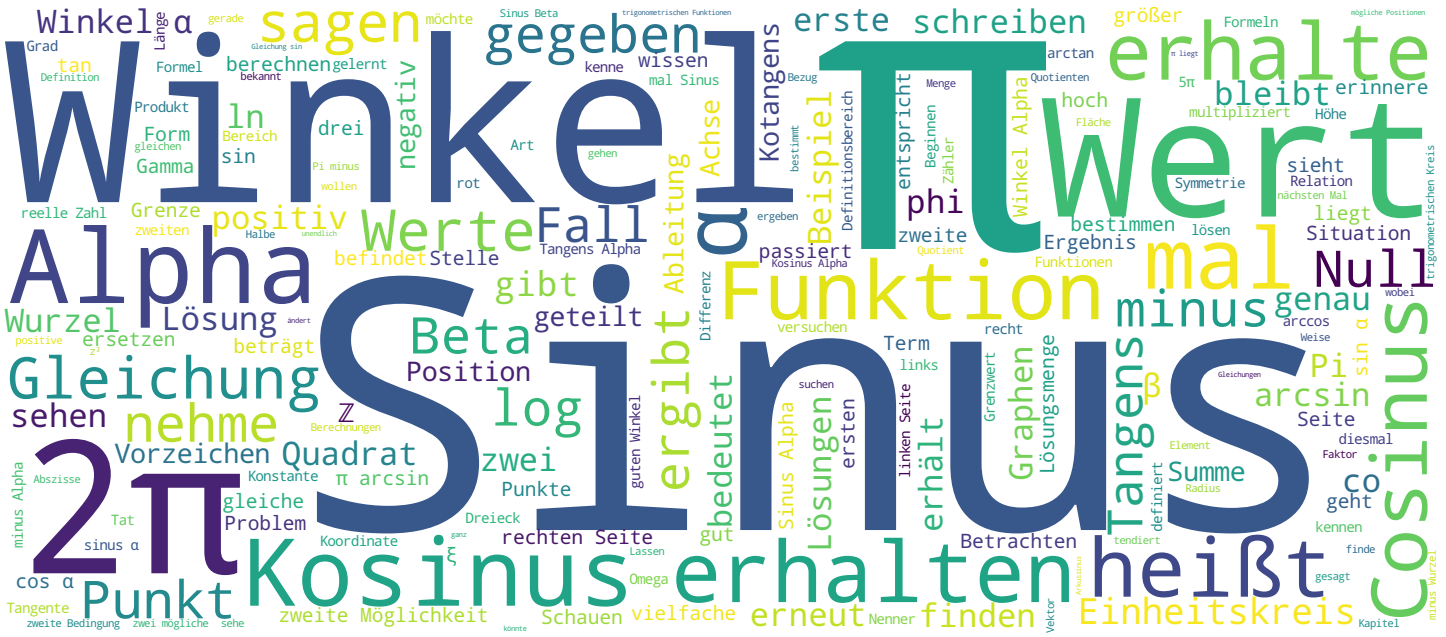
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus et leurs inverses

## 2.4 Equations trigonométriques simples en sinus et en cosinus

**Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles**

Prof Hans-Jörg Ruppen




EPFL

# L'équation $\sin\alpha = y$

On considère l'équation

$$\sin\alpha = y\,,$$

où $y \in \mathbb{R}$ est une valeur donnée et où $\alpha \in \mathbb{R}$ est la grandeur recherchée.



Guten Tag. Beim letzten Mal habe ich die trigonometrischen Funktionen von Sinus und Cosinus im Rahmen von Berechnungen um ein rechtwinkliges Dreieck angewandt. So konnten wir zum Beispiel den Sinus eines unbekannten Winkels bestimmen, und ich habe damals gesagt: "Wenn man den Sinus dieses Winkels kennt, kann man den Winkel erhalten, indem man schlicht auf einem Taschenrechner "arcsinus" von diesem Wert nimmt. Heute möchte ich dieses Problem behandeln: Wie kann ich von dem gegebenen Sinus-Wert den entsprechenden Winkel erhalten, oder vielmehr die entsprechenden Winkel, wie wir sie sehen. Betrachten wir zu Beginn also die Sinus-Gleichung α = y. Wenn wir uns hier eine solche Gleichung anschauen, werden wir sagen, dass y ein gegebener Wert ist, und wir suchen die reelle Zahl α, wobei die Sinus von α y ergibt.

Notes

Summary

0m 04s

# L'équation $\sin\alpha = y$

On considère l'équation

$$\sin\alpha = y\,,$$

où $y \in \mathbb{R}$ est une valeur donnée et où $\alpha \in \mathbb{R}$ est la grandeur recherchée.

On peut donc formuler notre problème sous la forme suivante :

| | |
|---|---|
| Donné : | $y \in \mathbb{R}$ |
| Recherché : | toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $\sin\alpha = y$. |



Genauer suchen wir für das gegebene y hier rechts alle Werte für α, so dass sinus(α) y ergibt. Nicht nur einen möglichen Wert, sondern wir möchten alle möglichen Werte von α herausfinden.

Notes

Summary

1m 05s

# Résolution de l'équation $\sin\alpha = y$

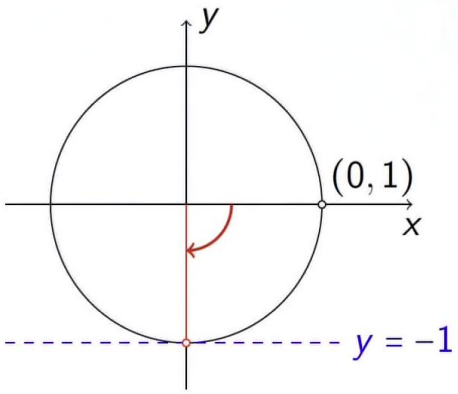
## Proposition

- *Si* $y = -1$,

  *alors toutes les solutions sont données par*

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + k\,2\pi\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

$$\mathbb{S} = \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\,2\pi : \; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Im Moment können wir den folgenden Lösungsvorschlag formulieren bezüglich der Gleichung sinus(α) = eine gegebene Konstante y. Beginnen wir damit, den Fall zu betrachten, wo y kleiner als -1 ist. Schauen wir uns die Situation auf dem Einheitskreis an: Auf diesem Kreis mit Radius 1 in einem Achsensystem x-y, und ich erinnere Sie daran, dass der Sinus von α durch eine Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis gegeben ist. Wenn ich also für Sinus α einen Wert y gebe, der kleiner als -1 ist, irgendwo auf dieser gestrichelten Gerade, sehe ich sofort, dass ich keinen Punkt auf dem Einheitskreis finden werde, der als Koordinate diesen Wert y haben wird, der weniger als -1 beträgt. Hier habe ich keine Lösung, keine reelle Zahl α, deren Sinus α kleiner als -1 ist. Schauen wir uns an, was passiert, wenn wir diesen Wert y erhöhen, indem wir für y den Wert -1 nehmen - immer noch auf dem Einheitskreis - den Wert -1. Ich sehe sofort, dass dieser Wert auf einem einzigen Punkt auf dem Einheitskreis liegt; ich kann sogar einen entsprechenden Winkel wiederfinden, er ist hier in rot eingezeichnet: Es ist der Winkel -π/2. Wir wissen, dass wir, sobald unsere Positionen einem gegebenen Sinus-Wert entsprechen, wir diesen Winkel um ein vielfaches Ganzes von 2π ändern können.

Notes

Summary

1m 21s

# Résolution de l'équation $\sin\alpha = y$

## Proposition

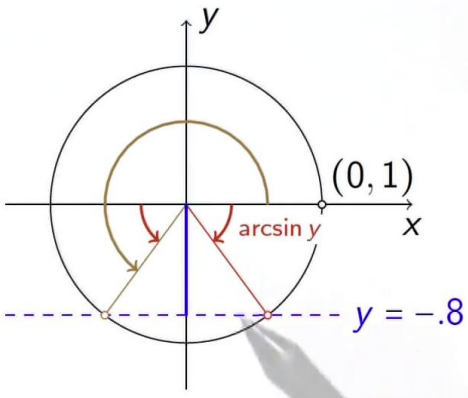
- *Si* $-1 < y < 1$,

  *alors toutes les solutions sont données par*

$$\alpha = \arcsin(y) + k\,2\pi$$

*et* $$\alpha = \pi - \arcsin(y) + k\,2\pi\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

*où* $\arcsin(y)$ *est l'unique angle compris entre* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$ *dont le sinus vaut* $y$.




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

In der Tat sind die möglichen Winkel durch -π/2 + k x 2π gegeben, mit k, einer ganzen Zahl, die positiv oder negativ sein kann. Wir können schreiben, dass die gesamte Lösung der Gleichung sinus(α) = y durch {-π/2 + k x 2 π} gegeben ist, wobei k ein Ganzes ist. Schauen wir uns nun die Gleichung sinus(α) = y, mit dem gegebenen y an, wobei y zwischen -1 und 1 liegt. Kehren wir zum Einheitskreis zurück. Auf der Höhe eines y zwischen -1 und 1 liegt er hier bei -0,8. Man sieht sofort zwei mögliche Positionen auftauchen für den entsprechenden Punkt Bα. Wir werden eine dieser Lösungen - und ich werde dies gleich näher erläutern - den hier gezeichneten Winkel, arcsin(y), nennen: Eine der Möglichkeiten ist immer durch arcsin(y) gegeben. Natürlich, wenn ich einmal einen Winkel habe, welcher dieser Position hier rechts entspricht, kann ich diesen Winkel ändern, um ein Ganzes, um ein vielfaches Ganzes von 2π, und sagen, dass ich arcsin(y) + k x 2π habe. Dies gibt mir alle Lösungen, die dieser Position hier rechts entsprechen. Um die Position auf der linken Seite zu erhalten, muss man die Symmetrie um den Einheitskreis verwenden. Man muss versuchen, diesen Winkel wiederzufinden, der hier in braun dargestellt ist, was nicht allzu schwer ist.

Notes

Summary

2m 53s

# Résolution de l'équation $\sin\alpha = y$

## Proposition

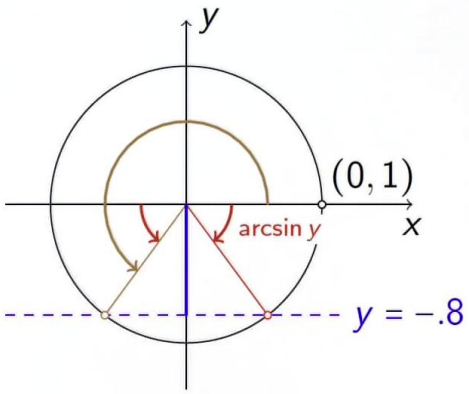
- *Si* $-1 < y < 1$,

  *alors toutes les solutions sont données par*

  $$\alpha = \arcsin(y) + k\,2\pi$$

  *et* $$\alpha = \pi - \arcsin(y) + k\,2\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

*où* $\arcsin(y)$ *est l'unique angle compris entre* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$ *dont le sinus vaut* $y$.






Ich beginne damit, π zu nehmen, und hier muss man erhöhen; arcsin ist ein negativer Winkel, wenn ich also die Größe arcsin subtrahiere, erhalte ich genau den Winkel in braun, also wird die zweite Möglichkeit π - arcsin(y) sein, und ich kann erneut für diese Position links den Winkel um ein vielfaches Ganzes von 2π ändern, mit + k x 2π et (k ∈ ℤ). Präzisieren wir noch die Bedeutung von arcsin(y): Wir hier im Kasten ist arcsin(y) der einzige Winkel im Sinus zwischen -π/2 und π/2, der y ergibt. Wir werden, wenn wir über die Gleichung sin(α) = y sprechen, für arcsin(y) eine Position nehmen, die sich auf dem Halbkreis rechts befindet, und wir werden als möglichen Winkel einen Winkel zwischen -π/2 und π/2 nehmen. Einen solchen Winkel gibt es nur ein Mal, also ist arcsin(y auf einzigartige Weise bestimmt durch diesen Kasten, hier in gelb.

Notes

Summary

4m 31s

# Résolution de l'équation $\sin\alpha = y$

## Proposition

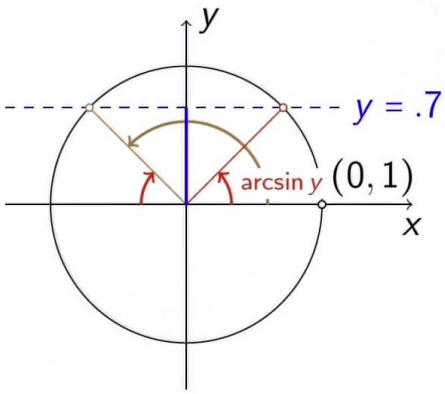
- *Si* $-1 < y < 1$,

  *alors toutes les solutions sont données par*

$$\alpha = \arcsin(y) + k\,2\pi$$

*et* $$\alpha = \pi - \arcsin(y) + k\,2\pi\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

$$\mathbb{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \arcsin(y) + k\,2\pi\,,\ \pi - \arcsin(y) + k\,2\pi \right\}.$$




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir können also festhalten, dass die Menge aller Lösungen unserer Gleichung sin(α) = y mit y zwischen -1 und 1 also einerseits arcsin(y) + k x 2π ist, und andererseits π - arcsin(y) + k x 2π, und wir nehmen alle Fälle in ℤ. Merken Sie sich, dass dieses Ergebnis gültig bleibt, wenn ich einen Wert von y, immer noch zwischen -1 und 1, aber diesmal positiv, nehme, wie zum Beispiel 0,7, wo ich als ersten Winkel rechts arcsin(y zwischen -π/2 und π/2 wiederfinde, und für den Winkel in braun ziehe ich von diesem π arcsin(y) ab. Für diese beiden Werte, die als Grundlage dienen können, arcsin(y) und π - arcsin(y), kann ich jeden dieser Winkel ändern, und zwar um ein vielfaches Ganzes von 2π.

Notes

Summary

5m 49s

# Résolution de l'équation $\sin\alpha = y$

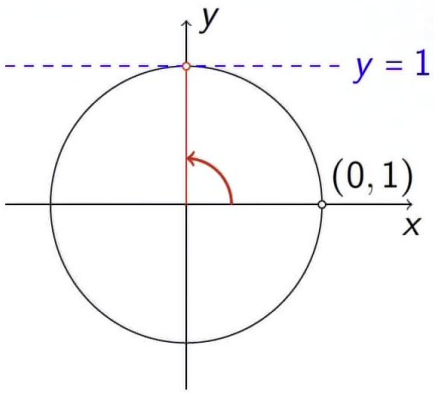
## Proposition

- *Si* $y = 1$,

  *alors toutes les solutions sont données par*

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\,2\pi\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

$$\mathbb{S} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\,2\pi : \; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$






Schauen wir nun, was passiert, wenn y 1 ist: Hier habe ich sin(α) = 1. In diesem Fall habe ich nur eine einzige Position - hier in rot dargestellt - für den Punkt auf dem Einheitskreis, es ist der einzige Punkt, dessen Koordinate 1 ist. Der entsprechende Winkel ist π/2 + ein Vielfaches von π. Die Menge der Lösungen ist hier durch {π/2 + k x 2π} gegeben mit (k ∈ ℤ).

Notes

Summary

6m 43s

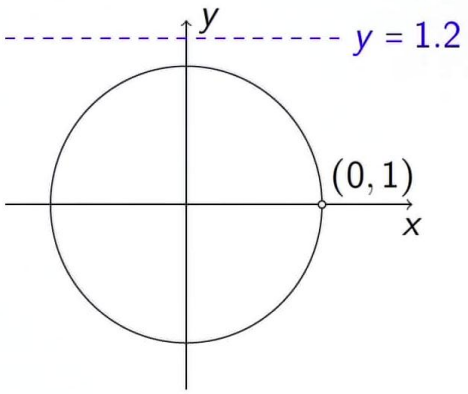
# Résolution de l'équation $\sin\alpha = y$

## Proposition

- *Si* $y > 1$,

  *alors il n'existe aucun angle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *qui soit solution de cette équation,*

$$\mathbb{S} = \varnothing .$$






Schauen wir uns schließlich an, was passiert, wenn in dieser Gleichung sin(α) = y y größer als 1 ist. Dies ist hier der Fall. Ich finde keinen Punkt mehr, deren Koordinate auf dieser gestrichelten blauen Gerade sein wird, also ist die Menge der Lösungen in diesem Fall hier leer.

Notes

Summary

7m 14s

# Définition : fonction arcsinus

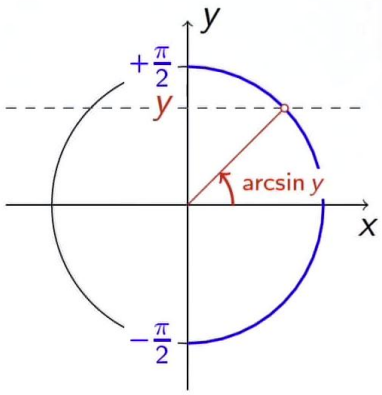
La fonction *arcsinus* est la fonction

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad y \mapsto \arcsin y$$

qui à toute valeur $y \in [-1,1]$ donnée,

fait correspondre l'unique angle $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

tel que $\sin \alpha = y$ .






Geben wir nun eine genaue Definition dessen, was man unter "arcsinus" versteht. Arcsinus ist in Wirklichkeit eine Funktion; es ist eine Funktion, welche die Werte zwischen -1 und 1 akzeptiert. Es sind Werte von y, es sind Koordinaten, die sich aus einem Punkt auf dem Einheitskreis ergeben, und der Arcsinus gibt uns einen Winkel auf der rechten Seite des Einheitskreises, einen Winkel zwischen -π/2 und π/2. Jedem gegebenen Wert y weist man einen Wert zwischen -π/2 und π/2 zu; ist y einmal definiert, wählt man den Einheitswinkel - der hier auf diesem blauen Teil ist - um einen Punkt zu erhalten, der auf der gewünschten Höhe y liegt. Der Sinus von α muss also y ergeben und α muss zwischen -π/2 und π/2 enthalten sein.

Notes

Summary

7m 33s

# Remarques

Conséquence de la définition :

$$\sin(\arcsin y) = y, \qquad \forall\, y \in [-1, 1]$$

et

$$\arcsin(\sin \alpha) = \alpha, \qquad \forall\, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Nous appelons un angle $\alpha$ un bon angle pour le *sinus* si $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Les bons angles pour le *sinus* sont donc exactement les angles donnés par la fonction *arcsinus*.

La relation $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$ est donc vraie si et seulement si $\alpha$ est un bon angle pour le *sinus*.



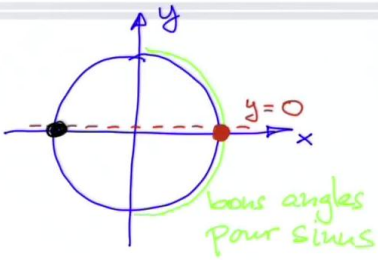
Wenn man ein wenig betrachtet, was dies per definitionem impliziert, wenn ich einen Wert von y zwischen -1 und 1 nehme, wenn ich arcsinus berechne, erhalte ich einen Winkel, dessen Sinus exakt y ergibt. Es ergibt sich also eine Gleichheit für alle y zwischen -1 und 1, was nicht allzu problematisch ist, denn wenn ich einen anderen Wert wähle, wird arcsin(y) nicht bestimmt sein. Man kann sich also nicht wirklich in Bezug auf diese Gleichheit irren. Die zweite Etappe ist ein bisschen schwieriger. Ich nehme einen Winkel α: Wenn ich den Sinus berechne, und anschließend Arcsinus, erhalte ich keineswegs automatisch α. Dies geschieht nur, wenn α definitiv in dem Wertbereich liegt, den wir für Arcsinus genommen haben, also zwischen -π/2 und π/2. In diesem Fall ist klar, dass ich, wenn ich einen Winkel nehme, und dann seinen Sinus und Arcsinus, erneut α erhalte, doch nicht für die anderen Werte von α. Wir können sagen, dass ein Winkel α passend für den Sinus ist, wenn er genau in diesem Bereich [-π/2; π/2] liegt. Die richtigen -Winkel sind genau die, welche durch die Funktion Arcsinus wiedergegeben werden, und die richtigen Winkel sind genau jene, für welche diese zweite Gleichheit arcsin(sinα) = α korrekt ist.

Notes

Summary

8m 28s

# Exemple 1




## Exemple

Résolution de l'équation $\sin\alpha = 0$.

$$S = \{\underbrace{\arcsin 0}_{=0} + k2\pi\} \cup \{\pi - \arcsin 0 + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$S = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k2\pi,\ \pi + k2\pi\}$$

$$S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$



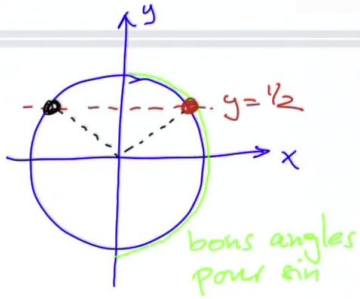
Lösen wir nun die Gleichung sin(α) = 0. Wir werden uns ansehen, was auf dem Einheitskreis passiert. Zeichnen wir. Wo werde ich für einen Sinus die richtigen Winkel finden? Sie sind hier. Das sind die guten Winkel für Sinus. Welcher ist der Wert, der von sin(α) eingenommen wird? Es ist 0, es ist ein Wert y. Tragen wir diesen Wert ein; wir erhalten also zwei mögliche Positionen: die eine ist hier, [roter Punkt] die andere ist hier. [schwarzer Punkt] Wir können schreiben, dass die Lösungsmenge durch den roten Punkt hier gegeben ist, der {arcsin(0) + k x 2π} entspricht, oder durch den in schwarz, {π - arcsin(0) + k x 2π}, mit jedes Mal (k ∈ ℤ). Der arcsin(0), wie man auf dem Einheitskreis sieht, ergibt null, also erhalte ich die Lösungsmenge, die mit {k x 2π avec (k ∈ ℤ)} gegeben ist und π - arcsin(0), der 0 ergibt, was uns auf das Ergebnis {π + k x 2π avec (k ∈ ℤ)} bringt. Man kann dieses Ergebnis auch in folgender Weise schreiben: [{k x 2π, π + k x 2π}] und diese beiden Lösungen für alle (k ∈ ℤ) nehmen. Ich denke jedoch, dass die einfachste Formulierung des Ergebnisses darin bestehen wird zu sagen - und man erkennt es auf dem Einheitskreis - dass diese beiden Positionen einfach durch {k x π} mit (k ∈ ℤ) gegeben sind. Hier ist die Lösung dieses Problems.

Notes

Summary

9m 57s

# Exemple 2




$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

## Exemple

Résolution de l'équation $2\sin(3\alpha - 1) = 1$.

On obtient :

$\sin(3\alpha - 1) = 1/2$

$\beta$



Betrachten wir als zweites Beispiel das Problem der Lösung der Gleichung 2 x sin(3α - 1) = 1. Dies bedeutet, dass der Sinus von (3α - 1) gleich 1/2 ist. Wenn man will, kann man diesen Winkel β nennen; wir werden zuerst versuchen, β zu finden, und anschließend werden wir davon α abziehen. Wir müssen auf den Einheitskreis zurückkommen. Hier ist der Einheitskreis und die Achse x-y. Der Sinus von β, wenn man so will, beträgt ein Halbes. Ich stelle mich hier auf der Höhe von 1/2; [Der grüne Kreisbogen stellt die guten Winkel für Sinus dar] die guten Winkel für Sinus befinden sich zwischen -π/2 und π/2. Ich sehe sofort die beiden möglichen Positionen erscheinen: Die eine befindet sich hier, [roter Punkt] die andere befindet sich hier. [schwarzer Punkt] Vielleicht müssen Sie sich in Erinnerung rufen, dass wir einen Winkel zwischen -π/2 et π/2 kennen, dessen Sinus 1/2 ist, so dass der arcsin(1/2) - der Winkel zwischen -π/2 et π/2, dessen Sinus 1/2 ist - durch π/6 gegeben ist. Dies wissen wir aufgrund der Werte, die es wert sind, behalten zu werden, um den Sinus, Werte, die wirklich "bemerkenswert" sind. Was erhalte ich? Für 3α - 1 erhalte ich zuerst π/6, das ist arcsin(1/2), sowie ein multiples Ganzes von 2π.

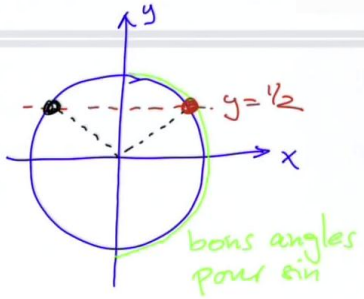
Notes

Summary

12m 48s

# Exemple 2

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$




## Exemple

Résolution de l'équation $2\sin(3\alpha - 1) = 1$.

$\sin(3\alpha-1) = \frac{1}{2}$

$\beta$

On obtient :

$3\alpha - 1 = \frac{\pi}{6} + k2\pi$

et $3\alpha - 1 = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$= \frac{5\pi}{6} + k2\pi$



Die andere Lösung ist gegeben durch - man sieht es auf der Zeichnung - π - arcsin(1/2), also {π - π/6 + k x 2π}, das heißt, dass man hier 5π/6 + k x 2π erhält, immer noch mit (k ∈ ℤ). Was also gefragt ist, ist es, die Werte von α zu finden, nicht von 3α - 1, also werden wir jetzt jede dieser Gleichungen in Bezug auf α getrennt lösen.

Notes

Summary

14m 58s

# Exemple 2 (suite)

Mais

$3\alpha - 1 = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ et $3\alpha - 1 = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

$3\alpha = \frac{\pi}{6} + 1 + k2\pi$ ⋮

$\alpha = \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$ $\alpha = \frac{5\pi}{18} + \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3}$

$(k \in \mathbb{Z})$

$$S = \left\{\frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{18} + \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$



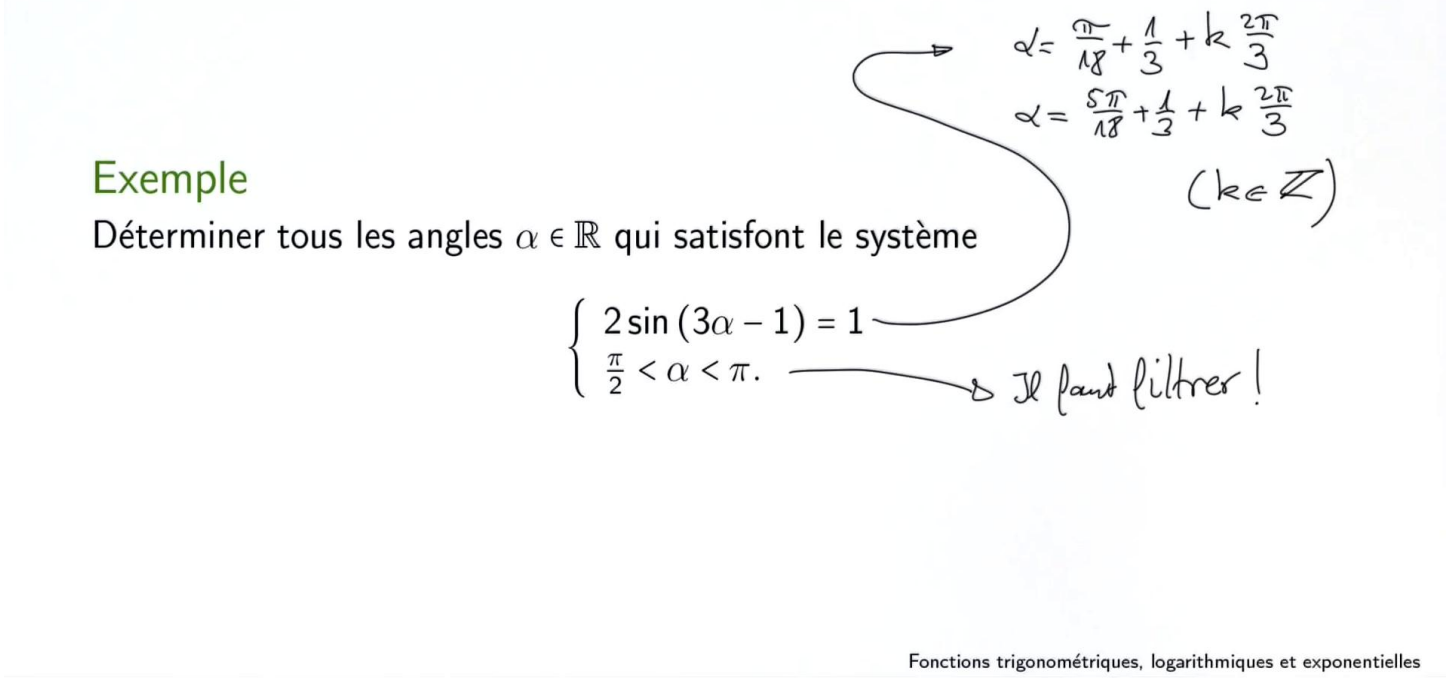
Beginnen wir mit der ersten Möglichkeit: Wir können diese Gleichung leicht lösen in Bezug auf α; Hier habe ich einfach die Konstante 1 von links nach rechts verschoben und ich kann diese Gleichung mit einem Drittel multiplizieren, so dass ich α erhalte. Ich erhalte also für α π/18 + 1/3 + k x 2π/3. Wir haben eine zweite Möglichkeit. Untersuchen wir diese: 3α - 1 = 5π/6 + k x 2π. Auf analoge Weise werden wir α = 5π/18 + 1/3 + k x 2π/3 herausfinden; wir werden diese 5π/6 geteilt durch 3 erhalten, das -1 wird zu 1/3 und die k x 2π werden k x 2π/3. Für diese beiden Berechnungen haben wir immer (k ∈ ℤ). Wir können nun die beiden Möglichkeiten in einer Antwort zusammenfassen, die wir gefunden haben. Wir erhalten für die Lösungsmenge zuerst auf der linken Weite {π/18 + 1/3 + k x 2π/3} mit (k ∈ ℤ), und für die zweite Möglichkeit und die auf der rechten Seite {5π/18 + 1/3 + k x 2π/3} et (k ∈ ℤ).

Notes

Summary

15m 42s

# Exemple 3






Hier ist die Lösungsmenge für unser Problem Hier ist noch ein Beispiel, wo wir alle Winkel bestimmen möchten, die dieses Mal ein System erfüllen. Wir haben zuerst eine Gleichung, und wenn Sie gut hinschauen, handelt es sich um die Gleichung von Beispiel 2; hier kenne ich alle Werte von α. Zusätzlich geben wir eine zweite Bedingung: Wir möchten gerne α zwischen π/2 und π erhalten. Für die erste Gleichung haben wir zwei Möglichkeiten gefunden: Hier ist die erste, die π/18 + 1/3 + k x 2π/3 war, und wir hatten eine zweite Möglichkeit in Form von 5π/18 + 1/3 + k x 2π/3, mit (k ∈ ℤ). Für die zweite Gleichung oder die zweite Bedingung, woraus sich keine Gleichung ergibt, sagen wir, dass α zwischen π/2 und π enthalten sein muss. Dies bedeutet, dass wir "filtern" müssen, dass wir also unter den sich bietenden Möglichkeiten durch die erste Gleichung jene finden müssen, welche die zweite Bedingung erfüllen.

Notes

Summary

17m 44s

# Exemple 3 (suite)

1er cas : $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3} < \pi$

$\frac{4\pi - 3}{9} < k\frac{2\pi}{3} < \frac{17\pi - 6}{18}$

$\underbrace{\frac{2}{3} - \frac{1}{2\pi}}_{\approx 0.51} < k < \underbrace{\frac{17}{12} - \frac{1}{2\pi}}_{\approx 1.26}$ , $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 1$



Wir werden in zwei Etappen vorgehen. Im ersten Schritt werden wir einfach die erste der Möglichkeiten ermitteln. Erster Fall: π/2 ist kleiner als mein α, das hier durch π/18 + 1/3 + k x 2π/3 gegeben ist, und dieser Winkel α muss kleiner als π sein. Wir werden nun diese Gleichung in Bezug auf k lösen; ich erinnere Sie daran, dass k ein Ganzes ist. Wir werden k x 2π/3 isolieren, was zu den folgenden Ungleichheiten führt: [(4π -3)/9 < k x 2π/3 < (17π - 6)/18] Ich habe einfach alle Elemente addiert das -π/18 - 1/3; jetzt müssen wir k isolieren, also werde ich jeden Term mal 3/2π multiplizieren, einer positiven Zahl, welche die Reihenfolge der Ungleichheitsmerkmale nicht ändert. Nach der Multiplikation bleibt mir noch 2/3 - 1/2π < k < 17/12 - 1/2π. Ich erinnere daran, dass k ein Ganzes ist. Hier müssen wir versuchen, uns bei der Berechnung den Grenzen links und rechts anzunähern; wir können dies gedanklich ausrechnen, indem wir π durch 3, 3,1 oder 3,14 ersetzen, oder wir können auch einen Taschenrechner zu Hilfe nehmen. Hier auf der linken Seite haben wir ungefähr 0,51 und auf der rechten Seite etwa 1,26. Das einzige k, das zwischen 0,51 et 1,26 liegt, ist also k = 1. Die einzige Möglichkeit ist somit k = 1 für den ersten Winkel.

Notes

Summary

19m 08s

# Exemple 3 (suite et fin)

Second cas $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{18} + \frac{1}{3} + k\cdot\frac{2\pi}{3} < \pi$

$\underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi}}_{\approx 0.17} < k < \underbrace{\frac{13}{12} - \frac{1}{2\pi}}_{\approx 0.92}$ , $k \in \mathbb{Z}$

aucun k !

Donc $S = \left\{ \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3} \;\middle|\; k = 1 \right\}$

c.à.d. $S = \left\{ \frac{13\pi + 6}{13} \right\}$



Betrachten wir nun die zweite Möglichkeit. Wir haben die Grenze, die kleiner als π/2 ist, wir haben den gegebenen Winkel α durch 5π/18 + 1/3 + k x 2π/3, und dieser Winkel muss kleiner als π bleiben. Eine ähnliche Berechnung wie die vorige, die es ermöglicht, den Wert von k zu berechnen, ermöglicht es, 1/3 - 1/2π < k < 13/12 - 1/2π zu schreiben. Erneut erhalten wir auf der linken Seite ungefähr 0,17 und auf der rechten etwa 0,92 wenn wir uns also erinnern, dass k ein Ganzes sein muss, erhalten wir jedes k, das möglich ist. Es bleibt mir nur eine einzige Möglichkeit, und ich kann schreiben, dass die Lösungsmenge durch... gegeben ist. Ich nehme den Winkel, welcher der erste seiner Art war, hier π/18 + 1/3 + k x 2π/3, und wir haben gesagt, dass die einzige Möglichkeit k = 1 war, und für die Winkel der zweiten Art, die wir hier berechnet haben, gibt es kein mögliches k, also haben wir hier alle Lösungen; wir können also k durch 1 ersetzen und die einzige Lösung S erhalten, die durch {(13π + 6)/13} gegeben ist, und dies ist die Lösung des Problems.

Notes

Summary

21m 34s

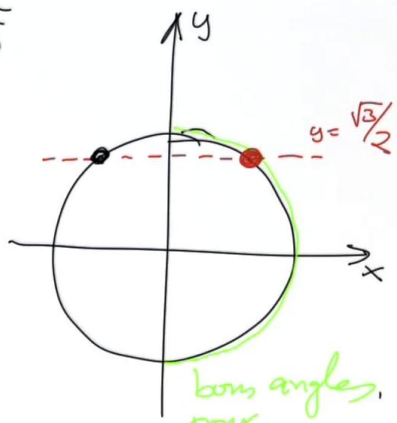
# Exemple 4

## Exemple

Déterminer tous les angles $\alpha \in \mathbb{R}$ qui satisfont le système

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 3\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$




$\beta = \frac{\alpha}{2} - 3$. La première équation s'écrit : $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\beta = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + k2\pi = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

et $\beta = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + k2\pi = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$



Schauen wir und noch ein viertes Beispiel an, der ähnlicher Art ist: Wir wollen alle Winkel α in ℝ bestimmen, die das System erfüllen werden, das erste System besagt, dass der Sinus von (α/2 - 3) Wurzel von 3/2 sein muss, und wir haben eine Einschränkung in Form einer Ungleichheit als zweite Bedingung. Wir werden auf die folgende Weise vorgehen: Wir werden zuerst β festlegen, dann nehmen wir den Winkel α/2-3 nehmen, der uns die Aufgabe zu Beginn erleichtern wird. Die erste Gleichung schreibt sich so, dass der Sinus von β durch √3/2 auf dem Einheitskreis gegeben ist. Auf diesem Einheitskreis habe ich hier die guten Winkel [Kreisbogen in grün] für den Sinus, der √3/2 ist, wir finden zwei mögliche Positionen wieder und wir können arcsin(√3/2) erinnern, durch den wir einen Winkel zwischen -π/2 und π/2 kennen, dessen Sinus √3/2 beträgt; es ist ein bemerkenswerter Winkel, er beträgt π/3. Ich werde schreiben können, dass ich für β zwei Möglichkeiten habe: β ist durch arcsin(√3/2) + k x 2π gegeben, dass heißt durch π/3 + k x 2π, und ich habe eine zweite Möglichkeit, dieses Mal mit π - arcsin(√3/2) + k x 2π, so dass ich hier das π - π/3 erhalte, also 2π/3 + k x 2π, et (k ∈ ℤ).

Notes

Summary

23m 40s

# Exemple 4 (suite)

- Pour $\beta = \frac{\pi}{3} + k2\pi$, cela donne

$$\frac{\alpha}{2} = 3 + \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{, c.à d. } \alpha = 6 + \frac{2\pi}{3} + k \cdot 4\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Pour $\beta = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$, cela donne

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{2\pi}{3} + 3 + k2\pi \text{, c.à d. } \alpha = 6 + \frac{4\pi}{3} + k \cdot 4\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



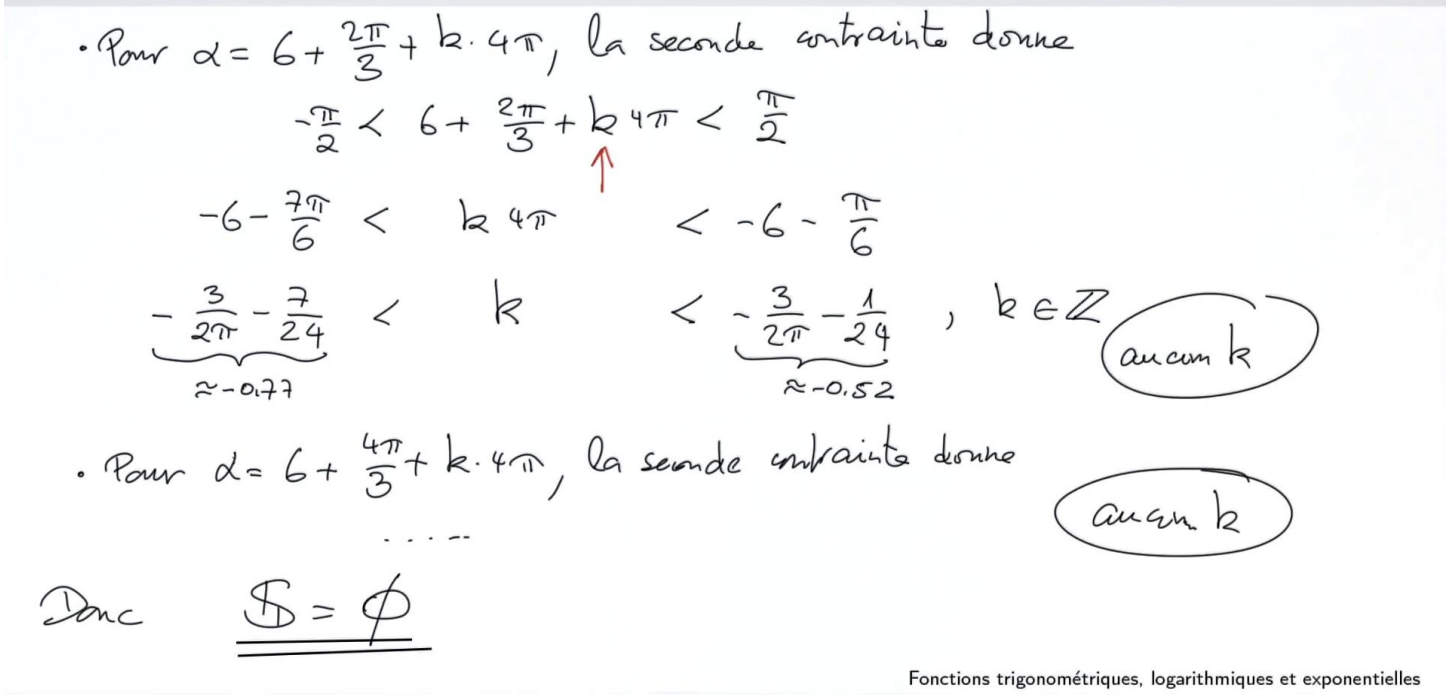
Wie vorhin werden wir diese beiden Fälle getrennt behandeln: Beginnen wir mit β = π/3 + k x 2π; ich weiß, dass β durch α/2 - 3 gegeben ist, also kann ich α/2 berechnen, indem ich einfach 3 hinzufüge, und indem ich das Doppelte dieses Winkels nehme. Ich werde α erhalten, also α = 6 + 2π/3 + k x 4π mit (k ∈ℤ). Für die zweite Möglichkeit gehe ich auf dieselbe Weise vor: Hier haben wir nicht π/3, sondern 2π/3, wir berechnen - 2π/3, also 2π/3 + k x 2π und wir gehen genau auf dieselbe Weise vor, indem wir damit beginnen, 3 hinzuzufügen, und dann ein Doppeltes nehmen. Man erhält α = 6 + 4π/3 + k x 4π mit (k ∈ ℤ). Hier ist das Resultat, dass ich aus der ersten Bedingung erhalte, aus derselben Gleichung, doch wir haben noch eine zweite Bedingung, das heißt, wir möchten gerne Winkel α erhalten, die sich zwischen -π/2 und π/2 befinden. Wir werden nun erneut in jedem der Fälle analysieren, wie man die Winkel -π/2 et π/2 hier und dort erhält, die zwischen -π/2 und π/2 liegen.

Notes

Summary

26m 06s

# Exemple 4 (suite et fin)






Für die erste Möglichkeit, wo α = 6 + 2π/3 + k x 4π gegeben ist, ergibt die zweite Einschränkung, wenn man sich zwischen -π/2 und π/2 bewegt: [-π/2 < 6 + 2π/3 + k x 4π < π/2] Erneut werden wir k isolieren, also verschieben wir die 6 auf die andere Seite, das heißt, wir addieren -6, wir addieren -π/3 aus demselben Grund und wir erhalten: [- 6 -7π/6 < k x 4π < -6 -π/6] Es genügt weiterhin, jeden Term durch die positive Zahl 1/4π zu multiplizieren, um die Schätzungen für k zu erhalten. [-3/2π - 7/24 < k < -3/2π - 1/29] mit einem Ganzen k. Erneut nehmen wir einen Taschenrechner oder berechnen es im Kopf: Hier werden wir etwa -0,77 erhalten und auf der rechten Seite -0,52, also haben wir hier kein k. Wir haben noch eine zweite Möglichkeit und auch dort machen wir eine ähnliche Analyse der zweiten Einschränkung. Ich überlasse es Ihnen, diese Berechnungen durchzuführen; Sie werden ein Ergebnis erhalten, das vollkommen gleich ist, und erneut keinerlei k finden. Sie finden sich vor einer Situation von der Art wieder, mit der wir uns vorhin beschäftigt haben. Wenn ich zusammenfasse: Es gibt keine Lösung.

Notes

Summary

28m 00s

# L'équation $\cos\alpha = x$

On considère l'équation

$$\cos\alpha = x\,,$$

où $x \in \mathbb{R}$ est une valeur donnée et où $\alpha \in \mathbb{R}$ est la grandeur recherchée.

On peut donc formuler notre problème sous la forme suivante :

| | |
|---|---|
| Donné : | $x \in \mathbb{R}$ |
| Recherché : | toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $\cos\alpha = x$. |



Bis jetzt haben wir uns mit der Gleichung beschäftigt: sin(α) = ein gegebener Wert y. Betrachten wir, was man mit dem Cosinus auf ähnliche Weise machen kann; Ich nehme dieses Mal cos(α) = x. Wir nehmen an, dass x eine gegebene reelle Zahl ist, und α ist hier der gesuchte Wert. Genauer gesagt, gibt man x auf der rechten Seite vor und sucht alle Werte von α in ℝ, so dass der cos(α) = x. Man sucht hier wirklich alle Werte und nicht nur einen.

Notes

Summary

30m 20s

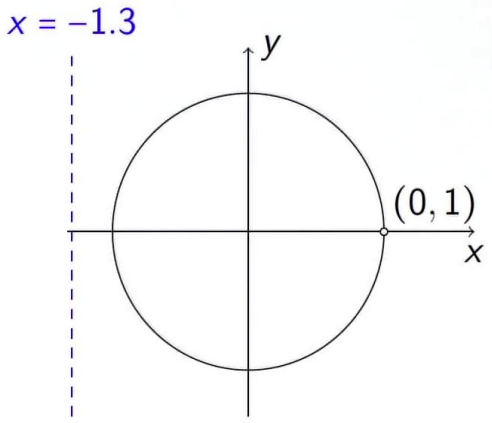
# Résolution de l'équation $\cos\alpha = x$

## Proposition

- *Si* $x < -1$ ,

  *alors il n'existe aucun angle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *qui soit solution de cette équation,*

  $$\mathbb{S} = \varnothing .$$




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir können hier ein vollkommen ähnliches Ergebnis formulieren, wie das, welches wir für den Sinus haben. Beginnen wir damit, uns anzuschauen, was passiert, wenn x < -1, wir müssen auf den Einheitskreis zurückkommen, den Kreis mit einem Radius von 1; wir wissen, dass wir immer einen Winkel mit einer Position suchen, wir suchen einen Winkel α mit einer Position Pα auf dem Einheitskreis; wir wissen, dass der Cosinus durch die Abszisse dieses Punktes gegeben ist, aber die Abszisse eines solchen Punktes kann nicht mehr als -1/2 wert sein, also haben wir hier zum Beispiel -1,3 genommen und man sieht sehr gut, dass man hier keinen Punkt auf dem Einheitskreis findet, also haben wir hier keinerlei Lösung für diese Gleichung.

Notes

Summary

30m 56s

# Résolution de l'équation $\cos\alpha = x$

## Proposition

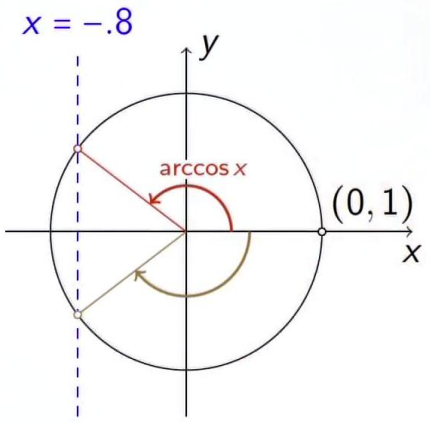
- *Si* $-1 < x < 1$,

  *alors toutes les solutions sont données par*

  $$\alpha = \arccos(x) + k\,2\pi$$

  *et* $$\alpha = -\arccos(x) + k\,2\pi\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

*où* $\arccos(x)$ *est l'unique angle compris entre* $0$ *et* $\pi$ *dont le cosinus vaut* $x$.




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Dies ändert sich, sobald x -1 beträgt. Dieses Mal ist cos(α) = -1. Auf dem Einheitskreis habe ich genau eine Position und in dieser Position kann man sagen, dass in jedem Fall einer der möglichen Winkel π sein wird; natürlich kann ich nochmals vielfache Ganze von 2π hinzufügen. Die Lösungsmenge ist schließlich gegeben durch - man kann π hervorheben, 1 + 2k x π - die verschiedenen ungeraden Funktionen von π, welche die Lösung sind. Was passiert jetzt, wenn x sich zwischen -1 und 1 befindet? Ich würde sagen, dass dies die interessanteste Situation ist: Wir haben hier den Einheitskreis, ich habe hier den Wert x bei -0,8, um sich dies besser vorzustellen, und man sieht, dass man nur zwei mögliche Positionen hat für den entsprechenden Punkt auf dem Einheitskreis. Wir können damit beginnen zu sagen, dass wir eine Möglichkeit haben auf dem oberen Halbkreis - dieser Winkel α ist hier in rot - und in diesem Fall werden wir den Arccosinus von x bestimmen, wir werden sagen, dass dies die Lösung ist, dass arccos(x) der einzige Winkel zwischen 0 und π ist; wir sind auf dem oberen Halbkreis mit den Winkeln zwischen 0 und π, und hier gibt es nur eine Möglichkeit, wir werden sie Arccosinus nennen und wir können natürlich Vielfache von π hinzufügen, zumal wir dann auf dieselbe Position auf dem Einheitskreis zurückfallen, so dass wir erneut einen selben Wert für den Cosinus haben.

Notes

Summary

31m 40s

# Résolution de l'équation $\cos\alpha = x$

## Proposition

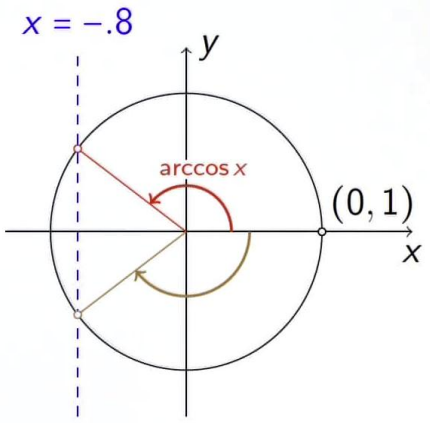
- *Si* $-1 < x < 1$,

  *alors toutes les solutions sont données par*

  $$\alpha = \arccos(x) + k\,2\pi$$

  *et* $$\alpha = -\arccos(x) + k\,2\pi\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

*où* $\arccos(x)$ *est l'unique angle compris entre* $0$ *et* $\pi$ *dont le cosinus vaut* $x$.






Die zweite Möglichkeit ist durch die Symmetrie auf dem Einheitskreis gegeben - der Winkel ist hier in braun eingezeichnet: Man sieht sofort, dass es genügt, - arccos(x) zu nehmen und dass die zweite Möglichkeit - arccos(x) + k x 2π ist.

Notes

Summary

33m 14s

# Résolution de l'équation $\cos\alpha = x$

## Proposition

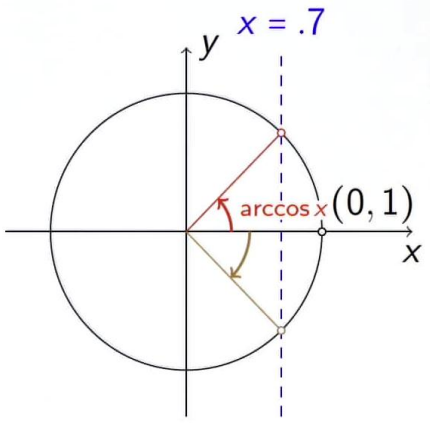
- *Si* $-1 < x < 1$,

  *alors toutes les solutions sont données par*

$$\alpha = \arccos(x) + k\,2\pi$$

*et* $$\alpha = -\arccos(x) + k\,2\pi\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

$$\mathbb{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\arccos(x) + k\,2\pi\,,\ -\arccos(x) + k\,2\pi\right\}.$$




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir können also eine Antwort in der Lösungsmenge formulieren: Wir nehmen arccos(x) und -arccos(x) + k x 2π in diesen beiden Fällen für alle ganzen k. Diese Sichtweise behält ihre Gültigkeit für ein positives x, so lange es zwischen -1 und 1 liegt - hier befindet sich der Arccosinus zwischen 0 und π - und wir haben auf effektive Weise die beiden gezeichneten Lösungen: Die rote ist der arccos, und in braun -arccos, und man kann diese Winkel um ein vielfaches Ganzes von 2π ändern.

Notes

Summary

33m 30s

# Définition : fonction arccosinus

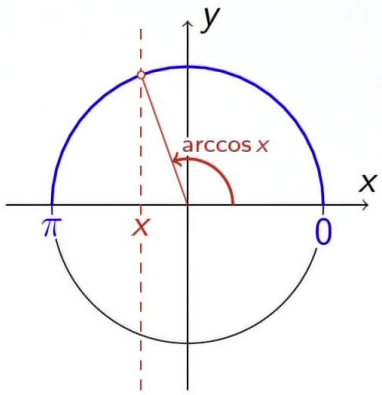
La fonction *arccosinus* est la fonction

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos x$$

qui à toute valeur $x \in [-1,1]$ donnée,

fait correspondre l'unique angle $\alpha \in [0,\pi]$

tel que $\cos\alpha = x$ .






Für x gleich 1 haben wir die folgende Situation auf dem Einheitskreis: Hier haben wir nur einen Punkt, der eine Abszisse von 1 haben kann - hier ist er - der entsprechende Winkel beträgt 0 und ich kann Vielfache von π hinzufügen, also habe ich in diesem Fall k x 2π als Lösungsmenge. Schließlich, wenn x noch größer als 1 ist, dann gibt es keine möglichen Lösungen mehr, weil in diesem Fall kein Punkt auf dem Einheitskreis eine Abszisse von 1,2 in der Figur hat. Die Lösungsmenge ist also leer. Definieren wir auf genauere Weise, was man unter der Funktion Arccosinus versteht; also, die Funktion Arccosinus akzeptiert eine Zahl zwischen -1 und 1, es ist ein Cosinus, der von einem Winkel genommen wird. Er gibt uns einen Winkel auf dem oberen Halbkreis, mit einem Winkel zwischen 0 und π, der einen Wert zwischen 0 undt π ergeben wird, also wird das gegebene x in einen Arccosinus zwischen 0 und π umgewandelt, und wir werden sagen, dass dieser Einheitswinkel zwischen 0 und π x beträgt.

Notes

Summary

34m 06s

# Remarques

Conséquence de la définition :

et

$$\cos(\arccos x) = x, \qquad \forall\, x \in [-1, 1]$$

$$\arccos(\cos \alpha) = \alpha, \qquad \forall\, \alpha \in [0, \pi].$$

Nous appelons un angle $\alpha$ un bon angle pour le *cosinus* si $\alpha \in [0, \pi]$.



Wir können ähnliche Bemerkungen machen wie die, die wir für Sinus gemacht haben: Wenn ich hier die erste Übereinstimmung anschaue, wenn ich einen Wert von x zwischen -1 und 1 nehme, wenn ich den Arccosinus nehme, erhalte ich einen Winkel zwischen 0 und π, ich erhalte einen Winkel genau am Cosinus Ox, also habe ich per definitionem diese erste Übereinstimmung, erneut ist sie einwandfrei, da hier Arccosinus keine anderen Werte außer -1,1 akzeptiert. Die zweite Linie ist ein bisschen problematischer, weil ich à priori in arccos(cos α) eine beliebige reelle Zahl α wählen könnte, doch ich erhalte nicht automatisch erneut α; um erneut α zu erhalten, muss es ein Winkel sein, der sich zwischen 0 und π befindet. In diesem Fall hier ist es klar, ich nehme den Cosinus und Arccos gibt mir einen Winkel zwischen 0 und π, dessen Cosinus exakt gegeben ist durch diesen Wert cos(α), also wird es auf einzigartige Weise α sein. Wir werden ein wenig den Cosinus ändern, wir werden sagen, dass der Winkel für den Cosinus passt, wenn er zwischen 0 und π liegt. Ein Winkel passt für den Sinus, für den Cosinus, aber es gibt keinen übereinstimmenden Begriff für die beiden trigonometrischen Funktionen.

Notes

Summary

35m 17s

# Remarques

Conséquence de la définition :

$$\cos(\arccos x) = x, \qquad \forall\, x \in [-1, 1]$$

et

$$\arccos(\cos \alpha) = \alpha, \qquad \forall\, \alpha \in [0, \pi].$$

Nous appelons un angle $\alpha$ un bon angle pour le *cosinus* si $\alpha \in [0, \pi]$.

Les bons angles pour le *cosinus* sont donc exactement les angles donnés par la fonction *arccosinus*.

La relation $\arccos(\cos \alpha) = \alpha$ est donc vraie si et seulement si $\alpha$ est un bon angle pour le *cosinus*.



"Gut" für Cosinus bedeutet, dass der Winkel zwischen 0 und π liegt. Die guten Winkel für den Cosinus sind genau die Winkel, die durch die Funktion Arccosinus gegeben sind; Arccosinus ergibt immer per definitionem einen Winkel, der gut für den Sinus ist, und wenn er passend für den Sinus ist, kann man tatsächlich diese zweite Übereinstimmung haben, das heißt, dass man immer den Arccos von cos(α) = α für alle α hat, die gut für einen Winkel sind.

Notes

Summary

36m 33s

# Equations trigonométriques simples

Ce que nous avons appris :

- la résolution des équations trigonométriques simples en sinus et en cosinus ;
- la définition des fonctions *arcsinus* et *arccosinus*.

Prochaine étape :

- le graphe des fonctions *arcsinus* et *arccosinus*.



Fassen wir zusammen, was wir gelernt haben: Wir haben gelernt, das zu lösen, was man einfache trigonometrische Gleichungen in Sinus und Cosinus nennt; wir haben gesehen, dass ihre Lösungsmenge in der Tat nicht sehr einfach ist, es ist die Gleichung, die leicht ist. Wir haben für den Sinus und den Sinus jeweils separat einen Vorschlag formuliert, der Antworten gibt bezüglich des Wertes, den wir auf der rechten Seite haben; anschließend haben wir auf genaue Weise zwei Funktionen definiert, einen Arcsinus und einen Arccosinus, was es im Kopf zu behalten gilt, ist, dass der Arcsinus einen Winkel ergibt, dass er gut für Sinus ist, also zwischen -π/2 und π/2, und Arccosinus ergibt einen Winkel, der gut für den Cosinus ist, das heißt, zwischen 0 et π. In der nächsten Etappe werden wir uns für den Graphen der Funktionen Arcsinus und Arccosinus interessieren. Bis zum nächsten Mal, danke.

Notes

Summary

37m 00s