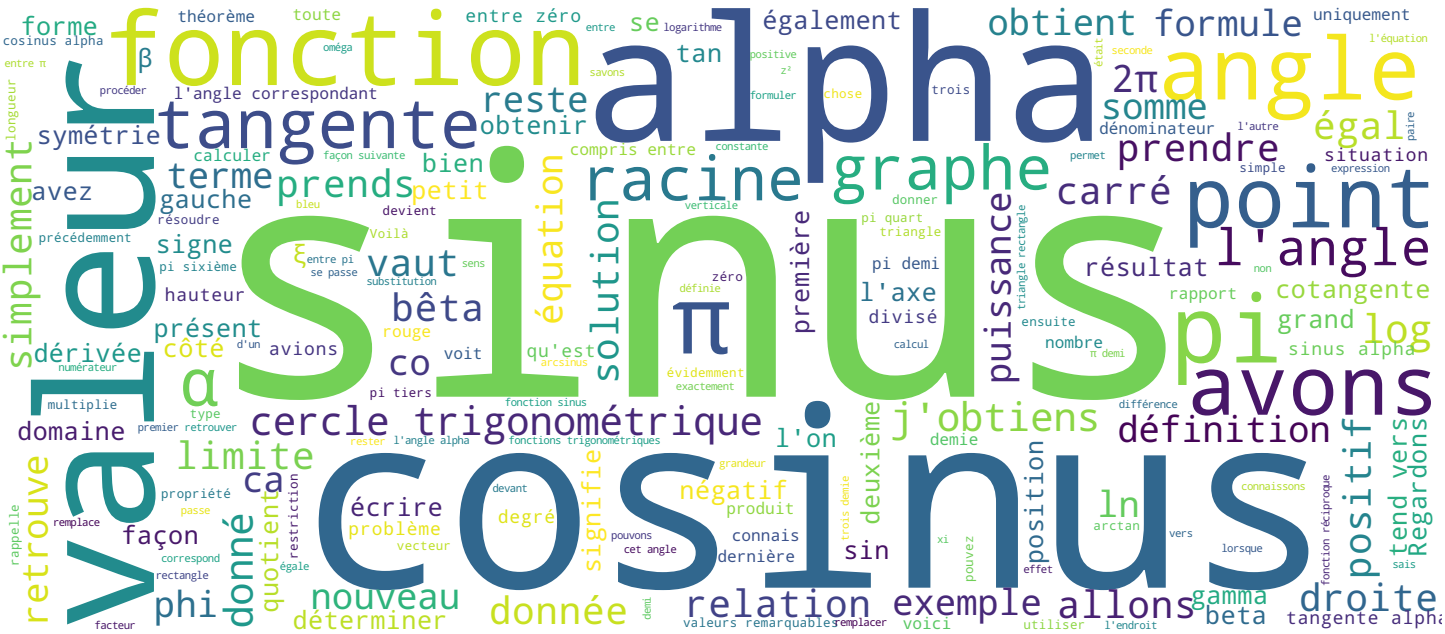
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus et leurs inverses

2.5 Les graphes des fonctions arcsin et arccos

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

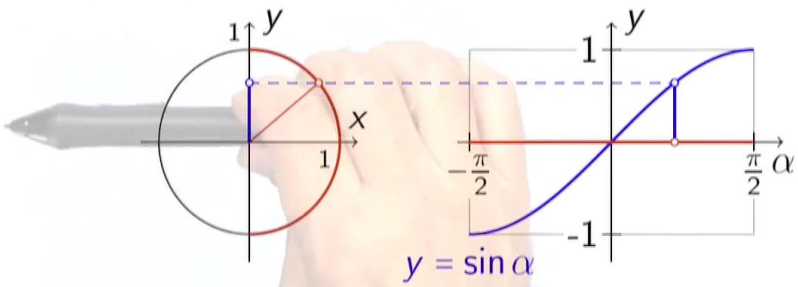
Video

EPFL

Rappel : arcsinus

Nous avons défini, pour $y \in [-1, 1]$ donné, la valeur $\arcsin y$ comme l'angle α unique ayant les propriétés suivantes :

- $\sin \alpha = y$ et
- l'angle α est bon pour le *sinus*, c'est-à-dire $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Bonjour. La dernière fois, nous avions parlé d'équations trigonométriques qualifiées de simples, c'est-à-dire d'équations trigonométriques de la forme sinus alpha et une constante donnée, ou cosinus alpha et une constante donnée. Dans ce cadre, nous avions introduits des solutions très particulières de ces équations, nous les avions appelées un arcsinus et un arccosinus. Aujourd'hui, j'aimerais analyser ce mécanisme arcsinus, respectivement arccosinus, sous un aspect de fonction et notamment sous un aspect de fonction réciproque. Commençons par rappeler ce qu'était arcsinus. Alors nous avions dit que, pour un y entre -1 et 1, en fait cela va être une ordonnée sur le cercle trigonométrique, donc pour un y entre -1 et 1 donné, la valeur arcsinus y était un angle alpha qui avait deux propriétés essentielles. L'une c'est évidemment le sinus de alpha redonne y, et le deuxième c'était que alpha soit bon pour le sinus. Alors bon pour le sinus, ça signifiait que l'angle est entre -pi/2 et pi/2. Donc l'angle est ici sur le cercle trigonométrique sur le demi-cercle situé à droite. La valeur de y est donnée. Donc la valeur du sinus est donnée.

Notes

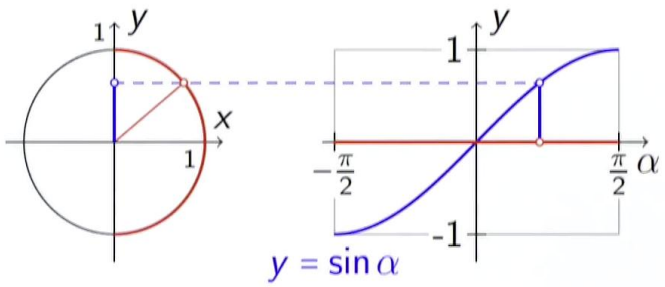
Summary

0m 04s

Rappel : arcsinus

Nous avons défini, pour $y \in [-1, 1]$ donné, la valeur $\arcsin y$ comme l'angle α unique ayant les propriétés suivantes :

- $\sin \alpha = y$ et
- l'angle α est bon pour le *sinus*, c'est-à-dire $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Donc nous cherchons un point sur le cercle trigonométrique à cette hauteur y donnée, et nous la cherchons sur le demi-cercle, ici, sur la droite, donc la position serait ici et arcsinus nous donne l'angle correspondant à cette position, un angle compris entre -pi/2 et pi/2. On peut tout à fait faire cette construction sur le graphe de la fonction sinus. Vous avez ici le système d'axes, alpha, y, et on a une portion de sinus. Nous avons dessiner uniquement la portion pour des angles entre -pi/2 et pi/2, ce sont des angles qui sont précisément bon pour le sinus. Alors là, on donne une valeur de y, ça revient à prendre ici cette horizontale, et l'angle correspondant à cette position sur le cercle trigonométrique est donné ici par cette valeur de alpha.

Notes

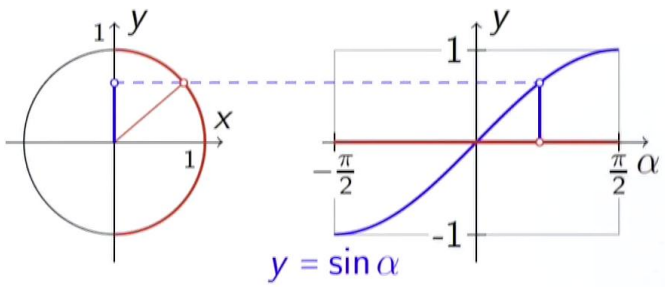
Summary

1m 28s

Fonction sinus restreinte

La fonction qui à tout $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ associe $y = \sin\alpha$ est appelée la restriction de la fonction *sinus* à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

On la note $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

On peut formuler ça encore de façon un peu plus forte. Si on prend la fonction sinus, si en fait elle est définie pour tous les alpha depuis moins l'infini jusqu'à plus l'infini, pour tous les alpha réels, alors on peut restreindre les valeurs admissibles pour le sinus. On peut dire OK, on ne va prendre que des angles entre -pi/2 et pi/2 pour le sinus, et alors nous parlons d'une restriction de la fonction sinus à l'intervalle -pi/2, pi/2. Du point de vue notation, on utilise le même symbole que précédemment : sin, pour sinus, la tige verticale et en index, on donne la plage de valeurs, -pi/2, pi/2. Le graphe, évidemment, est donné ici par ce tronçon et on retrouve le dessin dont on vient de parler.

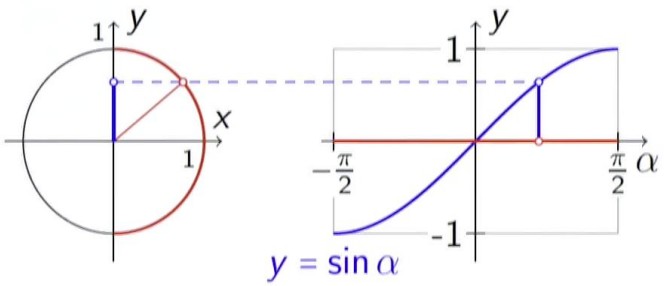
Notes

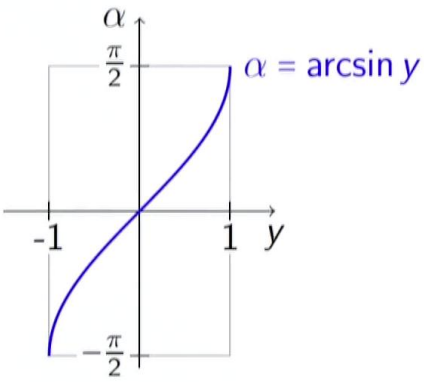
Summary

2m 19s

Graphe de la fonction arcsinus

La fonction arcsin est la réciproque de la fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$.





On déduit son graphe de celui de $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ par symétrie d'axe $y = \alpha$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors si on regarde les choses comme ça, on peut dire que la fonction arcsinus est en fait la fonction réciproque de la restriction du sinus à -pi/2, pi/2. En effet, pour y, on cherche toujours la valeur de alpha correspondante. Alors au lieu de lire le graphe, ici, au sens, je dirais, inverse, c'est-à-dire on part depuis y pour retrouver alpha. Alors usuellement, il est plus simple de procéder à une symétrie d'axe y égal alpha, donc l'axe des y passe à l'horizontale, l'axe des alpha passe à la verticale, la courbe bleue subit la même symétrie, on obtient donc la courbe bleue ici, et cette fois-ci je peux lire dans le sens usuel, depuis la valeur y donnée, je peux déterminer la valeur de alpha donnée par arcsinus.

Notes

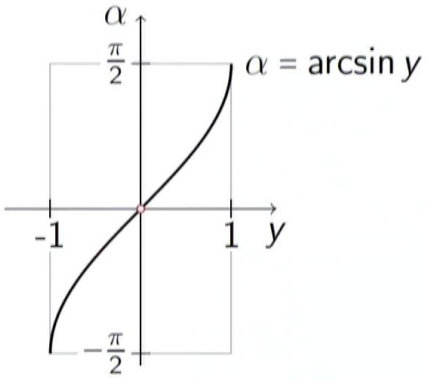
Summary

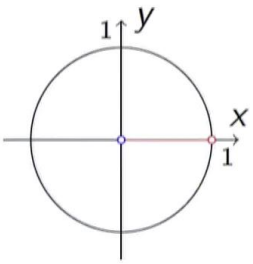
3m 10s

Valeurs remarquables de la fonction arcsinus

Les valeurs remarquables de la fonction arcsinus découlent des valeurs connues du sinus.

y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\arcsin y$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0





Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors nous connaissons quelques valeurs remarquables pour la fonction arcsinus. Ces valeurs découlent des angles remarquables. Nous connaissons le sinus de plusieurs angles, comme l'angle pi sixième, pi quart, pi tiers, et cela permet, à présent, en lisant ces relations dans l'autre sens, de nous donner des valeurs remarquables pour la fonction arcsinus. Voici la première de ces valeurs. Donc si je prends pour y -1, ici sur le cercle trigonométrique, la position est indiquée avec ce point en bas, tout en bas. L'angle correspondant entre -pi/2 et pi/2, évidemment, c'est -pi/2. Si je prends la prochaine valeur remarquable, c'est moins racine de trois demie, nous connaissons un angle dont le sinus vaut racine trois demie, ça c'est pi tiers, nous connaissons également un angle dont le sinus vaut moins racine de trois demie, c'est simplement moins pi tiers par symétrie sur le cercle trigonométrique. De façon similaire, nous avons la valeur remarquable de moins racine deux demie, qui correspond à l'angle moins pi quart. Pour moins une demie, on obtient l'angle remarquable moins pi sixième. Pour zéro, évidemment, on obtient la valeur zéro.

Notes

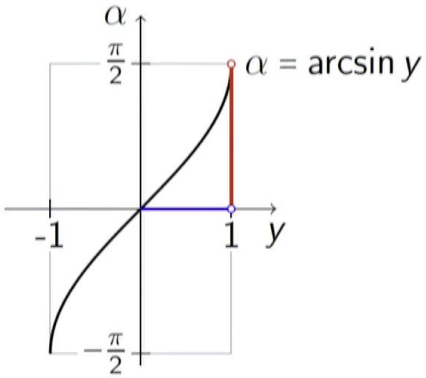
Summary

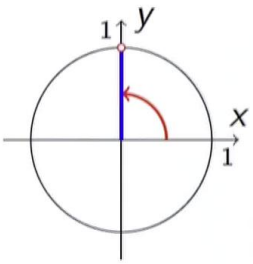
4m 04s

Valeurs remarquables de la fonction arcsinus

Les valeurs remarquables de la fonction arcsinus découlent des valeurs connues du sinus.

y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin y$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$





Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Et ensuite, par symétrie, on peut reprendre les mêmes valeurs de y mais avec le signe positif, et les angles correspondants, cette fois-ci, sont les mêmes mais avec le signe positif aussi. Donc pour une demie, j'ai pi sixième. Pour racine de deux demie, j'ai pi quart. Pour racine trois demie, j'ai pi tiers. Et pour un, j'ai pi demi. Ces valeurs remarquables, il faut les retenir bien évidemment.

Notes

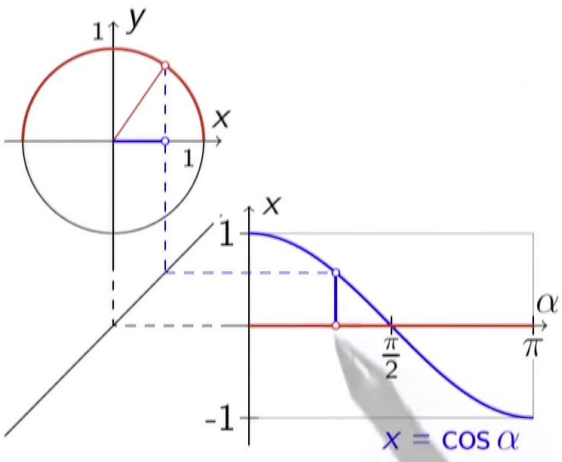
Summary

5m 24s

Rappel : arccosinus

Nous avons défini, pour $x \in [-1, 1]$ donné, la valeur $\arccos x$ comme l'angle α unique ayant les propriétés suivantes :

- $\cos \alpha = x$ et
- l'angle α est bon pour le *cosinus*, c'est-à-dire $\alpha \in [0, \pi]$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Rappelons à présent ce que nous savons sur la fonction, ou sur le mécanisme, pour le moment, d'arccosinus. Alors l'arccosinus avait fonctionné de la façon suivante : On s'était donné alors une valeur de x entre -1 et 1. Donc une valeur ici, sur l'axe des x dans le cadre du cercle trigonométrique. Alors nous avions dit qu'un angle serait bon cette fois-ci, c'est-à-dire ça c'est un angle rendu par arccosinus s'il est compris entre zéro et pi et si il a la propriété suivante : c'est que le cosinus de cet angle est donné par cette valeur x. Donc le cosinus de l'angle recherché donne x et l'angle est bon pour le cosinus c'est-à-dire entre zéro et pi. Alors on peut interpréter cela tout à fait sur le graphe de la fonction. Nous avons ici le cercle trigonométrique, la construction correspondante du graphe du cosinus. Nous l'avons dessiné pour alpha justement sur la plage des bonnes valeurs, c'est-à-dire entre zéro et pi. Et là, la construction est la suivante. Donc on se donne x, sur le cercle trigonométrique, on trouvait la position ici entre zéro et pi, et l'angle correspondant était l'angle rendu par arccosinus. Sur le graphe du sinus, on prend ce x, la hauteur, c'est la même longueur qu'ici, à la verticale, grâce au miroir.

Notes

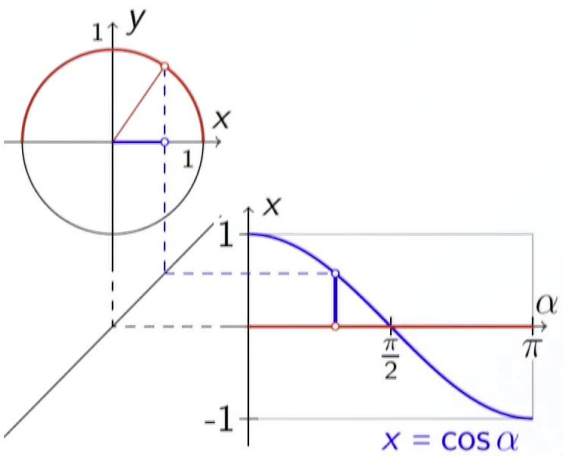
Summary

5m 47s

Fonction cosinus restreinte

La fonction qui à tout $\alpha \in [0, \pi]$ associe $x = \cos\alpha$ est appelée la restriction de la fonction *cosinus* à l'intervalle $[0, \pi]$.

On la note $\cos|_{[0,\pi]}$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Donc on donne la hauteur x et on cherche le point correspondant, alpha, ici. Alors comme nous l'avons fait pour le sinus, nous pouvons tout à fait formaliser le tout un peu plus. Nous allons dire que nous avons une restriction du cosinus à l'intervalle zéro, pi. Nous notons cela de façon similaire : cos avec la barre verticale et le zéro jusqu'à pi. Et ça, c'est ce que nous allons appeler la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle zéro, pi.

Notes

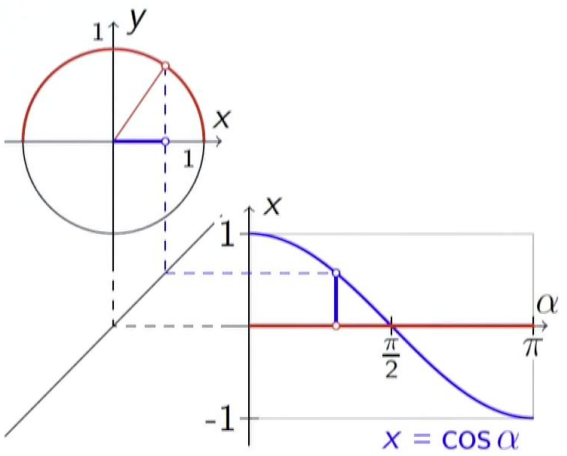
Summary

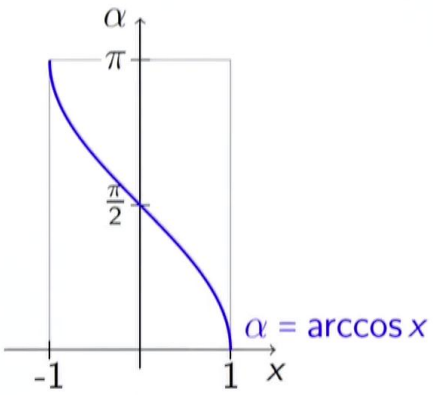
7m 06s

Graphe de la fonction arccosinus

La fonction arccos est la réciproque de la fonction $\cos|_{[0,\pi]}$.

On déduit son graphe de celui de $\cos|_{[0,\pi]}$ par symétrie d'axe $x = \alpha$.





Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Et comme précédemment, nous pouvons à présent dire que la fonction arccos est la fonction réciproque de cosinus restreinte à l'intervalle zéro, pi. En effet, si on se donne x et on recherche alpha, on lit, en quelque sorte, sur le graphe de cette fonction, de cette restriction, on lit, en fait, le graphe en sens qu'on peut qualifier d'inverse. Alors de nouveau, par une symétrie d'axe x égal alpha, ici, on a l'axe x qui devient horizontal, l'axe des alpha devient vertical. La même symétrie est appliquée à la courbe x égal cos alpha. On obtient donc alpha égal arccos x cette fois-ci, et voilà, ça c'est le graphe de la fonction arccosinus qui, à toute valeur entre -1 et 1, donne une valeur de alpha entre zéro et pi.

Notes

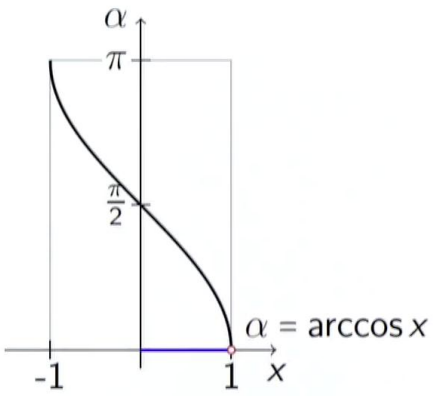
Summary

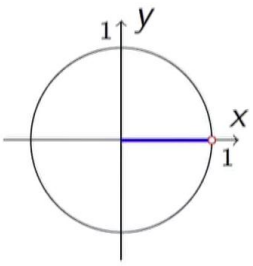
7m 36s

Valeurs remarquables de la fonction arccosinus

Les valeurs remarquables de la fonction arccosinus découlent des valeurs connues du cosinus.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0





Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Là encore, nous pouvons donner quelques valeurs remarquables. Ces valeurs remarquables découlent immédiatement de notre connaissance du cosinus pour certains angles remarquables. Alors si je prends x égal à -1, la position sur le cercle trigonométrique est ici, alors l'angle correspondant entre zéro et pi est évidemment pi. Si je prends la prochaine valeur remarquable, moins racine de trois demie, alors l'angle correspondant, si vous voulez c'est pi moins pi sixième, en fait c'est cinq pi sixième. Pour moins racine deux demie, l'angle c'est pi moins pi quart donc trois pi quart. Pour moins une demie, c'est deux pi tiers. Pour zéro, nous avons l'angle pi demi, que l'on voit ici. On le voit aussi sur le graphe. On peut toujours considérer les deux cas. Par exemple, pour une demie, on voit ici l'angle qui devient plus petit, il devient pi tiers, ce qui est correct ici, l'angle rendu est devenu plus petit à pi tiers. Pour racine deux demie, l'angle correspondant est pi quart. Nous avons ici la hauteur et l'angle rendu qui est ici en haut. Pour racine trois demie, on a pi sixième. Et pour un, la valeur d'arc cosinus vaut zéro. On le retrouve ici, si je prends un, la valeur rendue vaut zéro.

Notes

Summary

8m 32s

Les fonctions sinus et cosinus et leur inverse

Ce que nous avons appris :

- le graphe des fonctions *arcsinus* et *arccosinus* ;
- les valeurs remarquables de ces deux fonctions.

Prochain Chapitre :

- définition des fonctions trigonométriques *tangente* et *cotangente*.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors qu'est-ce que nous avons appris dans cette séquence ? Alors nous avons fait connaissance des graphes des fonctions arcsinus et arccosinus. Nous avons vu que en fait il s'agit-là de fonctions réciproques, de restriction du sinus et du cosinus, des restrictions toujours aux bons angles correspondants. Et nous connaissons toute une liste de valeurs prises par ces fonctions, ce sont les valeurs que l'on appelle des valeurs remarquables. Alors nous arrivons ici au terme de ce deuxième chapitre. Dans le chapitre suivant, je vais introduire une deuxième famille de fonctions trigonométriques, il s'agira de la tangente et de la cotangente.

Notes

Summary

9m 51s

Les fonctions sinus et cosinus et leur inverse

Un grand merci d'avoir suivi ce deuxième chapitre.

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.

Entre temps, je vous remercie de m'avoir suivi. Je vous félicite d'avoir suivi ce cours jusqu'ici, d'avoir suivi ce deuxième chapitre. Je vous encourage évidemment à poursuivre vos études. Je profite de l'instant également pour remercier mes collaborateurs qui soutiennent ce projet. Je remercie Guido Burmeister, Roger Sauser et Olivier Woringer. À la prochaine.

Notes

Summary

10m 29s