurückzuführen sei. Diese Werte müssen Sie auswendig beherrschen. Sie sind nur ein kleiner Anteil dessen, was Sie an Werten der Sinus- und Kosinus-Funktionen beherrschen müssen.

Notes

Summary

13m 34s

Exemple 2

Exemple

Dans un triangle ABC rectangle en C, on connaît la valeur de l'angle α en A et la longueur de la cathète a opposée à cet angle :

$$\alpha = 72° \qquad \text{et} \qquad a = 232.$$

Déterminer la longueur de la cathète b adjacente à cet angle.

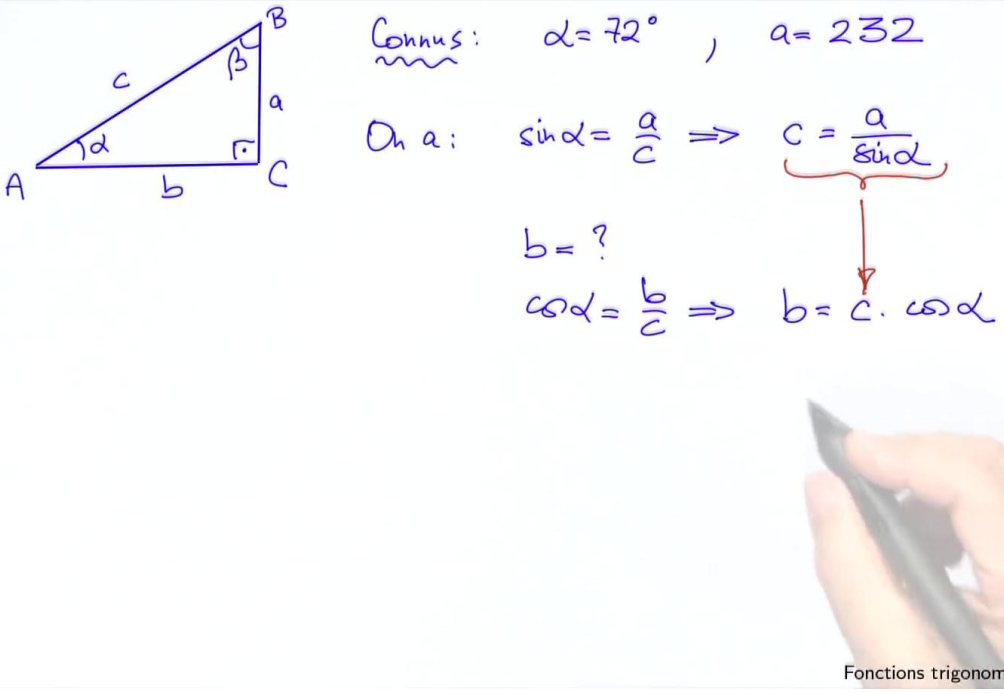
Nehmen wir ein zweites Beispiel rund um unsere Kenntnisse des rechtwinkligen Dreiecks. Und wenden diese erneut auf ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C an. Wir legen also die Standard-Beschriftung zugrunde, wie wir es bereits die ganze Präsentation über gemacht haben. Und nehmen wir ferner an, dass wir den Wert des Winkels α bei A kennen, also 72° und die Länge der Gegenkathete "a" = 232. Nun wollen wir die Länge der Ankathete "b" bestimmen, also der zweiten Kathete.

Notes

Summary

14m 47s

Exemple 2 (solution)



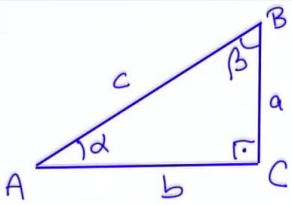
Wie gesagt, wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck. Bekannt sind also: der Winkel α, mit 72° und die Länge von "a", 232. Unser Ziel ist es, "b" zu bestimmen. Wir kennen also "a" und α und die zwischen ihnen bestehenden Verhältnisse, wie zum Beispiel "a", α mit "c", wir kennen jedoch nicht die Verknüpfung von "a", α und "b". Nehmen wir nochmals eine bekannte Gleichung, die wir bereits aufgestellt haben. Wir haben eine Beziehung zwischen "a", α und "c". Sie ist vom Sinus abhängig. Das heißt ich weiß, dass der Sinus von α die Gegenkathete durch die Hypotenuse ist, also a/c. Dies ermöglicht mir zu sagen, dass "c" durch a/sinus α bestimmt wird. Tatsächlich versuche ich also nicht "c" zu definieren, sondern ich versuche die Länge von b zu bestimmen. Wie kann ich "b" also beschreiben? Ich nehme eine Gleichung, die "b", α und "c" umfasst. Dies ist Cosinus von α, also b/c. So dass ich also sagen kann, dass "b" gleich c multipliziert mit Cosinus α ists Nun haben wir also die glückliche Situation, dass "c" uns zwischenzeitlich bekannt ist. Ich kann den Wert "c" in der letzten Gleichung darstellen. Ich kann zudem sagen, dass "b" bestimmt wird, als - wenn ich es richtig sehe, bleibt nur noch übrig - "a" multipliziert mit Cosinus α geteilt durch Sinus α.

Notes

Summary

15m 24s

Exemple 2 (solution)



Connus : $\alpha = 72°$, $a = 232$

On a : $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha}$

$b = ?$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos\alpha$

$b = a \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \approx 75.38$

Nehmen Sie also erneut Ihren Taschenrechner zur Hand und setzen Sie für "a" den Wert 232 ein und für Cosinus und Sinus den Wert 72°. Der Taschenrechner wird Ihnen einen Wert von 75,38 nennen.

Notes

Summary

17m 51s

Exemple 3

Exemple

Dans un triangle ABC rectangle en C, on connaît la longueur de la cathète a opposée au sommet A et la longueur de la cathète b opposée au sommet B :

$$a = 12.5 \qquad \text{et} \qquad b = 8.7\,.$$

Déterminer la valeur de l'angle α situé en A.

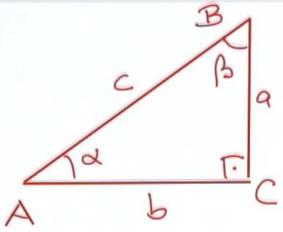
Ein drittes Beispiel: erneut ein rechtwinkliges Dreieck, ABC, mit dem rechten Winkel bei C, mit den von uns bisher auch genutzten Standard-Bezeichnungen, und nehmen wir an, dass wir die Länge der Kathete "a" von 12,5 und die Länge der Kathete "b" von 8,7 kennen. Was wir uns also fragen, ist, wie groß der Winkel α bei A ist.

Notes

Summary

18m 12s

Exemple 3 (solution)



Connus : $a = 12.5$, $b = 8.7$

On a :
- $c = \sqrt{a^2+b^2}$
- $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \approx 0.82$

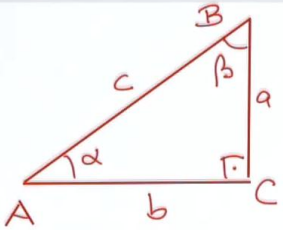
Nehmen wir also erneut das rechtwinklige Dreieck. Was ist uns bekannt in diesem Dreieck? Wir haben gesagt, dass wir "a", 12,5 und "b" kennen und dass wir den Wert des Winkels α bestimmen wollen. Eine direkte Beziehung zwischen α, "a" und "b" gibt es nicht. Wir haben allerdings eine Beziehung zwischen α, "a" und "c", nicht jedoch zwischen α, "a" und "b". Daher benötigen wir Zwischenergebnisse. Eine sichere Annahme ist, dass wir "c" mit Hilfe des Satzes des Pythagoras berechnen können. Eigentlich ist uns "c" daher bekannt. Dies ist insoweit interessant, als wir - wenn wir annehmen, dass "c" bekannt ist - uns mit einer Gleichung helfen können, die die Parameter α und "c" zum Beispiel durch "b" oder "a" ersetzt. Ich wähle hier den Sinus von α. Der Sinus von α ist a/c. "a" ist bekannt, für "c" kann ich sagen, dass der Satz des Pythagoras mir erlaubt, "c" als die Wurzel aus $a^2 + b^2$ zu beschreiben. Nehmen Sie also erneut Ihren Taschenrechner und berücksichtigen Sie, was uns bekannt ist, so erhalten Sie einen Wert von ungefähr 0,82. Beachten Sie, dass der Sinus -1 und 1 umfasst. Es ist also keine gute Idee, den Wert nur auf eine oder zwei Dezimalstellen zu bestimmen.

Notes

Summary

18m 35s

Exemple 3 (solution)



Connus : $a = 12.5$, $b = 8.7$

On a :
- $c = \sqrt{a^2+b^2}$
- $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \approx 0.820771346462$

$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \approx 0.92276$

$\alpha° =$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

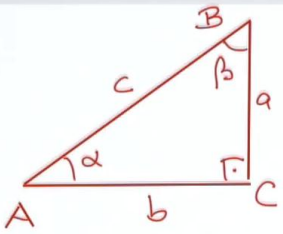
Vielmehr sollte auf mindestens fünf oder sieben Dezimalstellen genau bestimmt werden. Hier also einige Dezimalstellen, die mir mein Taschenrechner anzeigt. Das sind offensichtlich zu viele Stellen, aber sie sind da, nehmen wir sie also. Was wir wissen, ist, dass α zwischen 0 und π/2 liegen muss, dabei ist 0 ausgeschlossen, ebenso wie π/2. Wir wissen aber, dass dies die Größenordnung ist, in der sich α befindet. Wir könnten uns also die Frage stellen, ob man den Winkel von α bestimmen kann, abhängig von dessen Sinus, wenn man weiß, dass der Winkel α zwischen 0 und π/2 liegt. Die Antwort ist Ja. Einen solchen Winkel gibt es und im folgenden Kapitel werde ich dieses Problem so systematisch wie möglich erörtern. Was wir für den Moment festhalten können, ist, dass α durch den Begriff Arkussinus der Größe a/Wurzel aus (a^2+b^2) bestimmt werden kann. Für die Winkel zwischen und π/2 können wir also diesen Begriff des Arkussinus verwenden, den wir auch im Taschenrechner finden. Das Ergebnis daraus ist ungefähr 0,92276. Offensichtlich ist der Arkussinus also in Radiant angegeben. Will man folglich Grad haben, muss das Ergebnis umgerechnet werden. Die Umrechnungsformel ist: 180°/π multipliziert mit dem Ergebnis des Arkussinus.

Notes

Summary

20m 43s

Exemple 3 (solution)



Connus : $a = 12.5$, $b = 8.7$

On a :

- $c = \sqrt{a^2+b^2}$
- $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \approx 0.820771346462$

$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \approx 0.92276$

$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \approx 55.16^\circ$

Wenn Sie dies ausrechnen, erhalten Sie 55,16°. Natürlich ist hier noch eine Menge hinzuzufügen. Die Einführung des Arkussinus kann ein bisschen merkwürdig wirken. Andererseits ist klar, dass Sie auf dem trigonometrischen Kreis für den Wert 0,82 den einzelnen Punkt Pα erhalten, wenn α zwischen 0 und π/2 liegt. Der Winkel α muss gewissermaßen bekannt sein - und die Arkussinus-Funktion gibt uns die entsprechende Antwort. Noch einmal: Hierauf werden wir zurückkommen.

Notes

Summary

22m 43s

Remarques (suite)

- Dans l'exemple 3 nous avons besoin de déterminer un angle α sachant que

$$\sin\alpha \approx 0.820771346462\,.$$

Dans la section suivante nous allons donc apprendre à résoudre les équations

$$\sin\alpha = y \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha = x\,, \qquad \text{pour un } x \text{ et un } y \text{ donnés,}$$

en introduisant les expressions $\arcsin y$ et $\arccos x$.

Die Beispiele, mit denen ich arbeiten werde, machen zwei Dinge deutlich. Im 2. Beispiel, das heißt dem vorletzten, tauchte der Quotient cosinus α / sinus α auf. Dieser erlaubt es, "a" und "b" direkt zueinander ins Verhältnis zu stellen. Wir werden also im folgenden Kapitel die Quotienten definieren, das heißt Cosinus/Sinus, was als Kotangens bezeichnet wird. Sinus/Cosinus heißt Tangens. Das ermöglicht es, die Berechnungen rund um das rechtwinklige Dreieck stärker zu systematisieren. Der zweite und womöglich wichtigste Hinweis ist der, den ich bereits erwähnt habe: wir hatten im 3. Beispiel die Gleichung über den Sinus, bei der der Sinus bekannt war und es den Winkel α zu bestimmen galt. Bei dieser Art von Problem, bei der der Sinus von α gegeben ist, also "y" bekannt ist und wir α suchen - oder auch andersrum - kennen wir den Cosinus α, also den Wert von x und wollen den Winkel α bestimmen. Wir werden also das Auflösen solcher Gleichungen erörtern müssen. Im Rahmen der Diskussion dieser Gleichungen werde ich deutlich machen, was genau Arkussinus / Arkuscosinus bedeuten, die ich im 3. Beispiel bereits kurz erwähnt habe.

Notes

Summary

23m 29s

Trigonométrie dans le triangle rectangle

Ce que nous avons appris :

- la définition des rapports trigonométriques ;
- l'utilisation du sinus et du cosinus dans les triangles rectangles ;
- les valeurs remarquables du sinus et du cosinus.

Prochaine étape :

- les équations trigonométriques simples en sin et *cos* ;
- la définition des fonctions *arcsinus* et *arccosinus*.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Fassen wir zusammen: Was haben wir heute gelernt? Wir haben die trigonometrischen Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck kennengelernt und wir haben diese Beziehungen in unseren Berechnungen rund um das rechtwinklige Dreieck angewendet. Wir haben dabei außerdem wichtige Werte des Sinus und Cosinus, also Werte für die Winkel 0, π/6, π/4, π/3 und π/2 erarbeitet. Diese Werte müssen auswendig beherrscht werden, die Sie zumindest bis zur nächsten Sitzung im Gedächtnis behalten werden dessen bin ich sicher. Ich bedanke mich bei Ihnen. Das nächste Mal werden wir uns, wie besprochen, die trigonometrischen Gleichungen, vornehmen also Sinus α, eine Konstante, sowie Cosinus α, eine Konstante und darüber hinaus die Funktionen Arkussinus und Arkuscosinus definieren. Bis zum nächsten Mal!

Notes

Summary

24m 46s