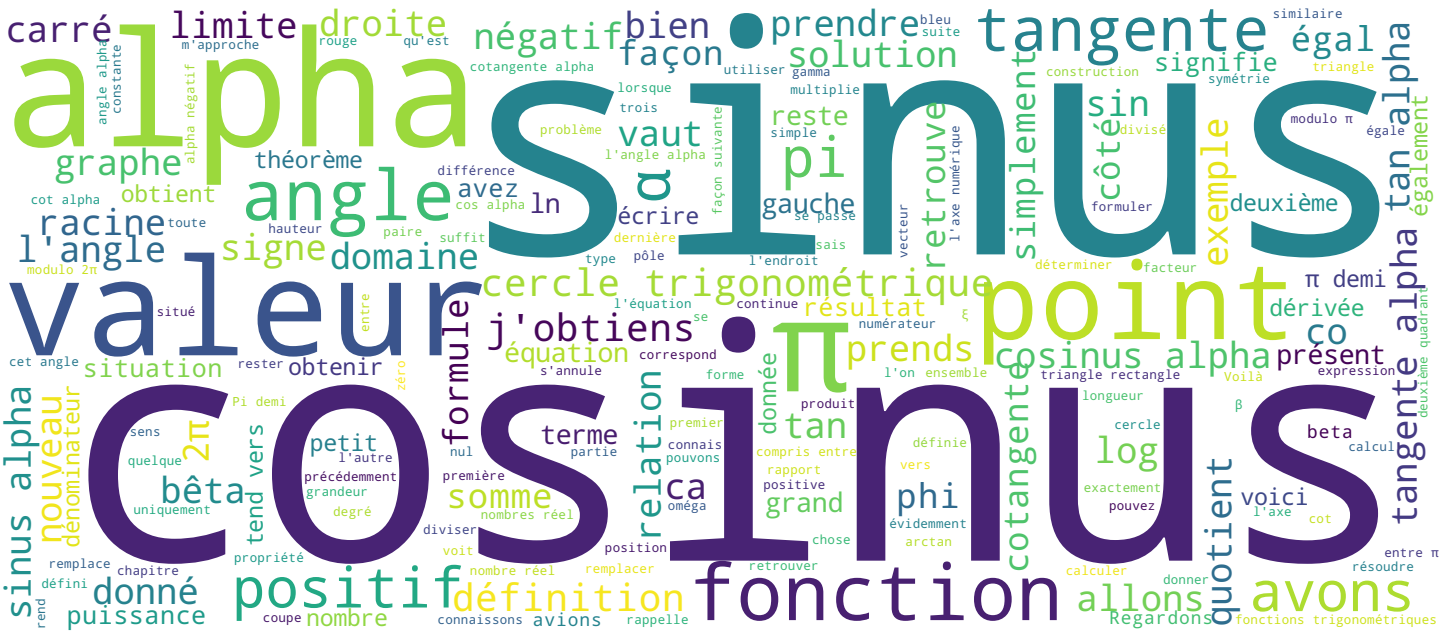
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les fonctions trigonométriques tangentes et cotangentes et leurs inverses

3.1 La définition des fonctions tangente et cotangente

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



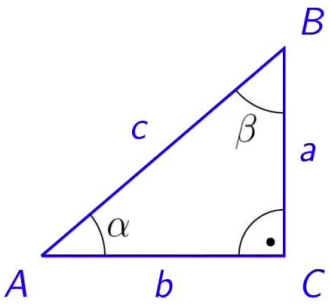
EPFL

Introduction

Dans le cadre de l'étude des triangles rectangles, nous avons montré que les expressions

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

apparaissent de façon naturelle.



Exemple

$$\left.\begin{aligned} a &= c\cdot\sin\alpha \\ b &= c\cdot\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad a = b\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Bonjour, je vous souhaite la bienvenue pour ce chapitre trois du cours fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles. Un chapitre qui va nous faire découvrir de nouvelles fonctions trigonométriques : la tangente et la cotangente. Aujourd'hui, nous allons nous concentrer sur la définition de ces deux fonctions trigonométriques. Dans le cadre de l'étude du triangle rectangle, nous avions déjà rencontré des expressions du type sin divisé par le cosinus d'alpha ou cosinus d'alpha divisé par sinus alpha. De telles fractions apparaissaient de façon naturelle. Je vous rappelle ici le contexte comment elles sont apparues. Dans le triangle rectangle ABC, il est rectangle ici en C avec l'angle alpha en A et beta en B, avec les côtés a, b, c numérotés de façon standard, c'est-à-dire le côté a en face de grand A, le côté petit b en face de grand B, etc. Alors nous connaissions les relations que vous trouvez ici c'est-à-dire que le quotient a sur c donnait le sinus; donc a/c donnait le sin d'alpha ou si l'on préfère, a est donné par c fois sin de Alpha. De façon similaire, nous savions pour b que c'était c x le cos de alpha.

Notes

Summary

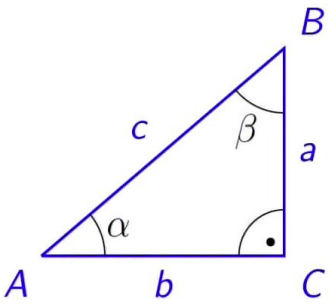
0m 04s

Introduction

Dans le cadre de l'étude des triangles rectangles, nous avons montré que les expressions

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

apparaissent de façon naturelle.



Exemple

$$\left.\begin{aligned} a &= c \cdot \sin\alpha \\ b &= c \cdot \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Alors si on prend cette deuxième relation, et si on la résout par rapport à c, il va me rester, pour c, b sur cos alpha, une grandeur que je peux insérer sur la première ligne. Donc b divisé par cosinus alpha. Ce qui me donne pour a l'expression b fois justement le quotient sinus alpha divisé par cosinus alpha. Donc ce quotient apparaît de façon très naturelle dans le contexte du triangle rectangle.

Notes

Summary

1m 22s

Définition : fonction cotangente

Définition

La fonction *cotangente*

$$\cot : \mathbf{D}_{\cot} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \mapsto \cot \alpha := \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

est définie comme quotient des fonctions cosinus et sinus.

Elle est définie sur le domaine

$$\mathbf{D}_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \}.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors donnons une définition précise maintenant de la fonction tangente. Alors la fonction tangente, qui s'abrège tan, est définie sur un sous-ensemble que nous allons encore analyser, sur un sous-ensemble des nombres réels elle rend un nombre réel depuis alpha elle crée le nombre réel tangente alpha que j'obtiens comme quotient du sinus de alpha et du cosinus de alpha. Alors on voit tout de suite qu'on peut avoir quelques problèmes avec cette définition, le problème étant qu'il faut à tout prix éviter de diviser par zéro Or le cosinus de alpha peut s'annuler Nous connaissons les 0 du cosinus alpha Le cosinus alpha s'annule pour π demi modulo π. Il faut exclure du domaine de définition toutes ces valeurs pour lesquelles le cosinus alpha s'annule. Il faut exclure du domaine de définition π demi + K x π avec K, un élément de Z Regardons la définition de cotangente c'est là aussi une fonction qui va depuis un sous ensemble des nombres réels vers les nombres réels Nous abrégeons cette fonctions cot elle prend un nombre réel alpha, elle rend un nombre réel cotangente alpha. Cette fois ci le quotient n'est pas sinus alpha sur cosinus alpha mais c'est cosinus alpha, divisé par sinus alpha.

Notes

Summary

1m 54s

Définition : fonction cotangente

Définition

La fonction *cotangente*

$$\cot : \mathbf{D}_{\cot} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \mapsto \cot \alpha := \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

est définie comme quotient des fonctions cosinus et sinus.

Elle est définie sur le domaine

$$\mathbf{D}_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \, : \, k \in \mathbb{Z} \} .$$

On a le même problème que précédemment il faut éviter de diviser par 0. Il faut prendre comme domaine de définition de la fonction cot, "Dcot", ici. Il faut prendre les nombres réels sauf les nombres qui annulent sinus alpha C'est à dire, K fois π, avec K dans Z.

Notes

Summary

3m 21s

Remarque

Pour tout $\alpha \in \mathbf{D}_{\tan} \cap \mathbf{D}_{\cot}$, on a

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{et} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$, on a

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \qquad \text{et} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}.}$$

Une remarque s'impose, si je prends un angle qui est dans les deux domaines de définition, donc qui est différent d'un multiple entier de π demi, jJ'ai tangente alpha, qui est sinus alpha sur cosinus alpha et j'ai cot qui est cosinus alpha sur sinus alpha. On observe immédiatement qu'en fait on peut obtenir tangente alpha en prenant 1 sur cot alpha et vice-versa, cot alpha c'est 1 sur tangente alpha.

Notes

Summary

3m 40s

Relation de Pythagore

On a établi au chapitre précédent que

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R})\,.$$

On en déduit les deux relations suivantes :

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan})$$

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2\alpha &= 1 + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \\ &= \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \\ &= \frac{1}{\cos^2\alpha}\,. \end{aligned}$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous avions établi, dans un chapitre précédent, une relation qu'on peut qualifier de Pythagore. En effet, le point P alpha, sur le cercle trigonométrique, est situé sur un cercle rayon 1 si bien que ces coordonnées, qui sont cosinus alpha et sinus alpha, remplissent l'équation que cosinus² + sinus² est égal à 1. Cela est vrai pour tout les nombres alpha réels Nous avons, en conséquences, deux relations qui concernent ces trois signes tangentes et cot Voici la première : si je prend 1 + tan², j'obtiens 1 sur cosinus² pour tous les alpha où cette relation fait un sens, donc il faut exclure tous les alpha, où cosinus alpha est nul, ou bien où tangente n'est pas définie. En fait c'est pareil, il faut simplement admettre les alpha qui sont dans ce que nous avions appelé "le domaine de définition de tangente." Comment est ce que l'on obtient cette relation à partir de la précédente ? Alors, voici : Il suffit de calculer 1 + tan² alpha On remplace ce tan alpha par sa définition, c'est à dire sinus alpha sur cosinus alpha. Cette fraction doit être élevé au carré.

Notes

Summary

4m 10s

Relation de Pythagore

On a établi au chapitre précédent que

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R})\,.$$

On en déduit les deux relations suivantes :

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan})$$

et

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\,, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\cot})\,.$$

$$\begin{aligned} 1 + \cot^2\alpha &= 1 + \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \\ &= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \\ &= \frac{1}{\sin^2\alpha}\,. \end{aligned}$$

Je l'élève au carré, au numérateur, au dénominateur séparement, et j'additionne, ici, en mettant au même dénominateur le 1 devient un cos² alpha, le sinus² alpha reste et j'aperçois au numérateur, à présent, cette première relation que cos² + sin² donnent un 1. Il me reste 1 sur cos² de alpha De façon tout à fait similaire, si je prend la somme de 1 et cot alpha², cette fois-ci, j'obtiens 1 sur sinus² alpha. De nouveau, cette relation est toujours définie si je prend alpha dans le domaine de définition de cot puisque c'est exactement le domaine sur lequel le sinus ne s'annule pas. Là encore, on peut obtenir cette formule immédiatement depuis la formule fondamentale, cos² + sin² = 1. Je prend 1 + cot², je le remplace par cos² sur sin². Je met au même dénominateur. Je vois au numérateur apparaitre cette première relation sin² + cos² qui vaut 1 et j'obtiens le 1 sur sin² de alpha.

Notes

Summary

5m 27s

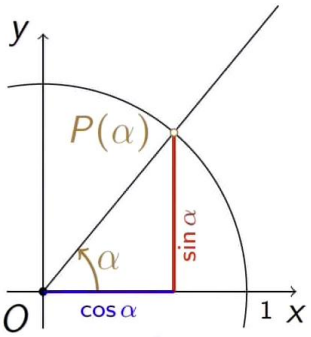
Interprétation géométrique de la tangente

Si $P(\alpha)$ est dans le premier quadrant :

$$\alpha \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\mod 2\pi\,,$$

alors $\sin\alpha > 0$ et $\cos\alpha > 0$.

Donc $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous avons une définition pour une nouvelle fonction, tangente. Pour cotangente également, concentrons d'abord sur tangente. Pour le sin et le cos nous avions une interprétation sur le cercle trigonométrique. L'interprétation qui donnait, pour le cosinus que c'était l'abscisse d'un point P alpha sur le cercle trigonométrique, le sinus de alpha était l'ordonné d'un point sur le cercle trigonométrique Essayons de retrouver sur le cercle trigonométrique une interprétation géométrique pour tangente alpha Commençons notre étude, dans ce qu'on appel le premier quadrant. Le premier cadrant, sur le cercle trigonométrique... Vous avez ici une partie de ce cercle trigonométrique qui est dessinée. Le premier quadrant se situe ici, c'est à dire que le point P alpha doit toujours se situer sur cette partie, sur ce quart du cercle trigonométrique. Cela revient à dire que l'angle alpha est contenu entre 0 et π demi modulo 2π. Sur ce premier quadrant, le cosinus est positif, le sinus est positif, vous avez ici le point P alpha et l'interprétation géométrique du cosinus et du sinus comme abscisse et ordonnés de ce point P alpha.

Notes

Summary

6m 35s

Interprétation géométrique de la tangente

Si $P(\alpha)$ est dans le premier quadrant :

$$\alpha \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\mod 2\pi,$$

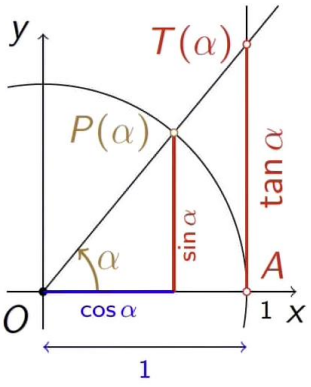
alors $\sin\alpha > 0$ et $\cos\alpha > 0$.

Donc $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0$.

Par Thalès, on a :

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \overline{AT}.$$

Donc $\tan\alpha$ est l'ordonnée du point T.



Par définition, la tan est le quotient sinus alpha sur cosinus alpha et les deux termes étant positifs, on peut en conclure que tan alpha est également positif. Appliquons, dans la situation que voici, où j'ai mené une tan à travers un point que j'ai appelé A ici, qui est le point (1; 0), une tan au cercle trigonométrique Appliquons le théorème de Thalès sur cette situation. J'ai d'une part le quotient sinus alpha sur cosinus alpha, le voici. Et par le théorème de Thalès, jJe peux remplacer ce rapport par, ici, cette longueur entre A et T alpha divisée par cette longueur entre 0 et A. Puisque la longueur entre 0 et A vaut 1; il me reste uniquement la longueur AT. Vu que tan est positif, cela signifique la longueur AT est exactement tan alpha, comme je l'ai inscrit ici. On peut résumer la situation de façon suivante : tan alph est l'ordonnée du point T. Le point T dépend de alpha, il est obtenue simplement en prolongeant le segment 0 P alpha sur une demi-droite, qui coupe en P alpha, la tangente Regardons à présent ce qui se passe sur le deuxième quadrant.

Notes

Summary

7m 40s

Interprétation géométrique de la tangente

Si $P(\alpha)$ est dans le deuxième quadrant :

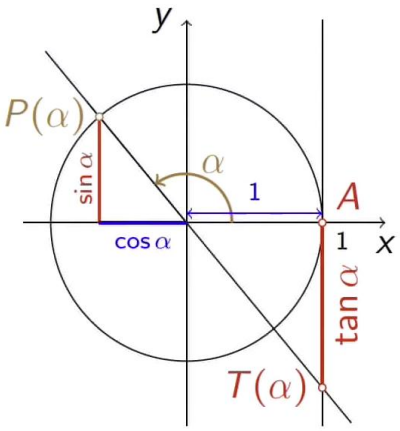
$$\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\mod 2\pi,$$

alors $\sin\alpha > 0$ et $\cos\alpha < 0$.

Donc $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0$.

Comme précédemment, par Thalès, on vérifie que

$\tan\alpha$ est l'ordonnée du point T.



Le deuxième quadrant, on dit que alpha est dans le deuxième quadrant si P de alpha se situe sur ce quart de cercle. Cela signifie que l'angle alpha doit être contenu entre π demi et π à deux π près, c'est à dire modulo 2π. Dans ce cas là, le sinus reste positif mais le cosinus est négatif si bien que tan alpha, donc quotient du sinus et du cosinus devient négatif. On peut cependant réutiliser l'idée que nous avons utilisée précédemment. On peut utiliser, le théorème de Thalès, et on peut conclure que le sinus alpha sur cos alpha est donné par, ici, tangente alpha sur 1 donc ici on doit retrouver tan alpha. Si bien que la réponse doit être négative. En fait, je m'aperçois que, ce que nous avons retenus s'applique à nouveau c'est à dire que tan alpha est l'ordonnée du point T alpha. Cette fois-ci, cette ordonnée est négative comme il se doit.

Notes

Summary

9m 08s

Interprétation géométrique de la tangente

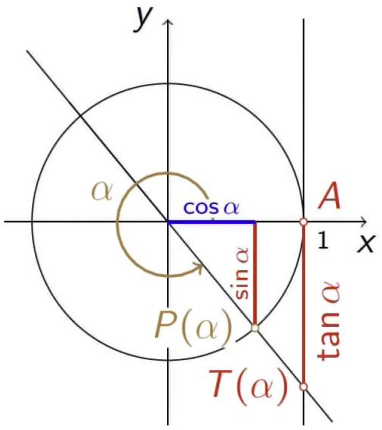
Il en est de même si $P(\alpha)$ est dans le troisième quadrant :

$\sin\alpha < 0 \quad \text{et} \quad \cos\alpha < 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha > 0\,.$

Et si $P(\alpha)$ est dans le quatrième quadrant :

$\sin\alpha < 0 \quad \text{et} \quad \cos\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha < 0\,.$

$$\forall\,\alpha \in \mathbf{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \tfrac{\pi}{2} + k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z} \right\},$$
$\tan\alpha$ est l'ordonnée du point T.



Dans le troisième quadrant, je pense que vous l'avez deviné, (Hésitations) c'est lorsque P de alpha est situé sur ce quart de cercle Dans ce cas là, on a un sinus et un cosinus négatif, si bien que tan, en tant que quotient de deux nombres négatifs doit devenir positif. On peut rejouer le jeu, avec le théorème de Thalès. Le quotient sinus alpha sur cos alpha est donné par tan alpha sur 1. On s'aperçoit que ici, en choisissant tan alpha de ce côté là, on obtient bel et bien tan alpha positif comme il se doit. Il faut donc cette fois-ci, prolonger le segment 0 P alpha par une droite, entière, qui coupe toujours cette même tan verticale. Finalement, dans le quatrième quadrant, on retrouve absolument la situation voulue. Cette fois-ci, le sin est négatif, le cos est positif le quotient doit être négatif, et la construction que nous avont fait dans les trois premiers quadrants, si on le refait ici, je reprend O P, la droite (OP), si je la coupe avec cette tan verticale j'obtiens ici un point T alpha, donc l'ordonnée négative représente précisément tangente alpha. On peut retenir ce résultat, ici dans ce post-it. Pour tous les angles alpha qui sont dans le domaine de définition de tangente alpha, tan alpha est l'ordonnée du point T qui correspond à l'angle alpha.

Notes

Summary

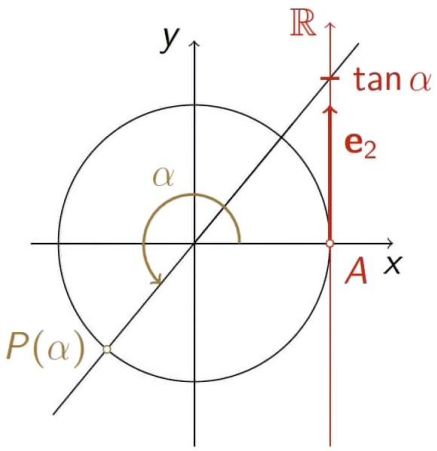
10m 07s

Axe des tangentes

La valeur de la tangente de l'angle α se mesure sur l'axe des tangentes :

- droite numérique tangente au cercle trigonométrique en A,
- d'origine A et
- orientée par le vecteur $\mathbf{e}_2$;

elle est déterminée par l'intersection de la droite $OP(\alpha)$ avec cet axe.



On peut formuler cette construction un peu différemment, On mène, à travers cette tan verticale qui du reste a donné le nom à la tan alpha. On va la considérer comme un axe, c'est à dire que cette droite est orientée par vecteur e2, le même vecteur qui oriente l'axe des y. L'origine est fixée au point A, au point (1; 0), dans ce cas là on prend la droite (OPalpha), elle coupe cette droite numérique verticale qui est ici en rouge, en un point qui représente précisément tan alpha comme droite numérique.

Notes

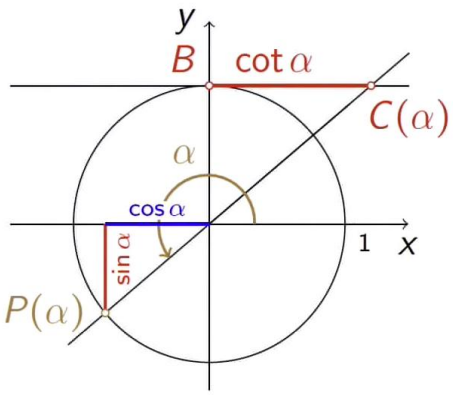
Summary

11m 40s

Interprétation géométrique de la cotangente

De façon analogue,

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{D}_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z} \},$$
$$\cot\alpha \text{ est l'abscisse du point } C.$$



Qu'en est de cotangente, de son interprétation géométrique ? On peut procéder ici de façon tout à fait analogue. Nous avons dessiné ici une situation sur le troisième quadrant. Dans ce troisième quadrant, on retrouve le cosinus alpha, négatif; le sinus alpha, négatif; le quotient doit donc être positif. Je reprend la droite (OPalpha), cette fois-ci il faut la couper avec une tangente horizontale, qui passe à travers un point que j'ai appelé B ici, un point de coordonné (0; 1). Là, le point d'intersection, que j'ai appelé C, qui dépend de alpha a une abscisse qui correspond à cotangente alpha. On voit bien que cette abscisse est positive ce qui correspond au signe de cotangente. On peut donc retenir, la aussi, ce qui est dans ce post-it : Cotangente alpha est toujours l'abscisse de ce point C.

Notes

Summary

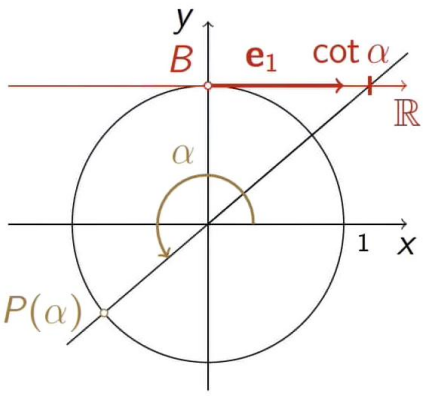
12m 28s

Axe des cotangentes

La valeur de la cotangente de l'angle α se mesure sur l'axe des cotangentes :

- droite numérique tangente au cercle trigonométrique en B,
- d'origine B et
- orientée par le vecteur $\mathbf{e}_1$;

elle est déterminée par l'intersection de la droite $OP(\alpha)$ avec cet axe.



Là encore, on peut formaliser de la façon suivante : on prend cette tangente horizontale, on dit qu'au point B on a l'origine d'un axe numérique qui est orienté par e1. C'est le même vecteur unitaire qui oriente l'axe des x. Alors, le point d'intersection correspond sur cet axe numérique exactement, à cotangente alpha.

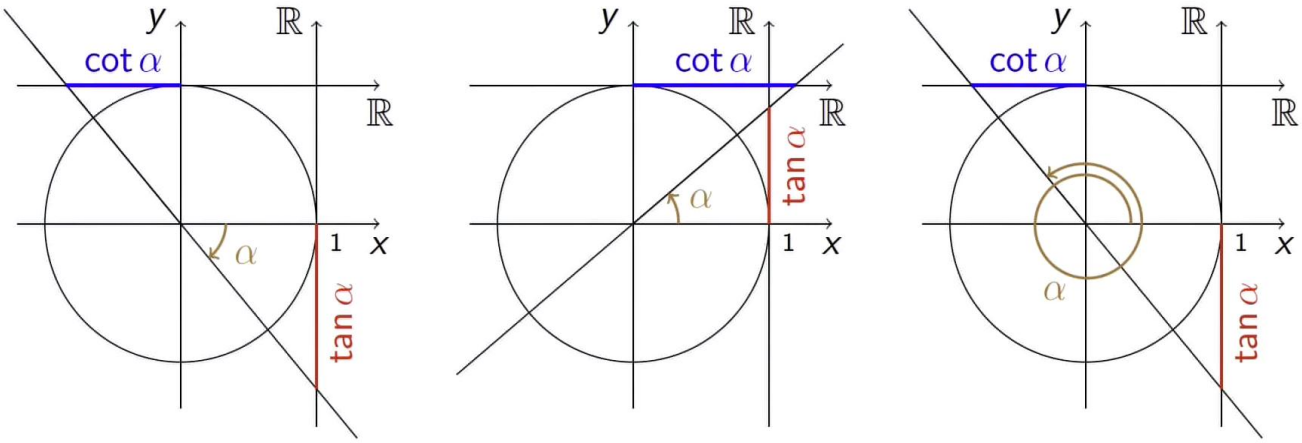
Notes

Summary

13m 25s

Fonctions tangentes et cotangentes : illustrations

Quelques exemples de valeurs de $\tan\alpha$ et $\cot\alpha$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Regardons encore, de plus près, quelques valeurs prises par tangente alpha et cotangente alpha pour quelques valeurs de l'angle alpha. Commençons par un angle alpha sur le quatrième quadrant, qui est légèrement négatif. Ici j'ai le point P alpha, je prends la droite (OPalpha), dessinée ici et je la coupe avec l'axe numérique verticale. Sur la droite, qui me donne tangente alpha négatif je prends l'axe numérique horizontale et j'obtiens, cot alpha qui est négatif. Aussi bien tan alpha, que cot alpha sont négatifs dans ce cas là. Si je prends un angle alpha, quelque peu positif, cette même construction me donne, ici, à la verticale tangente alpha positif et cot alpha, également positif. Dans la troisième figure, nous avons pris un angle qui dépasse deux π et qui se retrouve dans le deuxième quadrant. Il faut prendre cette droite, qui passe par O et P alpha. Il faut la couper avec les deux axes pour obtenir tangente alpha négatif et cot alpha négatif.

Notes

Summary

13m 50s

Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques

On complète le tableau des valeurs remarquables des fonctions trigonométriques :

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	pas défini
cot	pas défini	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Par exemple :

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous connaissons les valeurs des fonctions trigonométriques sin et cos pour quelques angles. Nous avions parlé de valeurs remarquables. Les angles étaient 0, π/6, π/4, π/3, π/2. En degré si vous préférez : 0, 30, 45, 60, 90. On avait trouvé pour le sinus, les valeurs que voici, et pour le cosinus, les valeurs sur la deuxième ligne. On peut en déduire immédiatement les valeurs remarquables, pour tan et cot simplement en faisant les quotients voulus de sin sur cos, respectivement cos sur sin. Par exemple, si je veux connaitre tan de π/6, ça sera ce que j'aimerais avoir ici Je prend sinus π/6 sur cosinus π/6. Je regarde les valeurs ici, 1/2 et (racine de 3)/2. J'amplifie cette fraction par deux, il reste 1 racine de 3. Visuellement nous amplifions par racine de 3 pour obtenir (racine de 3)/3 qui est ici. Si je regarde par exemple, tangente de π/2. Ce n'est pas défini parce que le dénominateur cosinus vaut 0.

Notes

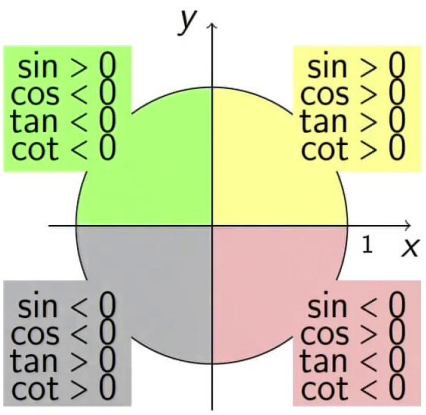
Summary

15m 08s

Signes des fonctions trigonométriques

Voici les signes des fonctions trigonométriques en fonction des quadrants :

	$P(\alpha)$ est situé dans le quadrant			
	un	deux	trois	quatre
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−



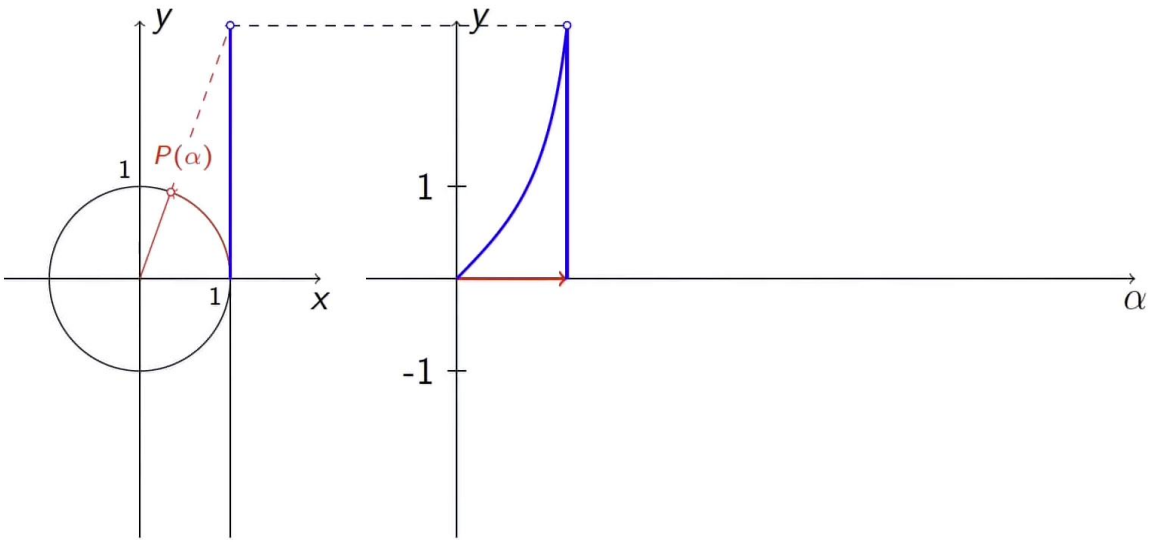
Voici peut être encore un tableau récapitulatif sur le signe des quatre fonctions trigonométriques : sinus alpha, cosinus alpha, tan alpha et cot alpha. Sur le premier cadran, ils sont toujours positifs. Sur le deuxième quadrant, nous savons que le sinus, en tant qu'ordonnée reste positif, le cosinus devient négatif si bien que les quotients sont négatifs sur ce deuxième quadrant. Sur le troisième quadrant, aussi bien l'abscisse que l'ordonnée d'un point Palpha sont négatif, donc sin et cos sont négatifs. Les quotients de ces deux nombres tan et cot sont positifs. Sur le quatrième cadrant finalement, le sin est négatif et le cos est positif, si bien que les quotients tan et cot sont négatifs. Nous avons récapitulé dans ce tableau ces signes. On entend bien que tan et cot ont toujours le même signe.

Notes

Summary

16m 21s

Animation de la fonction tangente



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

REPLAY

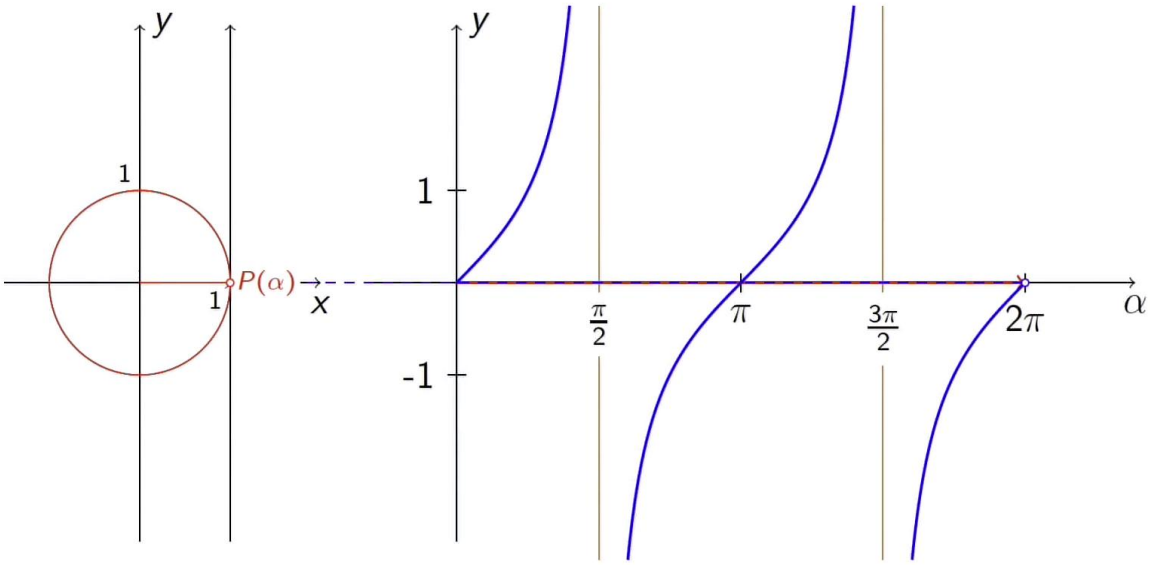
Regardons de plus près quel pourrait être le graphe des fonctions tan et cot. Nous allons procéder de façon tout à fait similaire que pour sin et cos. Nous allons considérer le cercle trigonométrique, l'interprétation sur ce cercle de tan alpha et rapporter les valeurs point par point pour les différentes valeurs de alpha sur un axe alpha y. Vous avez ici la disposition correspondante : le cercle trigonométrique, l'axe numérique vertical qui est tangent, ici, l'axe horizontale alpha, l'axe vertical y et nous allons à présent pour des valeurs de alpha différentes, ici alpha est encore nul Nous allons rapporter la partie tan alpha au dessus de la valeur alpha correspondante sur cet axe ici à droite. Regardons ce qu'il se passe lorsque nous commençons à augmenter alpha légèrement. On voit très bien ici sur ce dessin l'arc alpha, cette longueur est reprise ici à l'horizontale, et la valeur sur l'axe vertical de tan alpha, qui est positif ici est rapportée en ce point. Lorsque alpha se met à augmenter, tan alpha augmente à son tour. Là, alpha commence à s'approcher de π/2.

Notes

Summary

17m 24s

Animation de la fonction tangente



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

REPLAY

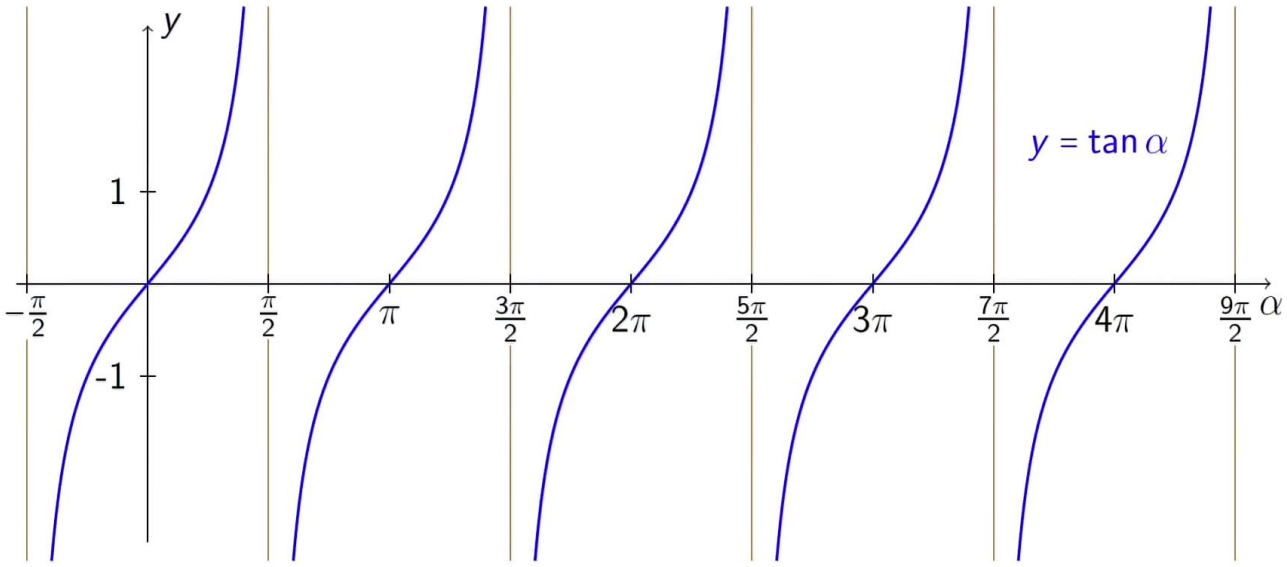
Evidemment, cette construction, lorsque alpha s'approche de π/2 va nous donner des points sur l'axe numérique qui s'éloignent de plus en plus vers le haut, on le voit ici sur ce graphique avec ces points qui prennent la direction du haut. Dès qu'on est à la position π/2, nous allons le voir là tan n'est pas défini, donc pas de valeur correspondante sur le graphe dès que je dépasse, les valeurs correspondantes seront fortement négatives. Regardons cela, là on voit apparaitre ces valeurs négatives si on continue à augmenter alpha, on obtient des tan qui grandissent jusqu'à la position 3π/2, où on a de nouveau ce saut. Là on retrouve de nouveau des valeurs négatives qui deviennent croissantes.

Notes

Summary

18m 48s

Graphe de la fonction tangente



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Voilà ici le graphe de la fonction tan alpha. Pour des valeurs de alpha qui dépassent 2π ce schéma se répète apparemment indéfiniment, nous pouvons quand même faire quelques remarques importantes.

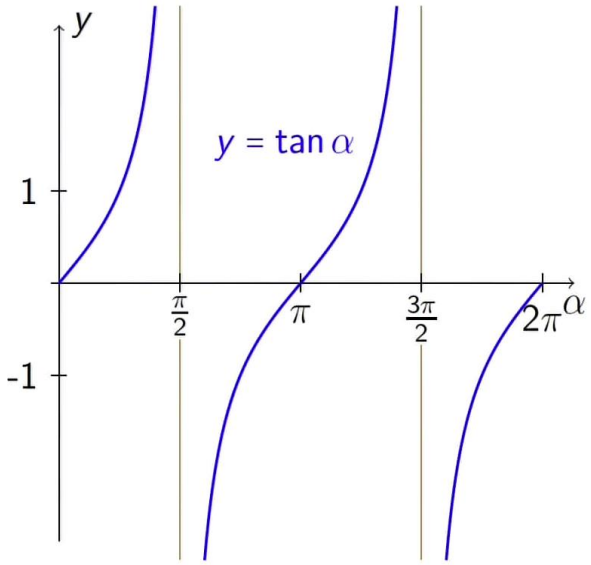
Notes

Summary

19m 44s

Points remarquables et croissance de la tangente

- La fonction tangente n'admet pas d'extremum :
  - ni maximum,
  - ni minimum.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Je vois ici que tan alpha s'annule si alpha vaut 0. Mais je retrouve la valeur de 0 pour π, 2π, 3π, etc. J'aurais 0 toujours, lorsque alpha vaut 0 modulo π Donc, 0 + K fois π avec A dans Z. Contrairement aux fonctions sinus et cosinus la fonction tan n'admet ni un maximum ni un minimum. On le voit très bien sur ce graphique.

Notes

Summary

20m 02s

Points remarquables et croissance de la tangente

- La fonction tangente admet un pôle avec changement de signe en

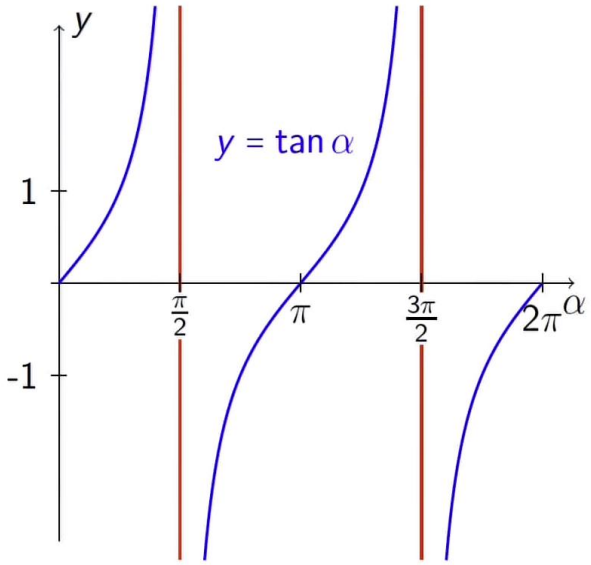
$$\alpha = \frac{\pi}{2} \mod \pi.$$

En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

- $\lim_{\alpha \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)^-} \tan\alpha = +\infty$

et

- $\lim_{\alpha \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)^+} \tan\alpha = -\infty.$



Lorsque je m'approche d'une valeur, disons, π/2, ou 3π/2, etc, donc une valeur π/2 modulo 2π, je constate que la fonction tan a un pôle avec changement de signe. Qu'est ce que cela signifie ? Cela signifie que si je m'approche d'une valeur π/2, pour fixer les idées vous pouvez faire la même chose pour 3π/2, 5π/2, etc, si je m'approche de π/2 depuis la gauche, c'est ce que j'écris ici : alpha va vers π/2, depuis la gauche avec le petit signe - alors tan alpha va devenir de plus en plus grand et va tendre vers + l'infini. En revanche, si je m'approche de π/2 depuis la droite c'est ce que j'écris ici, alpha tend vers π/2 + tan alpha va devenir infiniment petit. C'est vrai modulo π, je peux remplacer π/2 par 3π/2, 5π/2, etc.

Notes

Summary

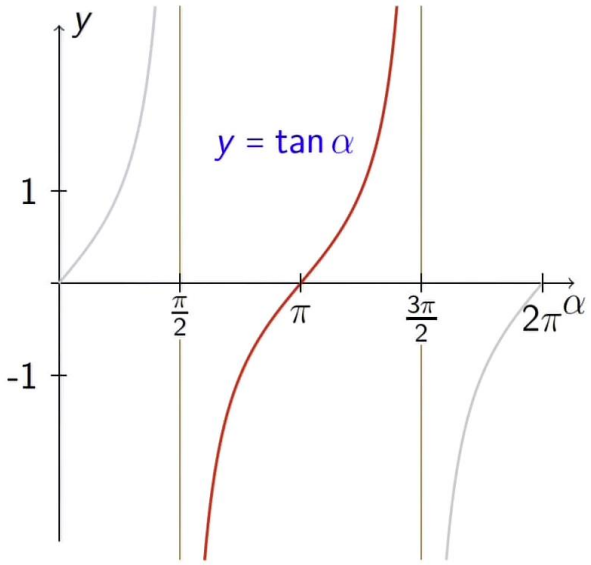
20m 28s

Points remarquables et croissance de la tangente

- La fonction tangente est strictement croissante sur chaque intervalle

$$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\quad (k\in\mathbb{Z}),$$

(sur chaque intervalle de son domaine de continuité).



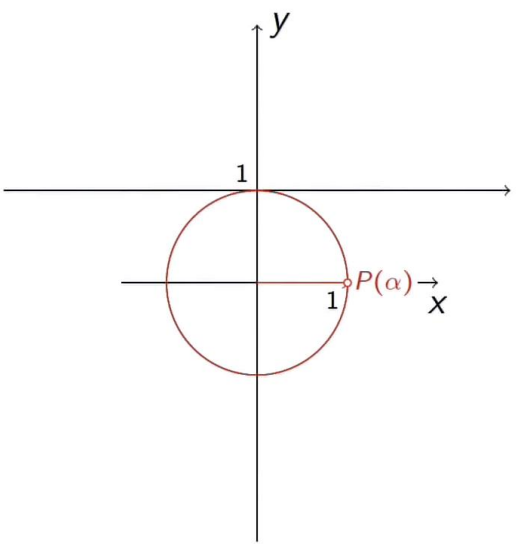
Autre remarque, là aussi cela est très différent de ce que nous avions vu avec le sinus et le cosinus, la fonction tan est strictement croissante entre deux pôles consécutifs. Entre π/2 et 3π/2 par exemple, cette fonction est strictement croissante. On retrouve cette même croissance sur les autres intervalles compris entre deux pôles.

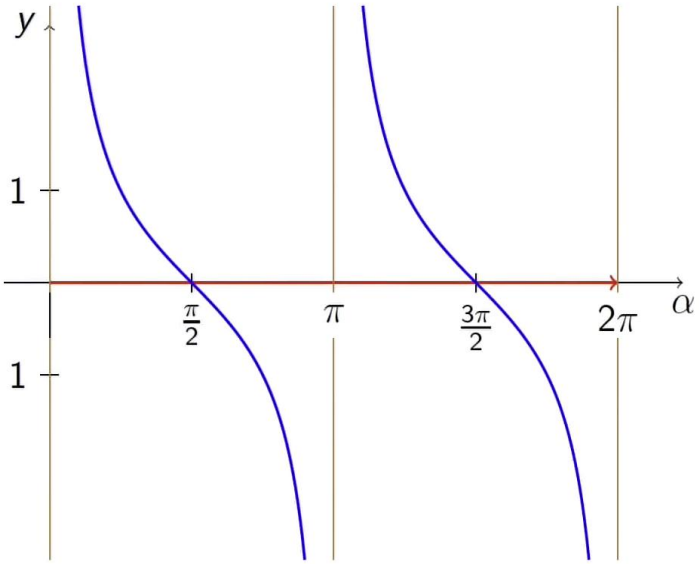
Notes

Summary

21m 23s

Animation de la fonction cotangente





REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

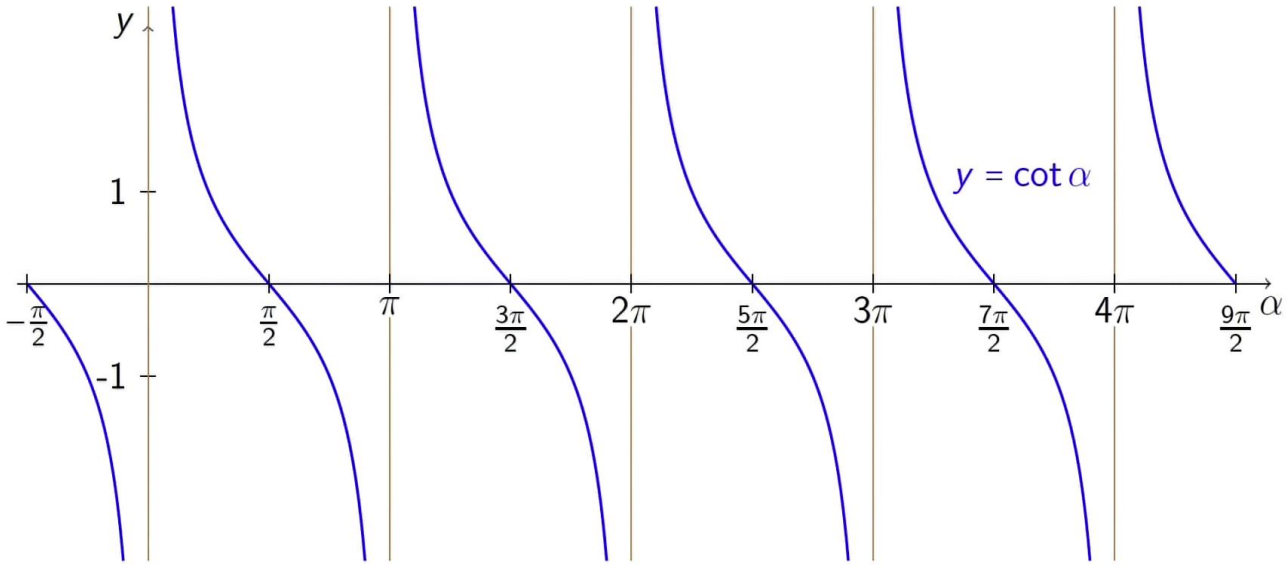
Regardons à présent ce que nous obtenons pour cot si nous procédons de la même façon. Si on essaye de prendre le cercle trigonométrique l'axe numérique horizontale, ici et on reporte sur un système d'axe alpha y les valeurs de cot. Au départ, alpha vaut 0, j'ai déjà le point P alpha La droite (OP) est parallèle à l'axe numérique horizontal c'est-à-dire que cot de 0 ne sera pas défini. Que ce passe t'il si j'augmente quelque peu alpha ? C'est ce que nous avons fait ici, on prend cet angle alpha, on le rapporte ici, la droite (OP) va couper mon axe numérique horizontal ici, la valeur numérique en bleu positive je la rapporte ici à la verticale. Je vois que, cette fois-ci cot a tendance à devenir plus petit. On continue à tourner avec alpha. On obtient 0, des valeurs négatives. Regardons cela d'un peu plus près : La ça s'annule pour π/2, les valeurs deviennent de plus en plus petites. Maintenant je m'approche de π, Là je m'approche de plus en plus de nouveau d'une situation où la droite (OP) sera parallèle à l'axe numérique horizontal. Et pour π/2, je n'aurai pas de cot. Ensuite, on a les animations que vous voyez là. Ces points là, sur cette deuxième partie, sont faits sur le prolongement de (OP), cette fois ci vers le haut.

Notes

Summary

21m 49s

Graphe de la fonction cotangente



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Voici le graphe de cette fonction cot cette fois-ci dessiné sur un tronçon un peu plus long qu'entre 0 et 2π. Il ressemble quelque peu à ce que nous avions vu pour tan mais les différences sont quand même très significatives. Regardons quelques points particuliers, nous verrons que ces points particuliers sont différents.

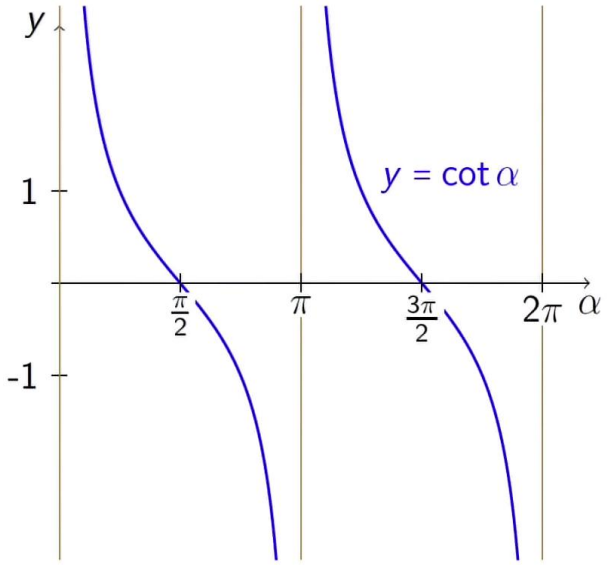
Notes

Summary

23m 27s

Points remarquables et décroissance de la cotangente

- La fonction cotangente n'admet pas d'extremum :
  - ni maximum,
  - ni minimum.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

D'abord cot ne s'annule pas pour 0 mais pour π/2, 3π/2, etc, donc pour π demi modulo π. Ce sont les valeurs où tan n'est pas définie par exemple.

Notes

Summary

23m 47s

Points remarquables et décroissance de la cotangente

- La fonction cotangente admet un pôle avec changement de signe en

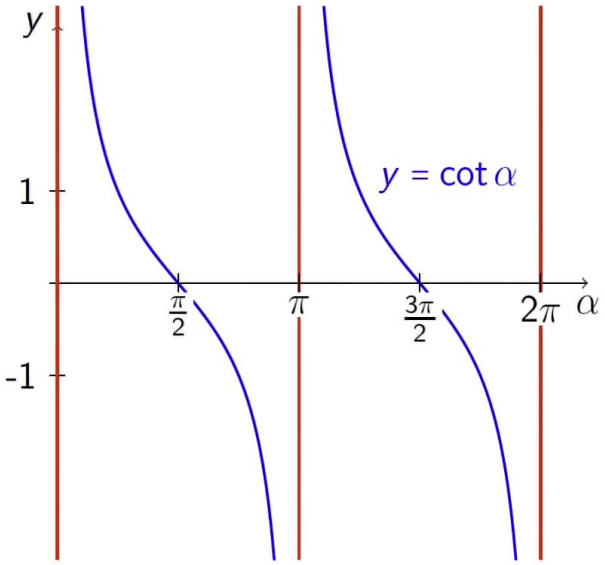
$$\alpha = 0 \mod \pi.$$

En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

- $\lim_{\alpha \to (k\pi)^-} \cot \alpha = -\infty$

et

- $\lim_{\alpha \to (k\pi)^+} \cot \alpha = +\infty.$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

En revanche, comme pour tan, cot n'admet ni maximum ni minimum, mais des pôles, avec changement de signes qui sont cette fois-ci placés au point alpha = 0 modulo π, ce sont les valeurs où tan était nul, cette fois-ci cot possèdes des pôles. Si je m'approche d'une telle valeur, par exemple de π depuis la gauche, la valeur de cot va vers - l'infini. Si je m'approche depuis la droite de π, la valeur va vers + l'infini.

Notes

Summary

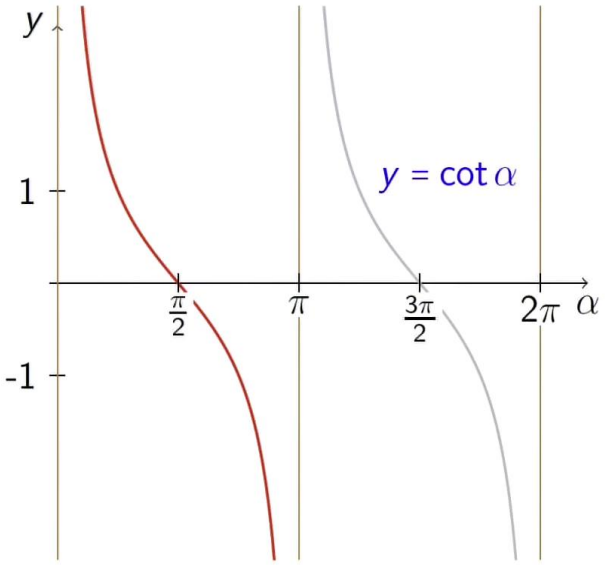
23m 59s

Points remarquables et décroissance de la cotangente

- La fonction cotangente est strictement décroissante sur chaque intervalle

  $]k\pi,\ \pi + k\pi[,\quad (k \in \mathbb{Z}),$

  (sur chaque intervalle de son domaine de continuité).



Là encore, tout comme pour tan, entre deux pôles, la fonction cot est strictement décroissante.

Notes

Summary

24m 36s

Les fonctions tangente et cotangente

Ce que nous avons appris :

- la définition des fonctions tangente et cotangente ;
- leur interprétation sur le cercle trigonométrique ;
- le graphe de ces fonctions ;
- les valeurs remarquables de ces fonctions.

Prochaine étape :

- la périodicité des fonctions tangente et cotangente ;
- la parité de ces deux fonctions ;
- tangente et cotangente des angles supplémentaires ;
- tangente et cotangente des angles complémentaires.

Résumons ! Qu'avons nous appris aujourd'hui ? Nous avons donné les définitions des fonctions tangentes et cotangentes comme quotient des fonctions sinus et cosinus. Nous avons ensuite interpréter, sur le cercle trigonométrique la signification de ces quotients, la signification de tan et cot alpha. Nous avons construit point par point le graphe de ces fonctions. Nous connaissons les valeurs remarquables de ces fonctions. Nous connaissons aussi où sont situés les 0, les pôles de ces fonctions. A la prochaine étape, qu'est ce que nous allons regarder ? Nous allons analyser la périodicité de ces fonctions. Elles sont périodiques, c'est peu surprenant quand on a vu les graphes. Nous allons étudier la parité, c-a-d poser la question : est ce qu'elles sont paires, ou impaires ou ni l'un, ni l'autre ? Et nous allons, comme pour le sinus et le cosinus, nous intéresser à ce qu'il se passe si on prend les angles supplémentaires et complémentaires dans tangente et cotangente. Je vous remercie pour l'attention, à la prochaine !

Notes

Summary

24m 45s