ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus et leurs inverses

## 2.5 Les graphes des fonctions arcsin et arccos

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

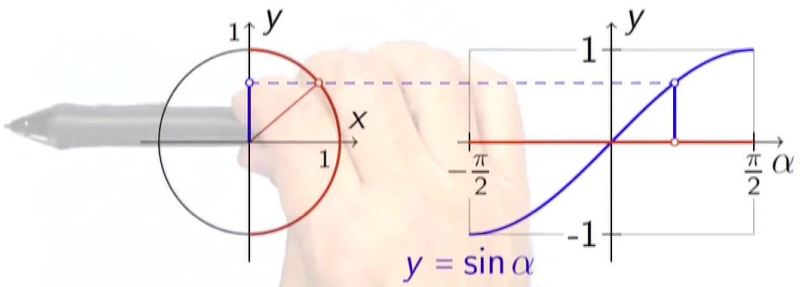

Video

EPFL

# Rappel : arcsinus

Nous avons défini, pour $y \in [-1, 1]$ donné, la valeur $\arcsin y$ comme l'angle $\alpha$ unique ayant les propriétés suivantes :

- $\sin \alpha = y$ et
- l'angle $\alpha$ est bon pour le *sinus*, c'est-à-dire $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Guten Tag. Beim letzten Mal haben wir über trigonometrische Gleichungen gesprochen, und zwar in einfacher Form, das heißt trigonometrische Gleichungen der Form Sinus alpha mit einer gegebenen Konstante, oder Cosinus alpha mit einer gegebenen Konstante In diesem Zusammenhang haben wir sehr spezielle Lösungen für diese Gleichungen eingeführt und haben sie Arkussinus und Arkuskosinus genannt. Heute möchte ich diesen Arkussinus- bzw. Arkuskosinus-Mechanismus analysieren und zwar als Funktion, insbesondere Kehrwertfunktion. Erinnern wir uns zunächst, was der Arkussinus war. Wir hatten gesagt, dass er für ein y zwischen -1 und 1 eine Ordinate auf dem Einheitskreis sein wird, für ein gegebenes y zwischen -1 und 1 also war der Arkussinus-Wert ein Winkel alpha mit zwei wesentlichen Eigenschaften. Die eine ist offenkundig, dass der Sinus von alpha y liefert, die zweite, dass alpha geeignet für den Sinus ist. Geeignet für den Sinus, das hieß, dass der Winkel zwischen -pi/2 und pi/2 beträgt. Also ist der Winkel hier auf dem Einheitskreis auf dem rechten Halbkreis. Der Wert von y ist gegeben. Daher ist der Wert des Sinus gegeben.

Notes

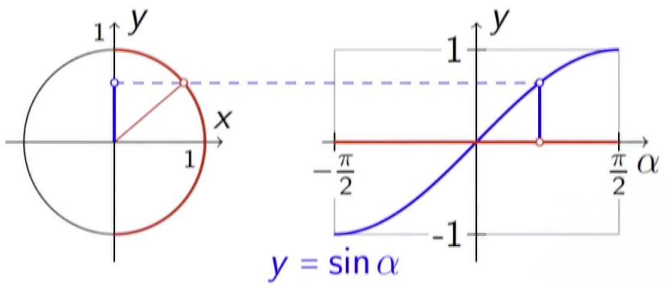
Summary

0m 04s

# Rappel : arcsinus

Nous avons défini, pour $y \in [-1, 1]$ donné, la valeur $\arcsin y$ comme l'angle $\alpha$ unique ayant les propriétés suivantes :

- $\sin \alpha = y$ et
- l'angle $\alpha$ est bon pour le *sinus*, c'est-à-dire $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir suchen also einen Punkt auf dem Einheitskreis auf dieser gegebenen Höhe y, und wir suchen ihn auf dem Halbkreis hier auf der rechten Seite, die Position ist also hier, und Arkussinus liefert uns den Winkel, der dieser Position entspricht, einen Winkel zwischen einschließlich -pi/2 und pi/2. Man kann diese Konstruktion absolut auf den Graphen der Sinus-Funktion anwenden. Sie haben hier das Koordinatensystem, alpha, y, und einen Sinus-Anteil. Wir müssen den Anteil nur für die Winkel zwischen -pi/2 und pi/2 einzeichnen; das sind die Winkel, die exakt geeignet für den Sinus sind. Dort geben wir einen Wert von y, den wir hier an der Horizontelen anlegen, und der dieser Position auf dem Einheitskreis entsprechende Winkel ist hier durch diesen Wert von alpha gegeben.

Notes

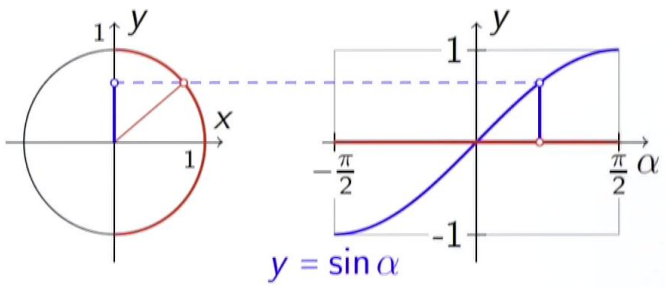
Summary

1m 28s

# Fonction sinus restreinte

La fonction qui à tout $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ associe $y = \sin\alpha$ est appelée la restriction de la fonction *sinus* à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

On la note $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$






Man kann dies auch noch stärker formulieren. Wenn man die Sinus-Funktion nimmt, wenn sie für alle alpha von minus unendlich bis plus unendlich definiert ist, für alle reellen alpha kann man die zulässigen Werte für den Sinus eingrenzen. Man kann sagen, OK, wir nehmen nur die Winkel zwischen -pi/2 und pi/2 für den Sinus und sprechen nun von einer Einschränkung der Sinus-Funktion auf das Intervall -pi/2, pi/2. Als Notation verwendet man dasselbe Symbol wie vorher: sin für Sinus, die Vertikalachse, und im Index den Wertebereich -pi/2, pi/2. Der Graph wird offenbar hier durch diesen Abschnitt gegeben und wir finden die Zeichnung wieder, von der wir gerade gesprochen haben.

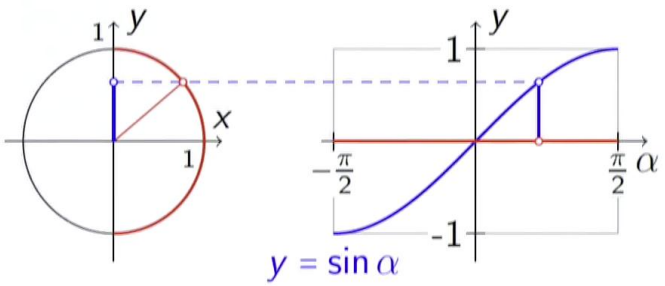
Notes

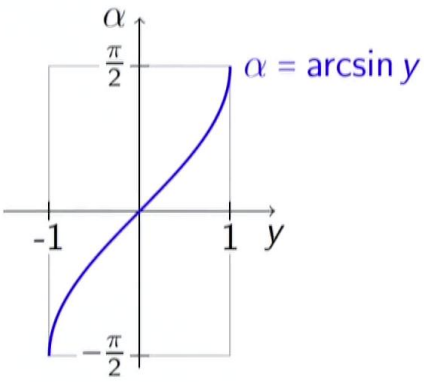
Summary

2m 19s

# Graphe de la fonction arcsinus

La fonction arcsin est la réciproque de la fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$.




On déduit son graphe de celui de $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ par symétrie d'axe $y = \alpha$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wenn man die Dinge so betrachtet, kann man sagen, dass die Arkussinus- Funktion die Kehrwert-Funktion der Einschränkung des Sinus auf -pi/2, pi/2 ist. In der Tat sucht man für y immer den entsprechenden Wert von alpha. Statt den Graphen hier abzulesen, sozusagen im inversen Sinne, beginnt man von y aus, um alpha zu finden. Normalerweise ist es daher leichter, von einer Achsensymmetrie y gleich alpha auszugehen, sodass die y-Achse die Horizontale schneidet, die alpha-Achse die Vertikale schneidet, die blaue Kurve weist dieselbe Symmetrie auf, und man erhält die blaue Kurve hier, und diesmal kann ich im normalen Sinne ablesen; von dem gegebenen Wert y aus kann ich den Wert von alpha bestimmen, der durch den Arkussinus gegeben ist.

Notes

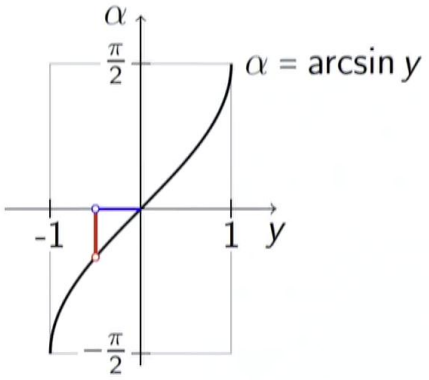
Summary

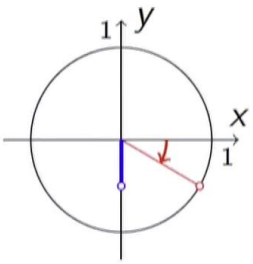
3m 10s

# Valeurs remarquables de la fonction arcsinus

Les valeurs remarquables de la fonction arcsinus découlent des valeurs connues du sinus.

| $y$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\arcsin y$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ |




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nun kennen wir also einige besondere Werte für die Arkussinus-Funktion. Diese Werte leiten sich aus besonderen Winkeln ab. Wir kennen den Sinus mehrerer Winkel, etwa des Winkels pi Sechstel, pi Viertel, pi Drittel, und damit können wir momentan, indem wir diese Relationen im Gegensinne lesen, einige besondere Werte für die Arkussinus-Funktion erhalten. Hier der erste dieser Werte. Wenn ich für y -1 nehme, ist die Position hier auf dem Einheitskreis mit dem Punkt ganz unten angegeben. Der entsprechende Winkel zwischen -pi/2 und pi/2 ist also -pi/2. Wenn ich nun den nächsten besonderen Wert nehme, ist es minus Wurzel aus drei geteilt durch zwei, und wir kennen einen Winkel, dessen Sinus Wurzel aus drei geteilt durch zwei ist, nämlich pi Drittel, kund wir kennen auch einen Winkel, dessen Sinus gleich minus Wurzel aus drei geteilt durch zwei ist, nämlich einfach minus pi Drittel durch Symmetrie auf dem Einheitskreis. In ähnlicher Weise haben wir den besonderen Wert von minus Wurzel aus zwei geteilt durch zwei, der dem Winkel minus pi Viertel entspricht. Für minus ein Halb erhalten wir den besonderen Winkel minus pi Sechstel Für null erhält man offenkundig den Wert null.

Notes

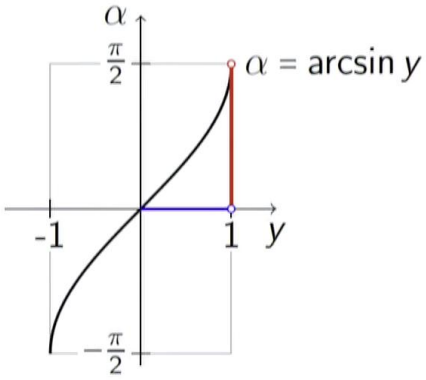
Summary

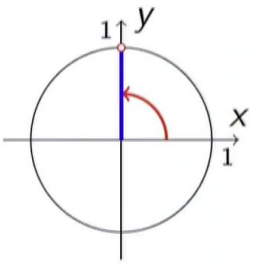
4m 04s

# Valeurs remarquables de la fonction arcsinus

Les valeurs remarquables de la fonction arcsinus découlent des valeurs connues du sinus.

| $y$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\arcsin y$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Danach kann man per Symmetrie dieselben y-Werte nehmen, diesmal aber mit positivem Vorzeichen, und die entsprechenden Winkel sind diesmal dieselben, aber mit ebenfalls positivem Vorzeichen. Für ein Halb erhalte ich pi Sechstel. Für Wurzel aus zwei geteilt durch zwei habe ich pi Viertel. Für Wurzel aus drei geteilt durch zwei pi Drittel. Und für eins pi Halbe. Diese besonderen Werte muss man sich auf jeden Fall gut merken.

Notes

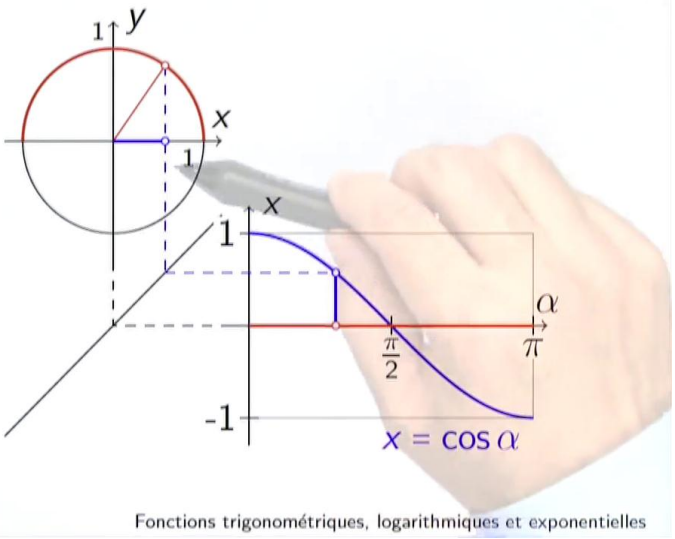
Summary

5m 24s

# Rappel : arccosinus

Nous avons défini, pour $x \in [-1, 1]$ donné, la valeur $\arccos x$ comme l'angle $\alpha$ unique ayant les propriétés suivantes :

- $\cos \alpha = x$ et
- l'angle $\alpha$ est bon pour le *cosinus*, c'est-à-dire $\alpha \in [0, \pi]$.




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Rufen wir uns ins Gedächtnis, was wir über die Funktion wissen, zunächst über den Arkuskosinus-Mechanismus. Der Arkuskosinus hatte folgendermaßen funktioniert: Zuerst wird ein Wert x zwischen -1 und 1 vorgegeben. Also hier ein Wert auf der x-Achse im Einheitskreis. Wir hatten gesagt, dass ein Winkel diesmal geeignet sei, das heißt ein Winkel, der durch den Arkuskosinus zurückgegeben wird, wenn er zwischen null und pi liegt und folgende Eigenschaft hat: nämlich dass der Cosinus dieses Winkels durch diesen Wert x gegeben ist. Der Cosinus des gesuchten Winkels gibt also x zurück und der Winkel ist geeignet für den Cosinus, das heißt zwischen null und pi. Man kann dies also absolut auf dem Graphen interpretieren, der diese Funktion darstellt. Hier haben wir den Einheitskreis, die dem Cosinusgraphen entspechende Konstruktion. Wir haben ihn für alpha genau in den zulässigen Wertebereich eingezeichnet, das heißt zwischen null und pi. dort ist die Konstruktion folgende. Gegeben ist x, auf dem Einheitskreis findet man die Position hier zwischen null und pi, und der entsprechende Winkel ist der Winkel, der vom Arkuskosinus zurückgegeben wird.

Notes

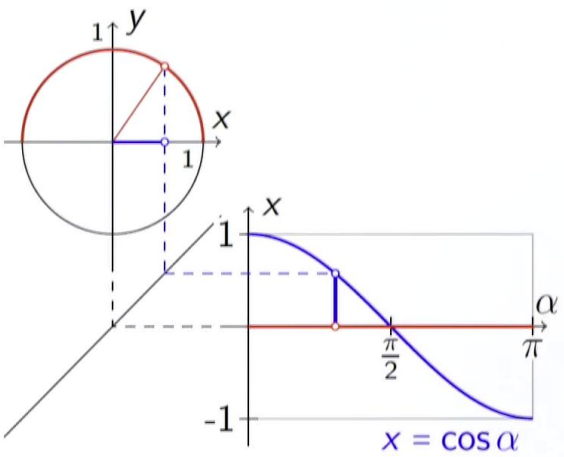
Summary

5m 47s

# Fonction cosinus restreinte

La fonction qui à tout $\alpha \in [0, \pi]$ associe $x = \cos\alpha$ est appelée la restriction de la fonction *cosinus* à l'intervalle $[0, \pi]$.

On la note $\cos|_{[0,\pi]}$




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Auf dem Sinusgraphen nimmt man dieses x, die Höhe ist dieselbe Länge wie hier auf der Vertikalen, dank der Spiegelung. Man gibt also die Höhe x vor und sucht den entsprechenden Punkt alpha hier. So, wie wir es für den Sinus gemacht haben, können wir das Ganze durchaus ein wenig mehr formalisieren. Wir werden sagen, dass wir eine Einschränkung des Cosinus auf das Intervall null, pi haben. Wir notieren dies in ähnlicher Weise: cos mit senkrechtem Balken und null bis pi. Und das werden wir die Einschränkung der Cosinus-Funktion auf das Intervall null, pi nennen.

Notes

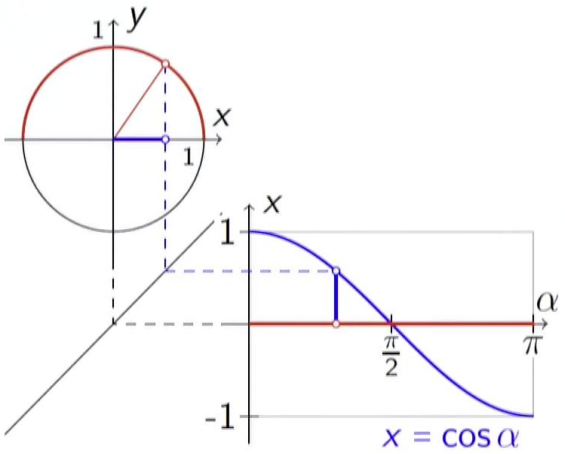
Summary

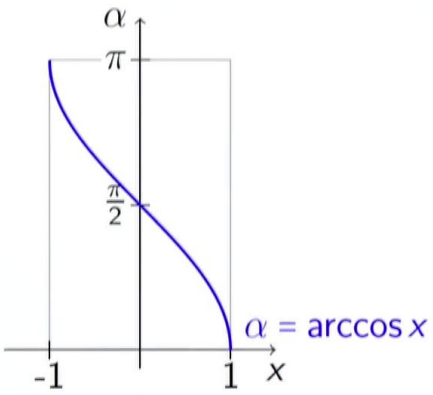
6m 58s

# Graphe de la fonction arccosinus

La fonction arccos est la réciproque de la fonction $\cos|_{[0,\pi]}$.

On déduit son graphe de celui de $\cos|_{[0,\pi]}$ par symétrie d'axe $x = \alpha$.




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Und wie vorher können wir nun sagen, dass die Arkuskosinus-Funktion die Kehrwert-Funktion des Cosinus, beschränkt auf das Intervall null, pi ist. In der Tat: Wenn man x vorgibt und alpha sucht, liest man irgendwie auf dem Graphen dieser Funktion diese Einschränkung, man liest den Graphen tatsächlich in einem invers zu nennenden Sinn ab. Wiederum hat man hier durch Achsensymmetrie x gleich alpha eine x-Achse, die horizontal wird, und die alpha-Achse wird vertikal. Dieselbe Symmetrie wird auf die Kurve x gleich cos alpha angewandt. Diesmal erhält man also alpha gleich arccos x, und siehe da, das ist genau der Graph der Arkuskosinus-Funktion, die für jeden Wert zwischen -1 und 1 einen Wert von alpha zwischen null und pi zurückgibt.

Notes

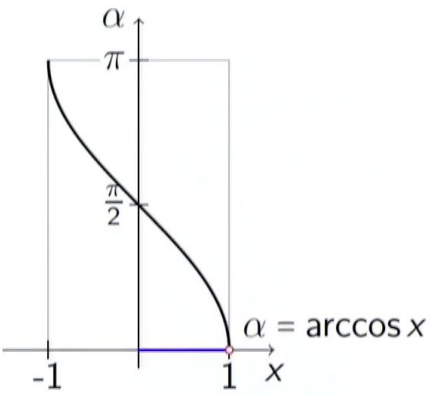
Summary

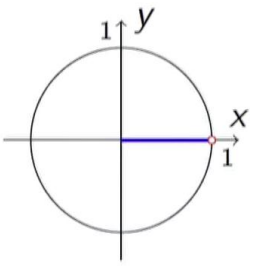
7m 36s

# Valeurs remarquables de la fonction arccosinus

Les valeurs remarquables de la fonction arccosinus découlent des valeurs connues du cosinus.

| $x$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\arccos x$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $0$ |




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wieder können wir einige besondere Werte geben. Diese besonderen Werte ergeben sich unmittelbar aus unserer Kenntnis des Cosinus für einige besondere Winkel. Also, wenn ich x gleich -1 nehme, ist die Position auf dem Einheitskreis hier, der entsprechende Winkel zwischen null und pi ist also offensichtlich pi. Wenn ich den nächsten besonderen Wert nehme, minus Wurzel aus drei geteilt durch zwei, so ist der entsprechende Winkel, wenn Sie so wollen pi minus pi Sechstel, tatsächlich ist es fünf pi Sechstel. Für minus Wurzel aus zwei geteilt durch zwei, ist der Winkel pi minus pi Viertel, also drei pi Viertel. Für minus ein Halb ist es zwei pi Drittel. Für null haben wir den Winkel pi Halbe, den wir hier sehen. Man sieht ihn auch auf dem Graphen. Man kann immer beide Fälle betrachten. Hier sieht man zum Beispiel für ein Halb den Winkel, der kleiner wird, er wird pi Drittel, was hier korrekt ist, der Winkel ist kleiner geworden auf pi Drittel. Für Wurzel aus zwei geteilt durch zwei ist der entsprechende Winkel pi Viertel. Wir haben hier die Höhe und den erhaltenen Winkel, der hier oben ist. Für Wurzel aus zwei geteilt durch zwei hat man pi Sechstel. Und für eins ist der Wert des Arkuskosinus null. Man erhält hier, wenn ich eins nehme, den Wert null.

Notes

Summary

8m 32s

# Les fonctions sinus et cosinus et leur inverse

Ce que nous avons appris :

- le graphe des fonctions *arcsinus* et *arccosinus* ;
- les valeurs remarquables de ces deux fonctions.

Prochain Chapitre :

- définition des fonctions trigonométriques *tangente* et *cotangente*.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Was haben wir also in dieser Sequenz gelernt? Wir haben die Graphen der Arkussinus- und Arkuskosinus- Funktion kennengelernt. Wir haben gesehen, dass es sich um eingeschränkte Kehrwert-Funktionen von Sinus und Cosinus handelt, mit Einschränkungen stets auf die entsprechenden geeigneten Winkel. Und wir kennen eine Liste von Werten, die dieser Funktionen, es sind die Werte, die man besondere Werte nennt. So gelangen wir zum Ende dieses zweiten Kapitels. Im folgenden Kapitel werde ich eine zweite Familie trigonometrischer Funktionen einführen, und zwar den Tangens und Cotangens Bis dahin danke ich Ihnen für Ihre Aufmerksamkeit.

Notes

Summary

9m 51s

# Les fonctions sinus et cosinus et leur inverse

Un grand merci d'avoir suivi ce deuxième chapitre.

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.



Ich beglückwünsche Sie dazu, den Kurs bisher verfolgt zu haben und dieses zweite Kapitel verfolgt zu haben. Natürlich empfehle ich Ihnen, Ihre Studien fortzusetzen. Bei dieser Gelegenheit danke ich auch meinen Mitarbeitern, die dieses Projekt unterstützen. danke Guido Burmeister, Roger Sauser und Olivier Woringer. Bis zum nächsten Mal!

Notes

Summary

10m 32s