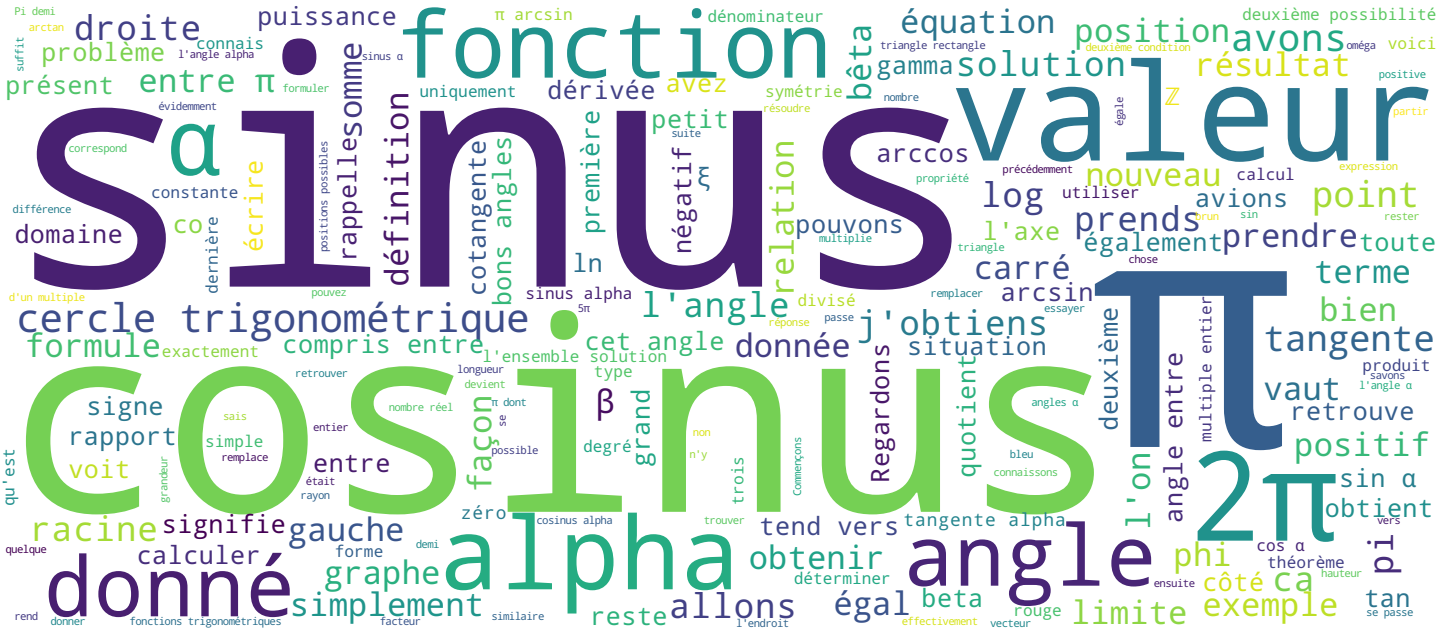
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus et leurs inverses

2.4 Equations trigonométriques simples en sinus et en cosinus

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

Video

L'équation $\sin\alpha = y$

On considère l'équation

$$\sin\alpha = y\,,$$

où $y \in \mathbb{R}$ est une valeur donnée et où $\alpha \in \mathbb{R}$ est la grandeur recherchée.

Bonjour. La dernière fois, j'ai appliqué les fonctions trigonométriques du sinus et du cosinus dans le cadre de calculs autour d'un triangle rectangle. Nous avions ainsi, par exemple, pu déterminer le sinus d'un angle inconnu, et j'avais dis, à l'époque : "Si l'on connait le sinus de cet angle, on peut obtenir l'angle en prenant simplement sur une calculatrice "arcsinus" de cette valeur. Aujourd'hui, j'aimerais traiter ce problème : comment obtenir à partir de la valeur du sinus donné l'angle correspondant, ou plutôt les angles correspondants, comme nous le verrons. Considérons donc pour commencer l'équation sinus de α = y. Ici, quand on considère une telle équation, on va dire que y est une valeur donnée, et nous recherchons α membre réel, tel que le sinus de α donne y.

Notes

Summary

0m 04s

L'équation $\sin\alpha = y$

On considère l'équation

$$\sin\alpha = y\,,$$

où $y \in \mathbb{R}$ est une valeur donnée et où $\alpha \in \mathbb{R}$ est la grandeur recherchée.

On peut donc formuler notre problème sous la forme suivante :

Donné :	$y \in \mathbb{R}$
Recherché :	toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $\sin\alpha = y$.

De façon très précise, pour y donné, ici sur la droite, nous recherchons toutes les valeurs α, telles que sinus(α) donne y. Non seulement une valeur possible, mais nous cherchons à connaitre toutes les valeurs possibles de α.

Notes

Summary

1m 05s

Résolution de l'équation $\sin\alpha = y$

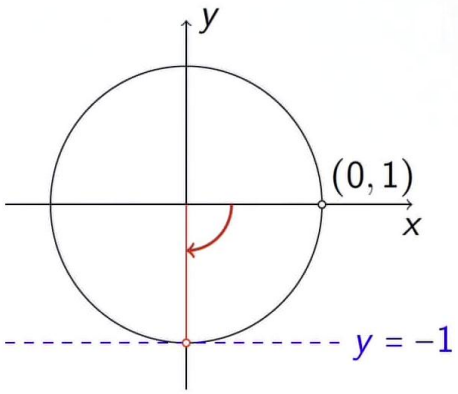
Proposition

- *Si* $y = -1$,

  alors toutes les solutions sont données par

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + k\,2\pi\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

$$\mathbb{S} = \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\,2\pi : \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Nous pouvons à présent formuler la proposition suivante concernant l'équation sinus(α) = une constante y donnée. Commençons par considérer le cas où y est plus petit que -1. Considérons la situation sur le cercle trigonométrique : sur ce cercle de rayon 1, dans un système d'axe x-y, et je vous rappelle que le sinus de α est donné par une ordonnée d'un point sur le cercle trigonométrique. Si je donne alors pour sinus α une valeur de y inférieure à -1, quelque part sur cette droite en pointillés, je vois immédiatement que je ne vais pas pouvoir trouver un point sur le cercle trigonométrique ayant comme ordonnée cette valeur de y inférieure à -1. Là, je n'ai aucune solution, aucun α réel, tel que le sinus de α est inférieur à -1. Regardons ce qui se passe lorsque l'on augmente cette valeur de y, en prenant pour y la valeur de -1 -toujours sur le cercle trigonométrique- la valeur de -1. Cette valeur, je vois immédiatement qu'elle est prise en un seul point sur le cercle trigonométrique; je peux même retrouver un angle correspondant, il est dessiné ici en rouge : c'est l'angle -π/2. Nous savons que dès que nos positions correspondent à un sinus donné, nous pouvons changer cet angle d'un multiple entier de 2π.

Notes

Summary

1m 21s

Résolution de l'équation $\sin\alpha = y$

Proposition

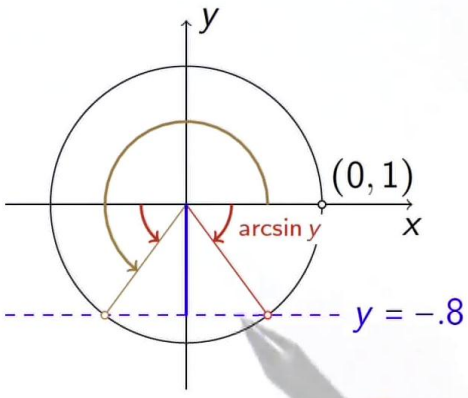
- *Si* $-1 < y < 1$,

  alors toutes les solutions sont données par

$$\alpha = \arcsin(y) + k\,2\pi$$

et $$\alpha = \pi - \arcsin(y) + k\,2\pi\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

où $\arcsin(y)$ *est l'unique angle compris entre* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$ *dont le sinus vaut* y.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

En fait, les angles possibles sont donnés par -π/2 + k x 2π avec k, un entier, qu'il soit positif ou négatif. Nous pouvons écrire que l'ensemble solution de l'équation sinus(α) = y est donné par {-π/2 + k x 2 π}, k étant un entier. Considérons à présent l'équation sinus(α) = y, y donné, avec y compris entre -1 et 1. Retournons sur le cercle trigonométrique. A la hauteur d'un y compris entre -1 et 1, ici, il est pris à -0,8. On voit immédiatement apparaitre deux positions possibles pour le point Bα correspondant. Nous allons appeler l'une de ces solutions -et je serai plus précis dans un instant là-dessus- l'angle dessiné ici, arcsin(y) : une des possibilités est toujours donnée par arcsin(y). Évidement, une fois que j'ai un angle qui correspond à la position ici, à droite, je peux changer cet angle, d'un entier, d'un multiple entier de 2π, et dire que j'ai arcsin(y) + k x 2π. Cela me donne toutes les solutions qui correspondent à cette position ici, sur la droite. Pour obtenir la position sur la gauche, il faut utiliser la symétrie autour du cercle trigonométrique. Il faut essayer de retrouver cet angle, ici en brun, ce qui n'est pas trop difficile.

Notes

Summary

2m 53s

Résolution de l'équation $\sin\alpha = y$

Proposition

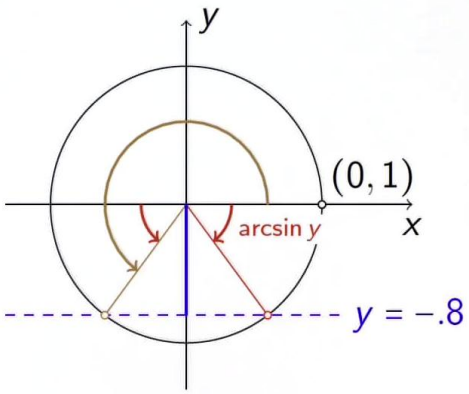
- *Si* $-1 < y < 1$,

  alors toutes les solutions sont données par

  $$\alpha = \arcsin(y) + k\,2\pi$$

  et $$\alpha = \pi - \arcsin(y) + k\,2\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

où $\arcsin(y)$ *est l'unique angle compris entre* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$ *dont le sinus vaut* y.



Je commence par prendre π, et ici il faut augmenter; arcsin est un angle négatif, donc si je soustrais la grandeur arcsin, j'obtiens exactement l'angle en brun, donc la deuxième possibilité serait π - arcsin(y) et, de nouveau, pour cette position sur la gauche, je peux changer l'angle d'un multiple entier de 2π, avec + k x 2π et (k ∈ ℤ). Précisions encore la signification de arcsin(y) : comme ici dans l'encadré, arcsin(y) est l'unique angle compris entre -π/2 et π/2 dans le sinus vaut y. Nous allons prendre, lorsque nous parlons de l'équation sin(α) = y, pour avoir arcsin(y), une position qui est située sur le demi-cercle à droite et nous allons prendre comme angle possible un angle entre -π/2 et π/2. Un tel angle, il n'en existe qu'un seul, donc arcsin(y) est défini de façon unique par cet encadré, ici en jaune.

Notes

Summary

4m 31s

Résolution de l'équation $\sin\alpha = y$

Proposition

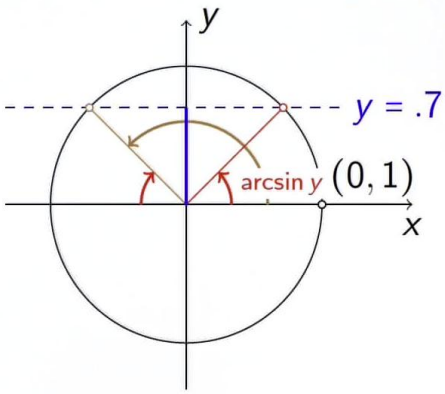
- *Si* $-1 < y < 1$,

  alors toutes les solutions sont données par

$$\alpha = \arcsin(y) + k\,2\pi$$

et $$\alpha = \pi - \arcsin(y) + k\,2\pi\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

$$\mathbb{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \arcsin(y) + k\,2\pi\,,\ \pi - \arcsin(y) + k\,2\pi \right\}.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous pouvons donc formuler que l'ensemble de toutes les solutions de notre équation sin(α) = y, avec y compris entre -1 et 1, est alors d'une part arcsin(y) + k x 2π d'autre part π - arcsin(y) + k x 2π, et on prend tous les cas dans ℤ. Notez bien que ce résultat reste valable si je prends une valeur de y toujours entre -1 et 1 mais ici positive, comme par exemple à 0,7, où je retrouve comme premier angle à droite arcsin(y) entre -π/2 et π/2, et pour l'angle en brun, je soustrais à π cet arcsin(y). Pour ces deux valeurs, qui peuvent être de base, arcsin(y) et π - arcsin(y), je peux changer chacun de ces angles d'un multiple entier de 2π.

Notes

Summary

5m 49s

Résolution de l'équation $\sin\alpha = y$

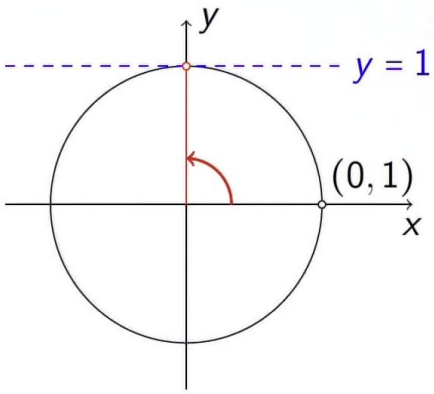
Proposition

- *Si* $y = 1$,

  alors toutes les solutions sont données par

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\,2\pi\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

$$\mathbb{S} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\,2\pi : \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Regardons à présent ce qui ce passe si y vaut 1 : j'ai sin(α) = 1 ici. Dans ce cas-là, je n'ai qu'une seule position -ici en rouge- pour le point sur le cercle trigonométrique, c'est le seul point dont l'ordonnée vaut 1. L'angle correspondant est π/2 + un multiple de π près. L'ensemble des solutions est donné ici par {π/2 + k x 2π} avec (k ∈ ℤ).

Notes

Summary

6m 43s

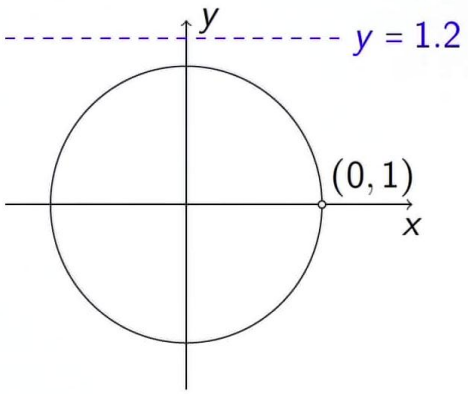
Résolution de l'équation $\sin \alpha = y$

Proposition

- *Si* $y > 1$,

  alors il n'existe aucun angle $\alpha \in \mathbb{R}$ *qui soit solution de cette équation,*

  $$\mathbb{S} = \varnothing .$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Finalement, regardons ce qui ce passe si dans cette équation sin(α) = y, y est plus grand que 1. C'est le cas ici. Je ne trouve plus aucun point dont l'ordonnée serait sur cette droite bleue en pointillés, alors l'ensemble des solutions est vide dans ce cas-là.

Notes

Summary

7m 14s

Définition : fonction arcsinus

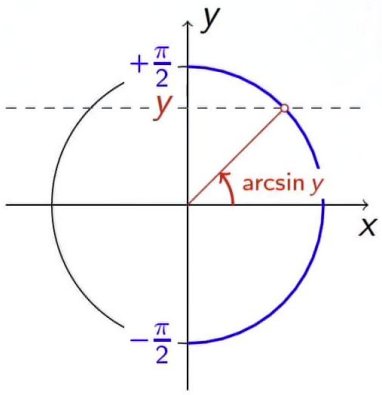
La fonction *arcsinus* est la fonction

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad y \mapsto \arcsin y$$

qui à toute valeur $y \in [-1,1]$ donnée,

fait correspondre l'unique angle $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

tel que $\sin \alpha = y$.



Donnons à présent une définition exacte de ce que l'on entend par "arcsinus". L'arcsinus est en réalité une fonction; c'est une fonction qui accepte des valeurs entre -1 et 1. Ce sont des valeurs y, ce sont des ordonnées prises par un point sur le cercle unitaire et l'arcsinus nous rend un angle sur la partie droite du cercle trigonométrique, un angle entre -π/2 et π/2. A toute valeur y donnée, on fait correspondre une valeur entre -π/2 et π/2; une fois que y est donné, on choisit l'angle unique -ici sur cette partie bleue- pour obtenir un point situé à la hauteur y voulue. Il faut donc que le sinus de α donne y et que α soit compris entre -π/2 et π/2.

Notes

Summary

7m 33s

Remarques

Conséquence de la définition :

$$\sin(\arcsin y) = y, \qquad \forall\, y \in [-1, 1]$$

et

$$\arcsin(\sin \alpha) = \alpha, \qquad \forall\, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Nous appelons un angle α un bon angle pour le *sinus* si $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Les bons angles pour le *sinus* sont donc exactement les angles donnés par la fonction *arcsinus*.

La relation $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$ est donc vraie si et seulement si α est un bon angle pour le *sinus*.

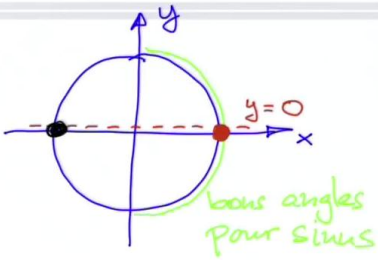
Si l'on regarde un peu ce que cela implique, par définition-même, si je prends une valeur de y entre -1 et 1, si je calcule arcsinus, j'obtiens un angle dont le sinus donne précisément y. C'est donc une égalité qui a lieu pour tous les y entre -1 et 1, ce qui ne pose pas trop de problème car, si je choisis une valeur autre, arcsin(y) ne serait pas défini. On ne peut alors pas réellement se tromper sur cette égalité. La deuxième étape est un peu plus critique. Je prends un angle α : si je calcule le sinus, et qu'ensuite je prends arcsinus, il n'est pas dit qu'ensuite je retrouve α. Cela advient uniquement si α est effectivement dans la plage des valeurs que nous avions prise pour arcsinus, donc -π/2 et π/2. Dans ce cas, il est clair que si je prends un angle puis son sinus et son arcsinus ensuite, j'obtiens à nouveau α, mais pas pour les autres valeurs de α. Nous allons dire qu'un angle α est un bon angle pour le sinus s'il est précisément dans cette plage [-π/2; π/2]. Les bons angles sont exactement ceux qui sont rendus par la fonction arcsinus, et les bons angles sont exactement ceux pour lesquels cette deuxième égalité, arcsin(sinα) = α, est correcte.

Notes

Summary

8m 28s

Exemple 1



Exemple

Résolution de l'équation $\sin\alpha = 0$.

$S = \{\underbrace{\arcsin 0}_{=0} + k2\pi\} \cup \{\pi - \arcsin 0 + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$S = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k2\pi, \pi + k2\pi\}$

$S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

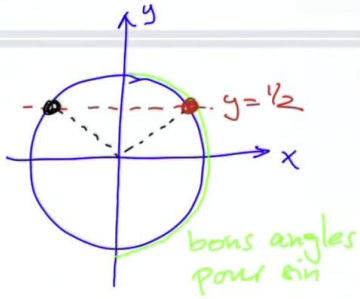
Résolvons à présent l'équation sin(α) = 0. Nous allons regarder ce qui se passe sur le cercle trigonométrique. Dessinons. Pour un sinus, où vais-je trouver les bons angles ? Ils sont ici. Cela, ce sont les bons angles pour sinus. Quelle est la valeur prise par sin(α) ? C'est 0, c'est une valeur y. Inscrivons cette valeur; nous retrouvons donc deux positions possibles : l'une est ici, [point rouge] l'autre est ici. [point noir] Nous pouvons donc écrire que l'ensemble solution est donné par le point rouge ici, qui correspond à {arcsin(0) + k x 2π} ou par celui en noir, {π - arcsin(0) + k x 2π}, avec à chaque fois (k ∈ ℤ). L'arcsin(0), on le voit sur le cercle trigonométrique, vaut zéro, alors j'obtiens que l'ensemble solution est donné par {k x 2π avec (k ∈ ℤ)} et π - arcsin(0) qui vaut zéro, ce qui nous amène à {π + k x 2π avec (k ∈ ℤ)}. On peut encore écrire ce résultat sous la forme suivante : [{k x 2π, π + k x 2π}] et prendre ces deux solutions pour tous les (k ∈ ℤ). Je pense cependant que la formulation la plus simple du résultat consisterait à dire -et on le voit sur le cercle trigonométrique- que ces deux positions sont simplement données par {k x π}, avec (k ∈ ℤ). Voici la résolution de ce problème.

Notes

Summary

9m 57s

Exemple 2



$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

Exemple

Résolution de l'équation $2\sin(3\alpha - 1) = 1$.

On obtient : $\sin(3\alpha - 1) = 1/2$

β

Considérons en deuxième exemple le problème de résolution de l'équation 2 x sin(3α - 1) = 1. Cela revient à dire que le sinus de (3α - 1) vaut 1/2. On peut appeler si l'on veut cet angle β; nous allons essayer de trouver d'abord β et ensuite, nous en déduirons α. Il faut retourner sur le cercle trigonométrique. Voilà ce cercle trigonométrique et l'axe x-y. Le sinus de β, si l'on veut, vaut une demie. Je me place ici à la hauteur 1/2; [L'arc de cercle vert représente les bons angles pour sinus] les bons angles pour sinus sont situés entre -π/2 et π/2. Je vois immédiatement apparaitre deux positions possibles : l'une se trouve ici, [point rouge] l'autre se trouve ici. [point noir] Il faut peut-être se rappeler que nous connaissons un angle entre -π/2 et π/2, dont le sinus est 1/2, et donc que l'arcsin(1/2) -l'angle entre -π/2 et π/2 dont le sinus fait 1/2- est donné par π/6. Cela, nous le connaissons grâce aux valeurs qui méritent d'être retenues, autour du sinus, des valeurs dites "remarquables". Qu'obtiens-je ? Pour 3α - 1, j'obtiens d'abord π/6, cet arcsin(1/2), plus un multiple entier de 2π près.

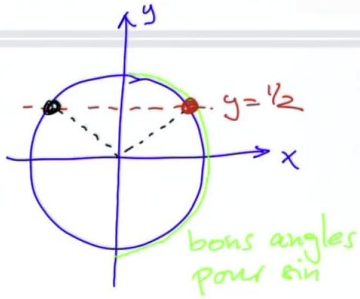
Notes

Summary

12m 48s

Exemple 2

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$



Exemple

Résolution de l'équation $2\sin(3\alpha - 1) = 1$.

$\sin(3\alpha-1) = \frac{1}{2}$

β

On obtient :

$3\alpha - 1 = \frac{\pi}{6} + k2\pi$

et $3\alpha - 1 = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$= \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

L'autre solution est donnée par -on le voit sur le dessin- π - arcsin(1/2), donc {π - π/6 + k x 2π}, c'est-à-dire qu'ici, on obtient 5π/6 + k x 2π, avec toujours (k ∈ ℤ). Alors, ce qui est demandé, c'est de trouver les valeurs de α, pas de 3α - 1, donc nous allons à présent résoudre chacune de ces équations séparément par rapport à α.

Notes

Summary

14m 58s

Exemple 2 (suite)

Mais

$3\alpha - 1 = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ et $3\alpha - 1 = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

$3\alpha = \frac{\pi}{6} + 1 + k2\pi$ ⋮

$\alpha = \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$ $\alpha = \frac{5\pi}{18} + \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3}$

$(k \in \mathbb{Z})$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{18} + \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Commençons par la première possibilité : nous pouvons résoudre cette équation facilement par rapport à α; ici, j'ai simplement passé la constante 1 depuis la gauche vers la droite et je peux multiplier cette équation par un tiers, ce qui me donne α. J'obtiens donc pour α π/18 + 1/3 + k x 2π/3. Nous avons une seconde possibilité. Examinons-la : 3α - 1 = 5π/6 + k x 2π. De façon analogue, on trouvera α = 5π/18 + 1/3 + k x 2π/3; nous obtenons ces 5π/6 divisés par 3, le -1 devient 1/3 et les k x 2π deviennent k x 2π/3. Pour les deux calculs, nous avons toujours (k ∈ ℤ). Nous pouvons à présent résumer dans une réponse les deux possibiltés que nous avons trouvé. Nous obtenons pour l'ensemble solution, d'abord sur la gauche, {π/18 + 1/3 + k x 2π/3} avec (k ∈ ℤ), et la deuxième possibilité est celle de droite avec {5π/18 + 1/3 + k x 2π/3} et (k ∈ ℤ), Voilà l'ensemble solution à notre problème.

Notes

Summary

15m 42s

Exemple 3

Exemple

Déterminer tous les angles $\alpha \in \mathbb{R}$ qui satisfont le système

$$\begin{cases} 2\sin(3\alpha - 1) = 1 \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi. \end{cases}$$

$\alpha = \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3}$

$\alpha = \frac{5\pi}{18} + \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Il faut filtrer !

Voici encore un exemple où nous aimerions déterminer tous les angles α qui satisfont cette fois-ci un système. On a d'abord une équation, et si vous regardez bien il s'agit de l'équation de l'exemple 2; là, je connais toutes les valeurs de α. En outre, on donne une deuxième condition : on aimerait avoir α entre π/2 et π. Pour la première équation, nous avions trouvé deux possibilités : voici la première, qui était π/18 + 1/3 + k x 2π/3, et nous avions une deuxième possibilité sous la forme de 5π/18 + 1/3 + k x 2π/3, avec (k ∈ ℤ). Pour la deuxième équation ou la deuxième condition, ce qui n'en fait pas une équation, on dit que α doit être compris entre π/2 et π. Cela revient à dire qu'il faut "filtrer", donc qu'il nous faut trouver parmi les possibilités offertes par la première équation, il nous faut trouver celles qui satisfont la deuxième condition.

Notes

Summary

17m 50s

Exemple 3 (suite)

1er cas : $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3} < \pi$

$\frac{4\pi - 3}{9} < k\frac{2\pi}{3} < \frac{17\pi - 6}{18}$

$\underbrace{\frac{2}{3} - \frac{1}{2\pi}}_{\approx 0.51} < k < \underbrace{\frac{17}{12} - \frac{1}{2\pi}}_{\approx 1.26}$, $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 1$

Nous allons procéder en deux étapes. Dans une première étape, nous allons simplement prendre la première des possibilités. Premier cas : π/2 inférieur à mon α qui, dans ce cas-là, est donné par π/18 + 1/3 + k x 2π/3, et cet angle α doit être inférieur à π. Nous allons à présent résoudre cette équation par rapport à k; je vous rappelle que k est un entier. Nous allons isoler k x 2π/3, ce qui conduit sur les inégalités suivantes : [(4π -3)/9 < k x 2π/3 < (17π - 6)/18] j'ai simplement additionné sur tous les membres le -π/18 - 1/3; à présent, il faut isoler k donc je vais multiplier chaque terme par 3/2π, un nombre positif, qui ne change pas l'ordre des signes d'inégalité. Après multiplication, ce qui va me rester c'est 2/3 - 1/2π < k < 17/12 - 1/2π. Je rappelle que k est un entier. Ici, il faut essayer de calculer de façon approximative les bornes à gauche et à droite; on peut aller par calcul mental en remplaçant π par 3, 3,1 ou 3,14 ou l'on peut aussi prendre une calculatrice. Ici, sur la gauche, nous avons environ 0,51 et sur la droite, environ 1,26. L'unique k qui est situé entre 0,51 et 1,26 est donc k = 1. L'unique possibilité est donc k = 1 pour l'angle de première espèce.

Notes

Summary

19m 08s

Exemple 3 (suite et fin)

Second cas $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{18} + \frac{1}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3} < \pi$

$\underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi}}_{\approx 0.17} < k < \underbrace{\frac{13}{12} - \frac{1}{2\pi}}_{\approx 0.92}$, $k \in \mathbb{Z}$

aucun k !

Donc $S = \left\{ \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3} \mid k = 1 \right\}$

c.à.d. $S = \left\{ \frac{13\pi + 6}{13} \right\}$

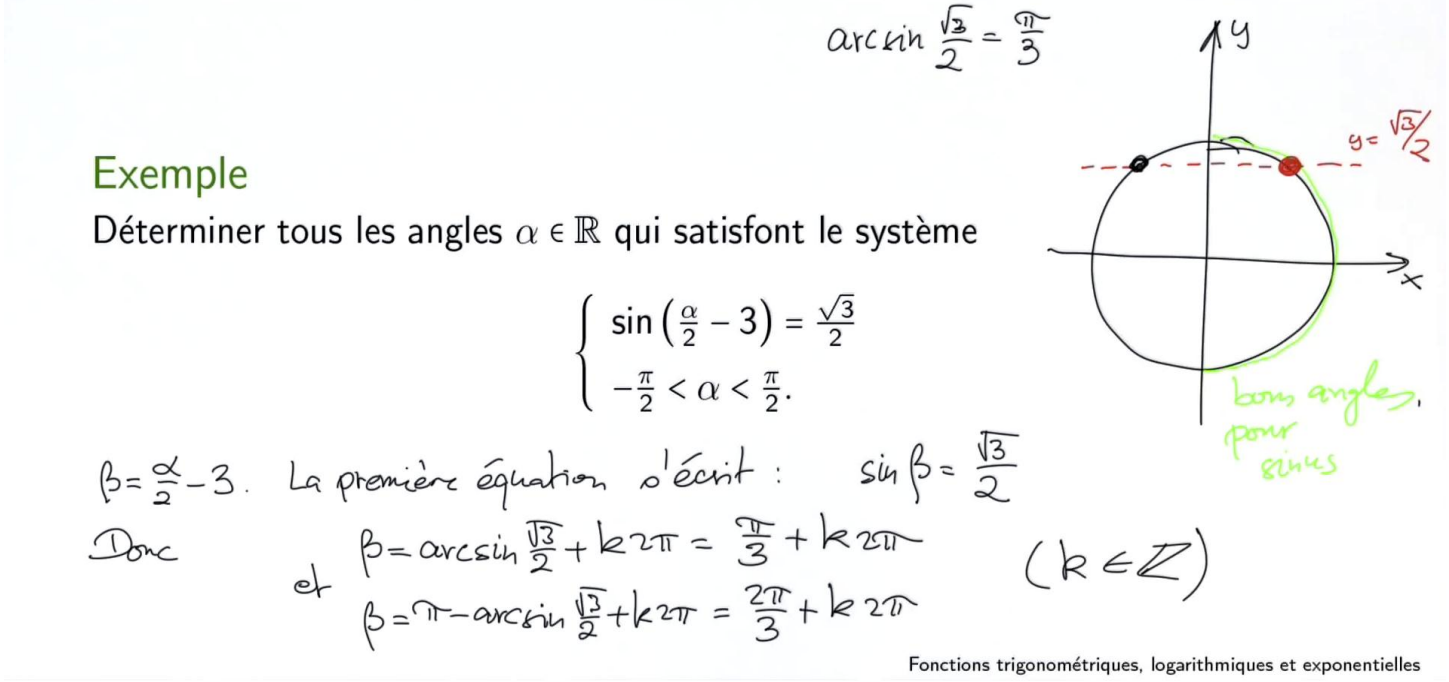
Considérons à présent la seconde possibilité. Nous avons la borne inférieure π/2, nous avons l'angle α donné par 5π/18 + 1/3 + k x 2π/3, et cet angle doit rester inférieur à π. Un calcul similaire au précédent qui permet d'isoler la valeur de k, ici, permet d'écrire 1/3 - 1/2π < k < 13/12 - 1/2π. De nouveau, sur la gauche, nous obtenons environ 0,17 et sur la droite environ 0,92 donc, si l'on se rappelle que k doit être un entier, on obtient aucun k possible. Il ne me reste qu'une seule possibilité et je peux écrire que l'ensemble solution est donné par je prends l'angle qui était de première espèce, ici π/18 + 1/3 + k x 2π/3, et nous avions dit que l'unique possibilité était k = 1 et pour les angles de deuxième espèce, que nous avons calculé ici, il n'y a aucun k possible donc là nous avons toutes les solutions; on peut alors remplacer k par 1 et obtenir l'unique solution S donnée par {(13π + 6)/13} et cela est la solution à ce problème.

Notes

Summary

21m 34s

Exemple 4



Regardons encore un quatrième exemple, qui est de nature similaire : nous voulons déterminer tous les angles α dans ℝ qui satisfont un système, le premier système dit que le sinus de (α/2 - 3) doit être racine de 3/2 et nous avons une contrainte sous forme d'inégalité comme deuxième condition. Nous allons procéder de la façon suivante : on va d'abord poser β, puis on prend l'angle α/2-3, ce qui va nous faciliter la tâche au début. La première équation s'écrit telle que le sinus de β est donné par √3/2 sur le cercle trigonométrique. Sur ce cercle trigonométrique, j'ai ici les bons angles [arc de cercle en vert] pour le sinus, qui est √3/2, nous retrouvons deux positions possibles et nous pouvons rappeler arcsin(√3/2) qui fait que nous connaissons un angle entre -π/2 et π/2, dont le sinus vaut √3/2; c'est un angle remarquable, il vaut π/3. Je vais pouvoir écrire que pour β j'ai deux possibilités : β est donné par arcsin(√3/2) + k x 2π, c'est à dire par π/3 + k x 2π, et j'ai une deuxième possibilité, cette fois avec π - arcsin(√3/2) + k x 2π, et donc que j'obtiens là le π - π/3, donc 2π/3 + k x 2π, et (k ∈ ℤ).

Notes

Summary

23m 40s

Exemple 4 (suite)

- Pour $\beta = \frac{\pi}{3} + k2\pi$, cela donne

  $\frac{\alpha}{2} = 3 + \frac{\pi}{3} + k2\pi$, c.à.d. $\alpha = 6 + \frac{2\pi}{3} + k \cdot 4\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

- Pour $\beta = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$, cela donne

  $\frac{\alpha}{2} = \frac{2\pi}{3} + 3 + k2\pi$, c.à.d. $\alpha = 6 + \frac{4\pi}{3} + k \cdot 4\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

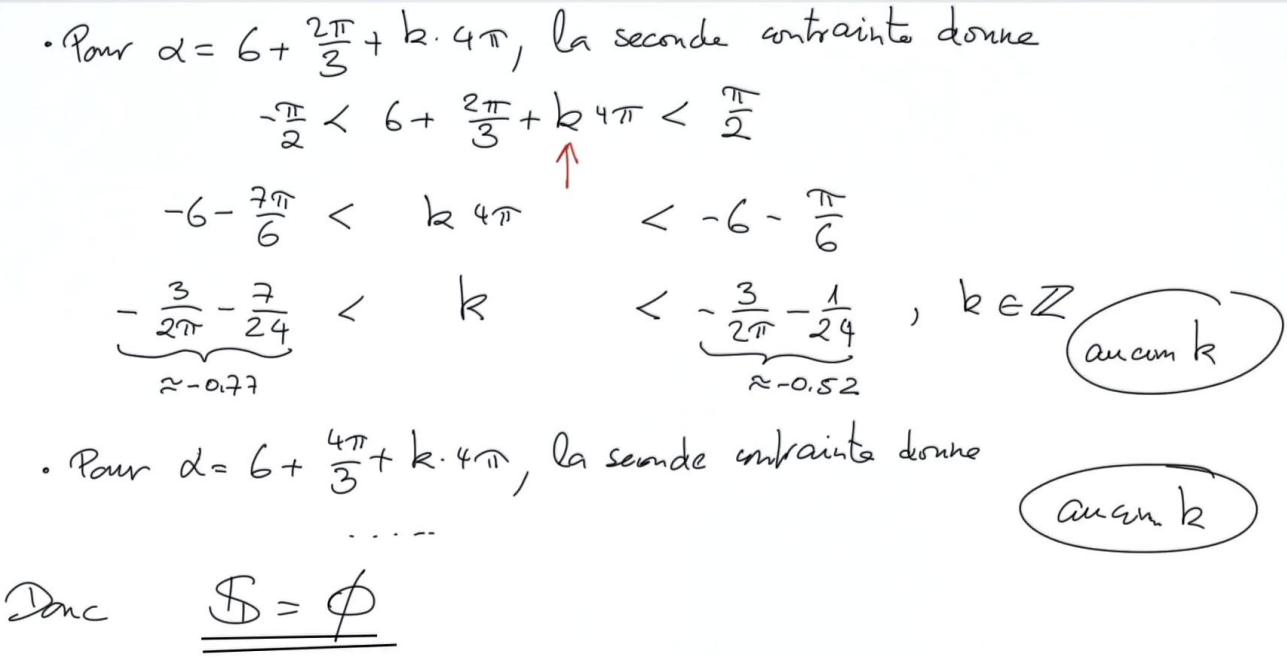
Comme précédemment, nous allons traiter les deux cas séparément : commençons par β = π/3 + k x 2π; je sais que β est donné par α/2 - 3, donc je peux calculer α/2 en ajoutant simplement 3, et en prenant le double de cet angle je vais obtenir α, donc α = 6 + 2π/3 + k x 4π avec (k ∈ℤ). Je procède de la même façon pour la deuxième possibilité : là nous n'avions pas π/3 mais 2π/3, on fait π - 2π/3 donc 2π/3 + k x 2π et on procède exactement de la même façon en commençant par rajouter 3 puis en prenant le double. On obtient α = 6 + 4π/3 + k x 4π avec (k ∈ ℤ). Voilà le resultat que j'obtiens à partir de la première condition, de la première équation mais nous avons encore une deuxième condition, c'est-à-dire que nous aimerions avoir des angles α situés entre -π/2 et π/2. Nous allons maintenant de nouveau, dans chacun des cas, analyser comment on obtient les angles α, ici ou là, qui sont situés entre -π/2 et π/2.

Notes

Summary

26m 06s

Exemple 4 (suite et fin)



Pour la première possibilité, où α = 6 + 2π/3 + k x 4π, la seconde contrainte donne, quand on est entre -π/2 et π/2 : [-π/2 < 6 + 2π/3 + k x 4π < π/2] A nouveau, nous allons isoler k, donc nous passons le 6 de l'autre côté, c'est-à-dire que nous additionnons -6, nous additionnons -π/3 pour la même raison et nous obtenons : [- 6 -7π/6 < k x 4π < -6 -π/6] Il suffit encore de multiplier chacun des termes par le nombre positif 1/4π pour obtenir des estimateurs pour k. [- 3/2π - 7/24 < k < -3/2π - 1/29] avec k un entier. De nouveau, on prend une calculatrice ou l'on calcule de tête : ici, nous aurons environ -0,77 et sur la droite, nous aurons -0,52, donc là, nous n'avons aucun k. Nous avons encore une deuxième possibilité et là aussi, nous faisons une analyse similaire sur la seconde contrainte. Je vous laisse le soin de procéder à ces calculs; vous allez obtenir un résultat tout à fait similaire et de nouveau ne trouver aucun k. Vous vous retrouvez devant une situation du type que nous avions abordé précédemment. Si je résume : il n'y a pas de solution.

Notes

Summary

28m 00s

L'équation $\cos\alpha = x$

On considère l'équation

$$\cos\alpha = x\,,$$

où $x \in \mathbb{R}$ est une valeur donnée et où $\alpha \in \mathbb{R}$ est la grandeur recherchée.

On peut donc formuler notre problème sous la forme suivante :

Donné :	$x \in \mathbb{R}$
Recherché :	toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $\cos\alpha = x$.

Jusqu'à présent, nous nous sommes préoccupés de l'équation sin(α) = une valeur donnée y. Regardons ce que l'on peut faire avec le cosinus de façon similaire; je prends cos(α) = x cette fois-ci. On va dire que x est un nombre réel donné, et α, ici, est la valeur recherchée. De façon plus précise, on donne x, sur la droite, et on cherche toutes les valeurs de α dans ℝ tel que le cos(α) = x. On recherche vraiment toutes les valeurs et pas simplement une.

Notes

Summary

30m 20s

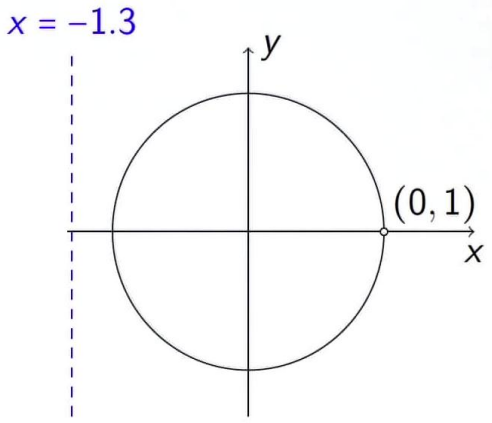
Résolution de l'équation $\cos\alpha = x$

Proposition

- *Si* $x < -1$,

  alors il n'existe aucun angle $\alpha \in \mathbb{R}$ *qui soit solution de cette équation,*

  $$\mathbb{S} = \varnothing .$$



On peut formuler ici un résultat tout à fait similaire à celui que nous avions pour le sinus. Commençons par regarder ce qui ce passe si x < -1, il faut reprendre le cercle trigonométrique, le cercle de rayon 1; nous savons que nous recherchons toujours un angle avec une position, nous cherchons l'angle α, avec une position Pα sur le cercle trigonométrique; nous savons que le cosinus est donné par l'abscisse de ce point mais l'abscisse d'un tel point ne peut pas valoir moins que -1/2, donc ici on a pris par exemple -1,3 et on voit très bien que l'on ne trouve aucun point sur le cercle trigonométrique, donc ici nous n'avons aucune solution pour cette équation.

Notes

Summary

30m 56s

Résolution de l'équation $\cos\alpha = x$

Proposition

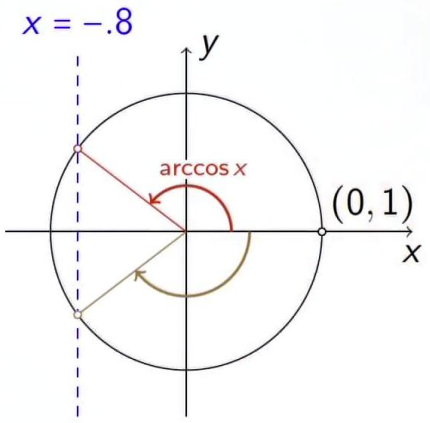
- *Si* $-1 < x < 1$,

  alors toutes les solutions sont données par

  $$\alpha = \arccos(x) + k\,2\pi$$

  et $$\alpha = -\arccos(x) + k\,2\pi\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

où $\arccos(x)$ *est l'unique angle compris entre* 0 *et* π *dont le cosinus vaut* x.



Cela change dès que x vaut -1. Cette fois-ci, le cos(α) = -1. Sur le cercle trigonométrique, j'ai exactement une position et dans cette position, on pourrait dire qu'en tout cas un des angles possibles va être π; évidemment, je peux rajouter des multiples entiers de 2π. L'ensemble solution est donné pour finir par -on peut mettre π en évidence, 1 + 2k x π- les multiples impairs de π, qui sont solution. Que ce passe-t-il maintenant si x est compris entre -1 et 1 ? Je dirais que c'est la situation la plus intéressante : nous avons ici le cercle trigonométrique, j'ai ici la valeur x à -0,8 pour se faire une idée et on voit que l'on a que deux positions possibles pour le point correspondant sur le cercle trigonométrique. On peut commencer à dire que l'on a une possibilité sur le demi-cercle supérieur -il est ici en rouge cet angle α- et dans ce cas-là, on va l'appeler arccosinus de x, on va dire que c'est la solution, que arccos(x) est l'unique angle compris entre 0 et π; on est sur le demi-cercle supérieur, avec des angles entre 0 et π, et là il n'y a qu'une seule possibilité, on va l'appeler arccosinus et on peut évidemment rajouter des multiples de π, puisqu'alors on retombe sur la même position sur le cercle trigonométrique, et donc on a de nouveau une même valeur pour le cosinus.

Notes

Summary

31m 40s

Résolution de l'équation $\cos\alpha = x$

Proposition

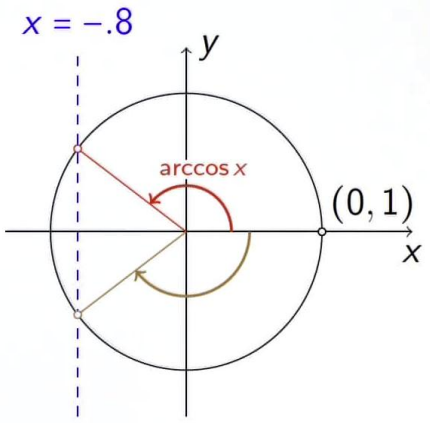
- *Si* $-1 < x < 1$,

  alors toutes les solutions sont données par

  $$\alpha = \arccos(x) + k\,2\pi$$

  et $$\alpha = -\arccos(x) + k\,2\pi\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

où $\arccos(x)$ *est l'unique angle compris entre* 0 *et* π *dont le cosinus vaut* x.



La deuxième possibilité est donnée par la symétrie sur le cercle trigonométrique -l'angle indiqué ici en brun : on voit tout de suite qu'il suffit de prendre - arccos(x) et que la deuxième possibilité est -arccos(x) + k x 2π.

Notes

Summary

33m 14s

Résolution de l'équation $\cos\alpha = x$

Proposition

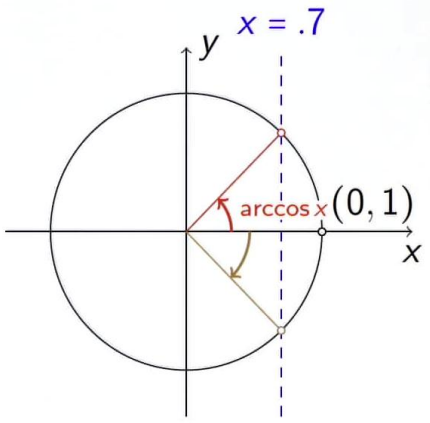
- *Si* $-1 < x < 1$,

  alors toutes les solutions sont données par

$$\alpha = \arccos(x) + k\,2\pi$$

et $$\alpha = -\arccos(x) + k\,2\pi\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

$$\mathbb{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \arccos(x) + k\,2\pi\,,\ -\arccos(x) + k\,2\pi \right\}.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous pouvons donc formuler une réponse dans l'ensemble solution : nous prenons arccos(x) et -arccos(x) + k x 2π dans les deux cas pour tous les k entiers. Cette façon de voir reste aussi valable pour un x positif, tant qu'il est entre -1 et 1 -ici l'arc cosinus est compris entre 0 et π- et nous avons effectivement les deux solutions dessinées : la rouge, c'est arccos et en brun, c'est -arccos, et on peut modifier ces angles d'un multiple entier de 2π.

Notes

Summary

33m 30s

Définition : fonction arccosinus

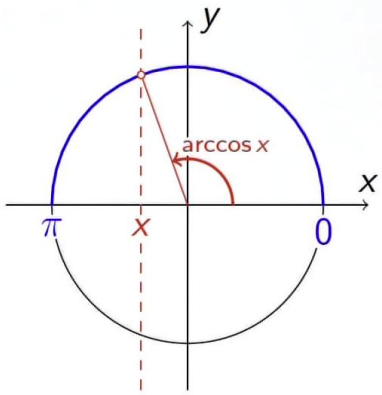
La fonction *arccosinus* est la fonction

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos x$$

qui à toute valeur $x \in [-1,1]$ donnée,

fait correspondre l'unique angle $\alpha \in [0,\pi]$

tel que $\cos\alpha = x$.



Pour x égal à 1, on a la situation que voici sur le cercle trigonométrique : là on a qu'un seul point qui peut avoir une abscisse de 1 -il est ici- l'angle correspondant vaut zéro et je peux rajouter des multiples de π donc j'ai k x 2π comme ensemble solution dans ce cas-là. Finalement, si x est encore plus grand que 1, alors il n'y a plus de solutions possibles parce que dans ce cas-là, aucun point sur le cercle trigonométrique n'a une abscisse de 1,2 dans la figure. L'ensemble de solution est donc vide. Définissions de façon plus précise ce que l'on entend par la fonction arccosinus; alors, la fonction arccosinus accepte un nombre entre -1 et 1, c'est un cosinus pris par un angle. Il nous rend un angle sur le demi-cercle supérieur, avec un angle entre 0 et π qui va rendre une valeur entre 0 et π, donc le x donné est transformé en un arccosinus entre 0 et π, et nous allons dire que c'est l'unique angle entre 0 et π dont le cosinus vaut x.

Notes

Summary

34m 06s

Remarques

Conséquence de la définition :

et

$$\cos(\arccos x) = x, \qquad \forall\, x \in [-1, 1]$$

$$\arccos(\cos \alpha) = \alpha, \qquad \forall\, \alpha \in [0, \pi].$$

Nous appelons un angle α un bon angle pour le *cosinus* si $\alpha \in [0, \pi]$.

Nous pouvons faire des remarques similaires à celles que nous avons fait pour le sinus : si je regarde ici la première identité, si je prends une valeur de x entre -1 et 1, si je prends l'arccosinus, j'obtiens un angle entre 0 et π, j'obtiens un angle au cosinus Ox précisément, donc par définition, j'ai cette première identité, de nouveau elle est sans problème parce qu'ici arccosinus n'accepte pas d'autres valeurs que -1,1. La deuxième ligne est un peu plus problématique parce qu'à priori, dans arccos(cos α), je pourrais choisir un α réel quelconque, mais je n'obtiens pas forcement de nouveau α; pour obtenir de nouveau α, il faut être à un angle situé entre 0 et π. Dans ce cas-là il est clair, je prends le cosinus et arccos me rend un angle entre 0 et π, dont le cosinus est justement donné par cette valeur cos(α), donc ça va être α de façon unique. On va changer un peu de langage pour le cosinus, on va dire qu'un angle est bon pour le cosinus s'il est entre 0 et π. Un angle est bon pour le sinus, pour le cosinus mais on a pas une notion identique pour les deux fonctions trigonométriques. "Bon" pour cosinus signifie que l'angle est entre 0 et π.

Notes

Summary

35m 17s

Remarques

Conséquence de la définition :

$$\cos(\arccos x) = x, \qquad \forall\, x \in [-1, 1]$$

et

$$\arccos(\cos \alpha) = \alpha, \qquad \forall\, \alpha \in [0, \pi].$$

Nous appelons un angle α un bon angle pour le *cosinus* si $\alpha \in [0, \pi]$.

Les bons angles pour le *cosinus* sont donc exactement les angles donnés par la fonction *arccosinus*.

La relation $\arccos(\cos \alpha) = \alpha$ est donc vraie si et seulement si α est un bon angle pour le *cosinus*.

Les bons angles pour le cosinus sont exactement les angles donnés par la fonction arccosinus; arccosinus rend toujours par définition un angle qui est bon pour le cosinus et s'il est bon pour le cosinus, on peut effectivement avoir cette deuxième identité, c'est-à-dire que l'on a toujours arccos de cos(α) = α pour tous les α qui sont un bon angle.

Notes

Summary

36m 38s

Equations trigonométriques simples

Ce que nous avons appris :

- la résolution des équations trigonométriques simples en sinus et en cosinus ;
- la définition des fonctions *arcsinus* et *arccosinus*.

Prochaine étape :

- le graphe des fonctions *arcsinus* et *arccosinus*.

Résumons ce que nous avons appris : on a appris à résoudre ce que l'on appelle les équations trigonométriques simples en sinus et cosinus; nous avons vu qu'en fait leur ensemble de solutions n'est pas très simple, c'est l'équation qui est simple. Nous avons formulé pour le sinus et le cosinus séparément une proposition qui donne les réponses en fonction de la valeur que nous avions sur le membre de droite; ensuite, nous avons défini de façon précise deux fonctions, un arcsinus et un arccosinus, ce qu'il faut retenir c'est que l'arcsinus rend un angle qui est bon pour sinus, donc entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, et arccosinus rend un angle qui est bon pour le cosinus, c'est-à-dire entre 0 et π. Dans la prochaine étape, nous allons nous intéresser au graphe des fonctions arcsinus et arccosinus. A la prochaine, merci.

Notes

Summary

37m 00s