ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les fonctions trigonométriques tangentes et cotangentes et leurs inverses

3.1 La définition des fonctions tangente et cotangente

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

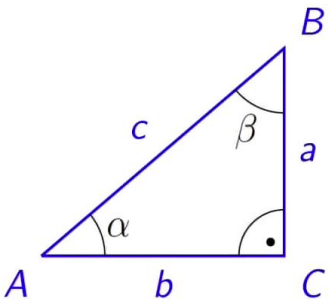
EPFL

Introduction

Dans le cadre de l'étude des triangles rectangles, nous avons montré que les expressions

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

apparaissent de façon naturelle.



Exemple

$$\left.\begin{aligned} a &= c \cdot \sin\alpha \\ b &= c \cdot \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Hallo und herzlich willkommen zu Kapitel drei des Kurses trigonometrische, logarithmische und exponentielle Funtkionen. Ein Kapitel, dass uns neue trigonometrische Funktionen vorstellen wird: Tangens und Kotangens. Heute werden wir uns auf die Definitionen dieser zwei Funktionen konzentrieren. Im Rahmen der Lektion über das rechteckige Dreieck haben wir schon Ausdrücke des Typs sin dividiert durch cosinus von alpha oder cosinus von alpha dividiert durch sinus alpha kennengelernt. Diese Art von Brüchen erscheinen auf natürliche Weise. Ich möchte Ihnen hier nochmal den Kontext erklären, wie sie hergeleitet wurden. In dem rechteckigen Dreieck ABC ist der rechte Winkel bei C, der Winkel alpha bei A und beta bei B mit den Seiten a, b, c nach Standardnomenklatur. Das heißt, die Seite a gegenüber von A, die Seite b gegenüber von B, usw. Wir kennen also die Verhältnisse, die Sie hier wiederfinden. Das heißt, der Quotient a durch c ergibt den Sinus; also ist a/c der sin von alpha oder, wenn man möchte, ist a gegeben durch c mal sin von alpha. Vergleichbar wissen wir, dass b gleich c * cos von alpha ist. Wenn man nun die zweite Gleichung nimmt und für c löst, bleibt mir für c, b durch cos alpha, ein Wert, den ich einsetzen kann in der ersten Zeile.

Notes

Summary

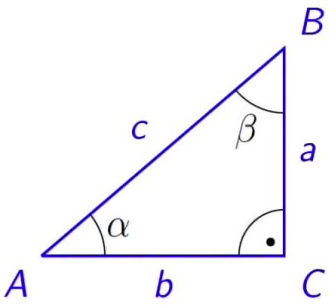
0m 04s

Introduction

Dans le cadre de l'étude des triangles rectangles, nous avons montré que les expressions

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

apparaissent de façon naturelle.



Exemple

$$\left.\begin{aligned} a &= c \cdot \sin\alpha \\ b &= c \cdot \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Also b durch cosinus alpha. Was mir für a die Gleichung b mal eben diesen Quotient sinus alpha dividiert durch cosinus alpha. Dieser Quotient leitet sich also ganz natürlich im Kontext des rechteckigen Dreiecks her.

Notes

Summary

1m 39s

Définition : fonction cotangente

Définition

La fonction *cotangente*

$$\cot : \mathbf{D}_{\cot} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \mapsto \cot \alpha := \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

est définie comme quotient des fonctions cosinus et sinus.

Elle est définie sur le domaine

$$\mathbf{D}_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \} .$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Geben wir nun der Tangensfunktion eine präzise Definition. Die Tangensfunktion, die sich mit tan abkürzt, wird in einer Teilmenge definiert, die wir noch analysieren werden. In einer Teilmenge von reellen Zahlen ergibt sie für eine reelle Zahl von alpha eine reelle Zahl für tangens alpha, die ich als Quotient des sinus alpha und cosinus alpha erhalte. Man sieht gleich, dass man mit dieser Definition so seine Probleme bekommen könnte, man muss unbedingt vermeiden, mit null zu dividieren. Jedoch kann der cosinus von alpha null sein. Wir kennen die Nullstellen des cosinus alpha. Der cosinus alpha ist gleich null für π halbe modulo π. Man muss alle diese Werte aus der Definitionsmenge ausnehmen, für die der cosinus alpha gleich null ist. Man muss von der Definitonsmenge ausschließen π halbe + K x π mit K, ein Element aus Z Sehen wir uns die Definition des Kotangens an. Sie ist auch eine Funtkion, die aus einer Teilmenge an reellen Zahlen wieder reelle Zahlen ergibt. Wir kürzen diese Funktion mit cot ab, sie nimmt eine reelle Zahl für alpha und ergibt eine reelle Zahle für den kotangens alpha. Diesmal ist aber der Quotient nicht sinus alpha durch cosinus alpha sondern cosinus alpha dividiert durch sinus alpha.

Notes

Summary

1m 54s

Définition : fonction cotangente

Définition

La fonction *cotangente*

$$\cot : \mathbf{D}_{\cot} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \mapsto \cot \alpha := \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

est définie comme quotient des fonctions cosinus et sinus.

Elle est définie sur le domaine

$$\mathbf{D}_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \, : \, k \in \mathbb{Z} \} .$$

Wir haben hier das gleiche Problem wie vorhin, es muss vermieden werden, durch 0 zu dividieren. Man muss als Defintionsmenge der Funktion cot "Dcot" nehmen. Man muss alle reellen Zahlen nehmen außer jene, die sich bei sinus alpha anullieren. Das heißt, K mal π, mit K als Teil von Z.

Notes

Summary

3m 21s

Remarque

Pour tout $\alpha \in \mathbf{D}_{\tan} \cap \mathbf{D}_{\cot}$, on a

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{et} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$, on a

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \qquad \text{et} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}.}$$

Es stellt sich die Bemerkung, wenn ich einen Winkel wähle, der sich in beiden Definitionsmengen befindet, also kein Vielfaches von π halbe ist, habe ich tangens von alpha ist sinus alpha durch cosinus alpha und ich habe cot ist cosinus alpha durch sinus alpha. Man sieht sofort, dass man tangens alpha erhalten kann, wenn man 1 durch cot alpha dividiert und umgekehrt, cot alpha ist gleich 1 durch tangens alpha.

Notes

Summary

3m 40s

Relation de Pythagore

On a établi au chapitre précédent que

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R})\,.$$

On en déduit les deux relations suivantes :

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan})$$

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2\alpha &= 1 + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \\ &= \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \\ &= \frac{1}{\cos^2\alpha}\,. \end{aligned}$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir haben in einem vorherigen Kapitel ein Verhältnis etabliert, das von Pythagoras stammt. In der Tat ist der Punkt P alpha am trigonometrischen Kreis auf einem Kreis mit Radius 1 wenn seine Koordinaten cosinus alpha und sinus alpha lauten und man die Gleichung ausfüllt cosinus² + sinus² ist gleich 1. Dies ist für alle reellen Zahlen wahr. Wir haben als Konsequenz daraus zwei Zusammenhänge, die diese drei Zeichen Tangens und Kotangens verbinden. Hier die erste: nimmt man 1 + tan², erhält man 1 sur cosinus² für jedes alpha, bei dem diese Relation Sinn ergibt. Es müssen also alle alpha augeschlossen werden, wp cosinus alpha gleich null ist oder der tangens nicht definiert ist. Es ist genau gleich, man muss alle alpha annehmen, die sich in der "Defintionsmenge der tangens Funktion" befinden. Wie erhält man diese Gleichung, wenn man von der vorherigen ausgeht? Sehen Sie hier: Es genügt, sich 1 + tan² alpha auszurechnen. Man ersetzt tan alpha durch seine Definition, das heoßt durch sinus alpha dividiert durch cosinus alpha. Dieser Bruch muss nun zum Quadrat gesetzt werden. Ich habe den Zähler und den Nenner getrennt zum Quadrat gesetzt und addiere nun indem ich auf den gleichen Nenner setze wird die 1 zu cos² alpha und sinus² alpha zum Rest.

Notes

Summary

4m 10s

Relation de Pythagore

On a établi au chapitre précédent que

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R})\,.$$

On en déduit les deux relations suivantes :

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan})$$

et

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\,, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\cot})\,.$$

$$\begin{aligned} 1 + \cot^2\alpha &= 1 + \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \\ &= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \\ &= \frac{1}{\sin^2\alpha}\,. \end{aligned}$$

Und nun sehe ich im Zähler diese erste Gleichung, die sagt cos² + sin² ergeben 1. Es bleibt mir 1 durch cos² alpha. Ähnlich kann ich vorgehen, wenn ich die Summe aus 1 und cot alpha² nehme, diesmal erhalte ich 1 durch sinus² alpha. Wieder ist diese Gleichung dadurch definiert, wenn ich alpha aus der Definitionsmenge von cot nehme, da es genau die Domäne ist, in der sich sinus nicht anulliert. Auch hier kann man diese Formel direkt von der grundlegenden Formel cos² + sin² = 1 ableiten. Ich nehme 1 + cot² und ersetze durch cos² dividiert durch sin². Ich setze auf den gleichen Nenner. Und sehe nun im Zähler diese erste Gleichung erscheinen sin² + cos², die 1 ergibt und erhalte 1 durch sin² von alpha.

Notes

Summary

5m 42s

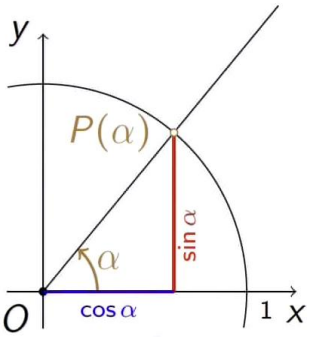
Interprétation géométrique de la tangente

Si $P(\alpha)$ est dans le premier quadrant :

$$\alpha \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\mod 2\pi,$$

alors $\sin\alpha > 0$ et $\cos\alpha > 0$.

Donc $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0$.



Wir haben also eine Definition für eine neue Funktion, der Tangens. Für den Kotangens ebenfalls, konzentrieren wir uns aber vorerst auf den Tangens. Für sin und cos haben wir eine visuelle Darstellung auf dem trigonometrischen Kreis. Das bedeutet für den cosinus haben wir den Wert auf der X-Achse eines Punktes P auf dem trigonometrischen Kreis. Der sinus von alpha liest sich durch den Wert auf der Y-Achse des trigonometrischen Kreises. Versuchen wir auf diesem trigonometrischen Kreis, auch eine geometrische Interpretation für den tangens von alpha zu finden. Beginnen wir unseren Versuch in dem, was wir den ersten Quadranten nennen. Der erste Quadrant des trigonometrischen Kreises... Sie haben hier einen Ausschnitt des trigonometrischen Kreises gezeichnet. Der erste Quadrant befindet sich hier, das heißt, dass der Punkt P sich immer in diesem Bereich auf diesem Viertel des trigonometrischen Kreises befinden muss. Das heißt auch, dass der Winkel alpha einen Wert zwischen 0 und π halbe modulo 2π hat. In diesem ersten Quadrant ist der Wert des cosinus positiv, der sinus ist positiv, hier der Punkt P und die geometrische Interpretation des cosinus und sinus als X- und Y-Werte des Punktes P alpha.

Notes

Summary

6m 35s

Interprétation géométrique de la tangente

Si $P(\alpha)$ est dans le premier quadrant :

$$\alpha \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\mod 2\pi,$$

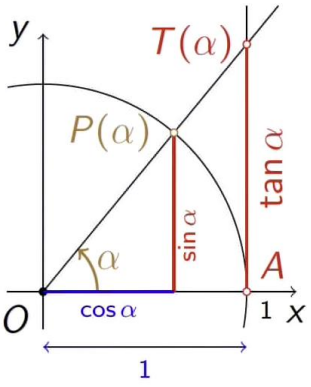
alors $\sin\alpha > 0$ et $\cos\alpha > 0$.

Donc $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0$.

Par Thalès, on a :

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \overline{AT}.$$

Donc $\tan\alpha$ est l'ordonnée du point T.



Per Definition ist der tan der Quotient aus sinus alpha durch cosinus alpha und dadurch, dass beide Werte positiv sind ist der Wert für tan alpha ebenfalls positiv. Wenden wir das in dieser Situation an, bei der ich eine tan durch einen Punkt, den ich A genannt habe, gezeichnet habe mit den Koordinaten (1;0), eine Tangente zum trigonometrischen Kreis. Wenden wir den Satz des Thales bei dieser Situation an. Auf der einen Seite habe ich den Quotient aus sinus alpha durch cosinus alpha. Und mit dem Satz des Thales kann ich dieses Verhältnis durch den Abstand zwischen A und T alpha dividiert durch den Abstand zwischen 0 und A ersetzen. Da der Abstand zwischen 0 und A 1 beträgt, bleibt mir nur die Länge AT. Dadurch dass tan positiv ist, bedeutet das, dass die Länge AT genau den Wert von tan alpha hat, so wie ich es hier geschrieben habe. Man kann die Situation folgendermaßen zusammenfassen: tan alpha ist gleich dem Y-Wert des Punktes T. Der Punkt T ist von alpha abhängig, er wird einfach dadurch erhalten, indem man den Abschnitt 0 P alpha auf eine Gerade verlängert, die die Tangente in P alpha schneidet.

Notes

Summary

7m 40s

Interprétation géométrique de la tangente

Si $P(\alpha)$ est dans le deuxième quadrant :

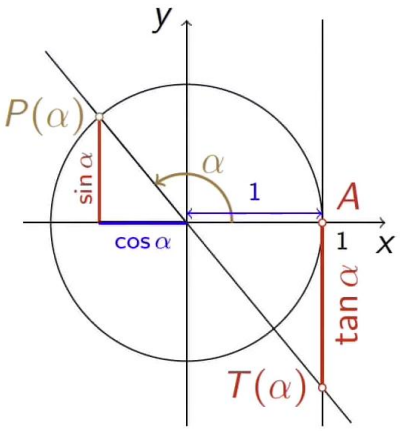
$$\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\mod 2\pi,$$

alors $\sin\alpha > 0$ et $\cos\alpha < 0$.

Donc $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0$.

Comme précédemment, par Thalès, on vérifie que

$\tan\alpha$ est l'ordonnée du point T.



Sehen wir nun, was in dem zweiten Quadranten passiert. Der zweite Quadrant - man sagt, dass alpha im zweiten Quadrant ist, wenn P alpha sich auf diesem Viertel des Kreises befindet. Das bedeutet, dass der Winkel alpha zwischen π halbe und π auf 2 π genau, also modulo 2π, sein muss. In diesem Fall bleibt der sinus positiv, aber der cosinus ist negativ genau so wie tan alpha. Somit wird der Quotient aus sinus und cosinus auch negativ. Trotzdem kann man die Idee von vorhin verfolgen. Man kann den Satz von Thales verwenden und daraus schließen, dass sinus alpha durch cos alpha hier gegeben durch tangens alpha dividiert durch 1, also findet man tan alpha hier wieder. Auch wenn das Ergebnis negativ sein muss. In der Tat fällt mir auf, dass das was wir gelernt haben wieder Anwendung findet, das heißt, das tan alpha den Y-Wert des Punktes T alpha hat. Dieses Mal ist der Y-Wert negativ, so wie er sein sollte.

Notes

Summary

9m 05s

Interprétation géométrique de la tangente

Il en est de même si $P(\alpha)$ est dans le troisième quadrant :

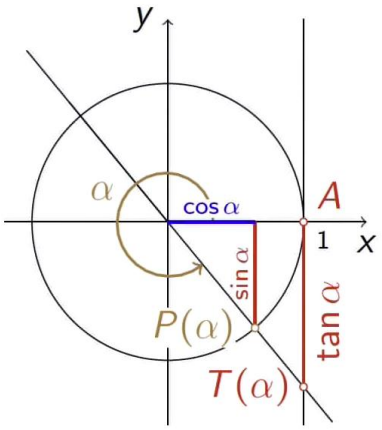
$\sin\alpha < 0 \quad \text{et} \quad \cos\alpha < 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha > 0\,.$

Et si $P(\alpha)$ est dans le quatrième quadrant :

$\sin\alpha < 0 \quad \text{et} \quad \cos\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha < 0\,.$

$$\forall\,\alpha \in \mathbf{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \tfrac{\pi}{2} + k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$\tan\alpha$ est l'ordonnée du point T.



Im dritten Quadranten, ich glaube Sie haben es erraten, (Unschlüssigkeit) das ist, wenn P alpha sich in diesem Viertel des Kreises befindet. In diesem Fall haben wir einen negativen sinus und cosinus, obgleich tan, da er der Quotient aus zwei negativen Zahlen ist, positiv sein wird. Man kann nun das Spiel mit dem Satz des Thales wiederholen. Der Quotient aus sinus alpha durch cos alpha ist gegeben durch tan alpha durch 1. Man bemerkt nun, indem man tan alpha auf dieser Seite wählt, einen positiven Wert für tan alpha erhält, so wie es sein sollte. Man muss also diesmal das Segment 0 P alpha verlängern mit einer Geraden, die die Tangente vertikal schneidet. Zu guter Letzt findet man im vierten Quadranten die erwartete Situation. Dieses mal ist der sin negativ, der cos ist posititv, der Quotient muss negativ sein und die Konstruktion, die wir in den ersten drei Quadranten gemacht haben, wenn man die hier zeichnet, ich wiederhole O P, die Gerade (OP), wenn diese mit der vertikalen Tangente schneidet, bekomme ich hier einen Punkt T alpha, dessen negativer Y-Wert genau den Wert des tangens alpha gibt. Man kann das Ergebnis hier am Post-it festhalten. Für jeden Winkel alpha, der sich innerhalb der Definitionsmenge des tangens von alpha befindet, ist tan alpha der Y-Wert des Punktes P, der dem Winkel alpha entspricht.

Notes

Summary

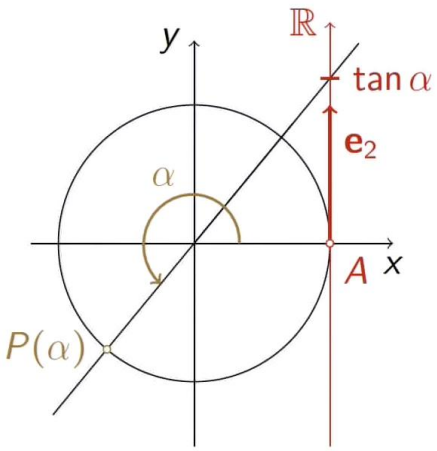
10m 07s

Axe des tangentes

La valeur de la tangente de l'angle α se mesure sur l'axe des tangentes :

- droite numérique tangente au cercle trigonométrique en A,
- d'origine A et
- orientée par le vecteur $\mathbf{e}_2$;

elle est déterminée par l'intersection de la droite $OP(\alpha)$ avec cet axe.



Man kann diese Konstruktion auch etwas anders formulieren. Man führt durch diese vertikale Tangente, die zum Schluss auch namensgebend für tan alpha war. Wie werden sie als eine Achse annehmen, das heißt, dass diese Gerade durch denn Vektor e2 gegeben ist, der gleiche Vektor, der auch die Y-Achse angibt. Der Ursprung ist am Punkt A fixiert, hier der der Punkt (1;0). In diesem Fall nimmt man die Gerade (OPalpha), die diese Gerade vertikal schneidet, hier in rot, in einem Punkt, der genau den Wert von tan alpha als numerische Gerade darstellt.

Notes

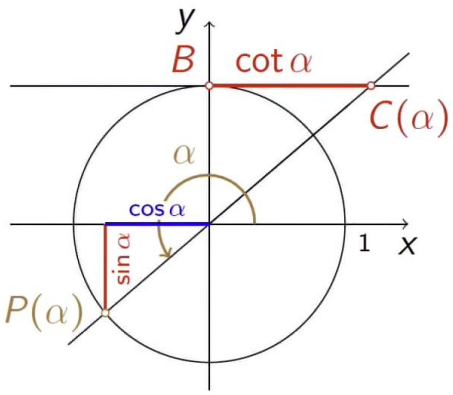
Summary

11m 40s

Interprétation géométrique de la cotangente

De façon analogue,

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{D}_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z} \},$$
$$\cot\alpha \text{ est l'abscisse du point } C.$$



Was ist nun mit dem Kotangens und seiner geometrischen Interpretation? Man kann hier ganz analog fortfahren. Hier sehen wir ein Beispiel aus dem dritten Quadranten. In diesem dritten Quadranten finden wir den cosinus alpha - negativ; den sinus alpha - negativ; der Quotient muss daher positiv sein. Ich nehme wieder die Gerade (OPalpha), diesmal muss man sie mit einer horizontalen Tangente schneiden, die durch einen Punkt geht, den ich hier B nenne, ein Punkt mit den Koordinaten (0;1). Hier ist der Schnittpunkt, den ich C genannt habe und der von alpha abhängig ist, und einen X-Wert hat, der dem Wert des kotangens alpha entspricht. Man sieht eindeutig, dass dieser X-Wert positiv ist, was auch dem Vorzeichen des kotangens entspricht. Man kann sich also auch hier merken, was auf dem Post-it festgehalten ist: Der kotangens alpha ist immer der X-Wert dieses Punktes C.

Notes

Summary

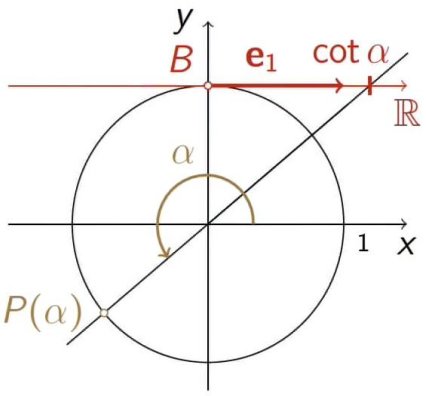
12m 28s

Axe des cotangentes

La valeur de la cotangente de l'angle α se mesure sur l'axe des cotangentes :

- droite numérique tangente au cercle trigonométrique en B,
- d'origine B et
- orientée par le vecteur $\mathbf{e}_1$;

elle est déterminée par l'intersection de la droite $OP(\alpha)$ avec cet axe.



Auch hier kann man das folgender Weise formulieren: man nehme diese horizontale Tangente und sagt, dass man im Punkt B den Ursprung einer numerische Achse hat, die durch den Vektor e1 gegeben ist. Es ist der gleiche unitäre Vektor, der auch die X-Achse orientiert. Somit gibt der Schnittpunkt auf dieser numerischen Achse ganz genau den kotangens alpha.

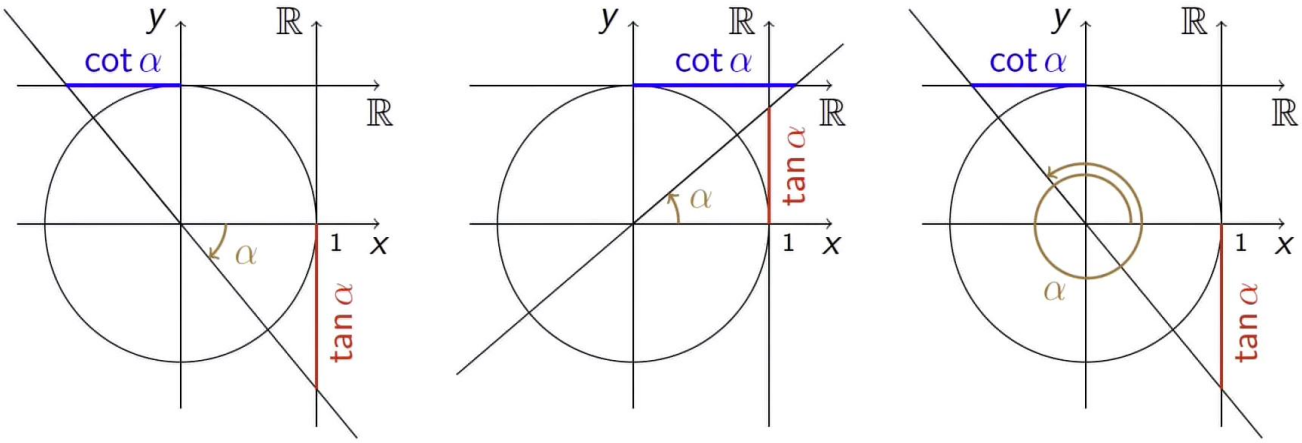
Notes

Summary

13m 25s

Fonctions tangentes et cotangentes : illustrations

Quelques exemples de valeurs de $\tan\alpha$ et $\cot\alpha$



Sehen wir uns nun noch genauer an, welche Werte von tangens alpha und kotangens alpha für entsprechende Werte des Winkel alpha angenommen werden. Beginnen wir mit einem Wert für den Winkel alpha, der im vierten Quadrant liegt und leicht negativ ist. Hier habe ich den Punkt P alpha, ich nehme die Gerade (OPalpha), die hier gezeichnet ist und schneide sie mit der vertikalen numerischen Achse. Auf der Geraden, die mir einen negativen tangens alpha gibt, nehme ich die horizontale numerische Achse und bekomme cot alpha, der negativ ist. In diesem Fall sind sowohl tan alpha als auch cot alpha negativ. Wenn ich einen Winkel alpha wähle, der etwas positiv ist, dann gibt mir die gleiche Konstruktion hier zur vertikalen Tangente tan alpha positiv und cot alpha ebenfalls positiv. Im dritten Beispiel haben wir einen Winkel gewählt, der größer als zwei π ist und sich somit im zweiten Quadranten befindet. Man muss diese Gerade wählen, die durch O und P alpha führt. Man muss sie mit beiden Achsen schneiden, damit man einen negativen tangens alpha und einen negativen cot alpha erhält.

Notes

Summary

13m 50s

Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques

On complète le tableau des valeurs remarquables des fonctions trigonométriques :

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	pas défini
cot	pas défini	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Par exemple :

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir kennen die Werte der trigonomischen Funktionen sin und cos für einige Winkel. Wir haben schon von besonderen Werten gesprochen. Die Winkel waren 0, π/6, π/4, π/3, π/2. Wenn Sie es in Grad bevorzugen: 0, 30, 45, 60, 90. Wir haben für sinus folgende Werte hier und für cosinus die Werte in der zweiten Zeile. Man kann nun sofort die besonderen Werte für tan und cot herausfinden, indem man einfach die Quotienten aus sin durch cos und cos durch sin respektive rechnet. Wenn ich zum Beispiel den Wert von tan π/6 kennen möchte, dann muss ich hier nachsehen. Ich nehme sinus π/6 durch cosinus π/6. Ich schaue auf die Werte hier, 1/2 und (Wurzel aus 3)/2. Ich multipliziere diesen Bruch mit zwei, es bleibt 1 durch Wurzel aus 3. Wir multiplizieren nun bildlich mit Wurzel 3, um (Wurzel aus 3)/3 zu bekommen, was hier ist. Wenn ich zum Beispiel den tangens von π/2 nehme, dann ist dieser nicht definiert, da der cosinus im Nenner gleich 0 ist.

Notes

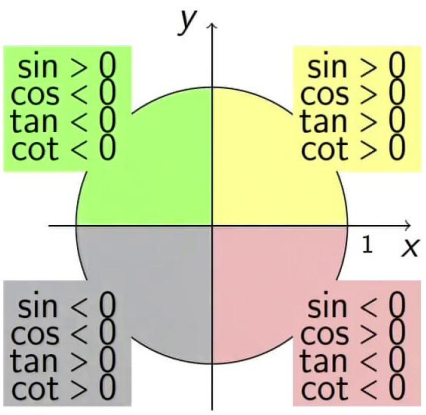
Summary

15m 08s

Signes des fonctions trigonométriques

Voici les signes des fonctions trigonométriques en fonction des quadrants :

	$P(\alpha)$ est situé dans le quadrant			
	un	deux	trois	quatre
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

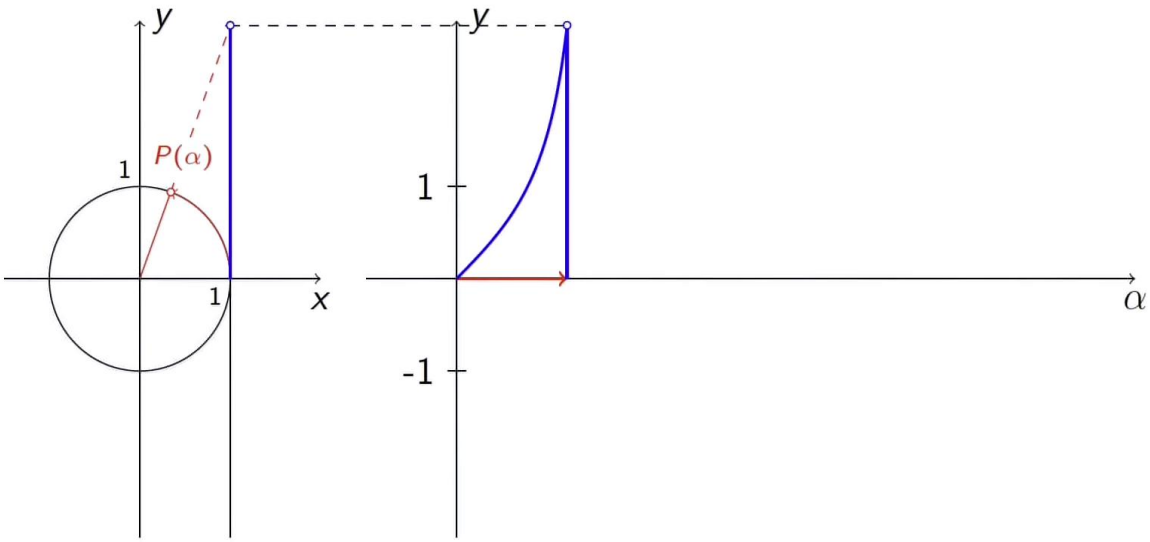
Hier vielleicht noch eine zusammenfassende Tabelle zum Vorzeichen der vier trigonometrischen Funktionen: sinus alpha, cosinus alpha, tan alpha und cot alpha. Im ersten Quadranten sind alle immer positiv. Im zweiten Quadranten haben wir sinus, der dem Wert auf der Y-Achse entspricht und somit positiv ist, der cosinus wird negativ genauso wie die Quotienten im zweiten Quadranten negativ sind. Im dritten Quadranten sind sowohl die X-Werte als auch die Y-Werte eines Punktes P negativ, somit sind sin und cos auch negativ. Die Quotienten dieser Zahlen hingegen tan und cot sind positiv. Zum Schluss im vierten Quadranten ist der sin negativ und der cos positiv, somit sind auch die Quotienten daraus tan und cot negativ. Wir haben in dieser Tabelle die Vorzeichen zusammengefasst. Man sieht sofort, dass tan und cot immer das gleiche Vorzeichen haben.

Notes

Summary

16m 21s

Animation de la fonction tangente



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

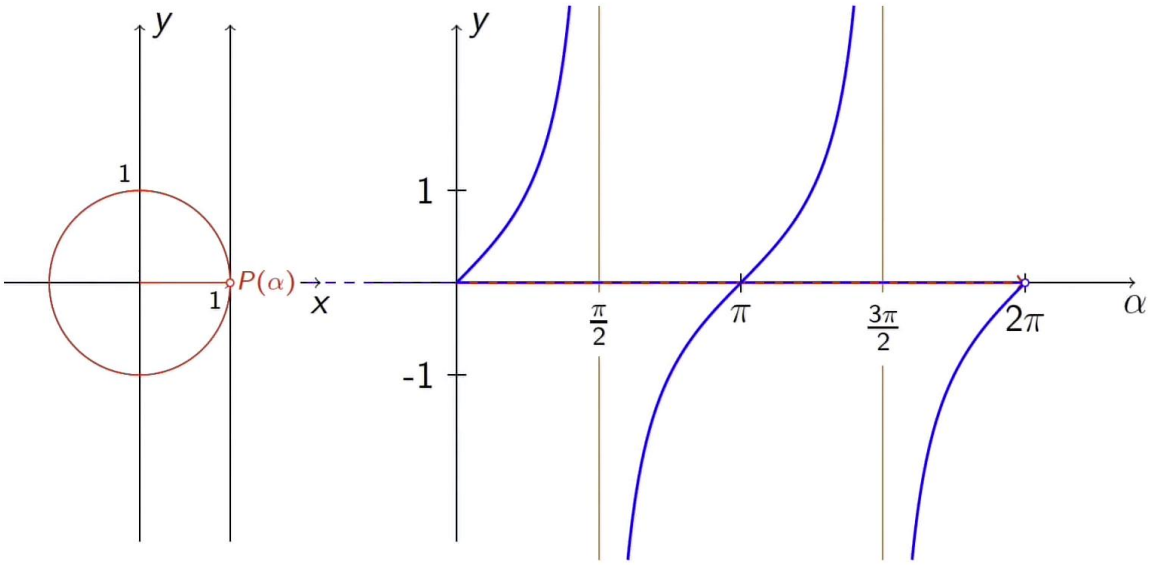
Sehen wir uns nun genauer an, welche Kurven zu den Funktionen tan und cot gehören. Wir werden in gleicher Art und Weise wie für sin und cos fortfahren. Nehmen wir den trigonometrischen Kreis an und die Interpretation von tan alpha auf diesem Kreis und tragen die Werte Punkt für Punkt für die verschiedenen Werte von alpha auf ein Koordinatensystem alpha und Y ein. Sie haben hier schon bereitgestellt: den trigonometrischen Kreis, die vertikale numerische Achse, die der tangens ist und hier die horizontale Achse alpha, die vertikale Y-Achse und wir werden nun für unterschiedliche alpha Werte, hier ist alpha gleich null, den Teil für tan alpha über den Wert von alpha hier auf dieser Achse rechts eintragen. Sehen wir nun, was passiert, wenn wir den Wert für alpha leicht erhöhen. Man sieht auf dieser Zeichnung arc alpha sehr gut, diese Länge wird hier auf der Horizontalen abgelesen und der Wert auf der vertikalen Achse von tan alpha, der hier positiv ist, wird auf diesen Punkt übertragen. Wenn der Wert für alpha steigt, steigt auch der für tan alpha. Hier fängt alpha an, sich π/2 zu nähern. Natürlich wird uns diese Konstruktion, sobald alpha sich π/2 nähert, Punkte ergeben, die sich auf der numerischen Achse voneinander entfernen, immer mehr nach oben.

Notes

Summary

17m 24s

Animation de la fonction tangente



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

REPLAY

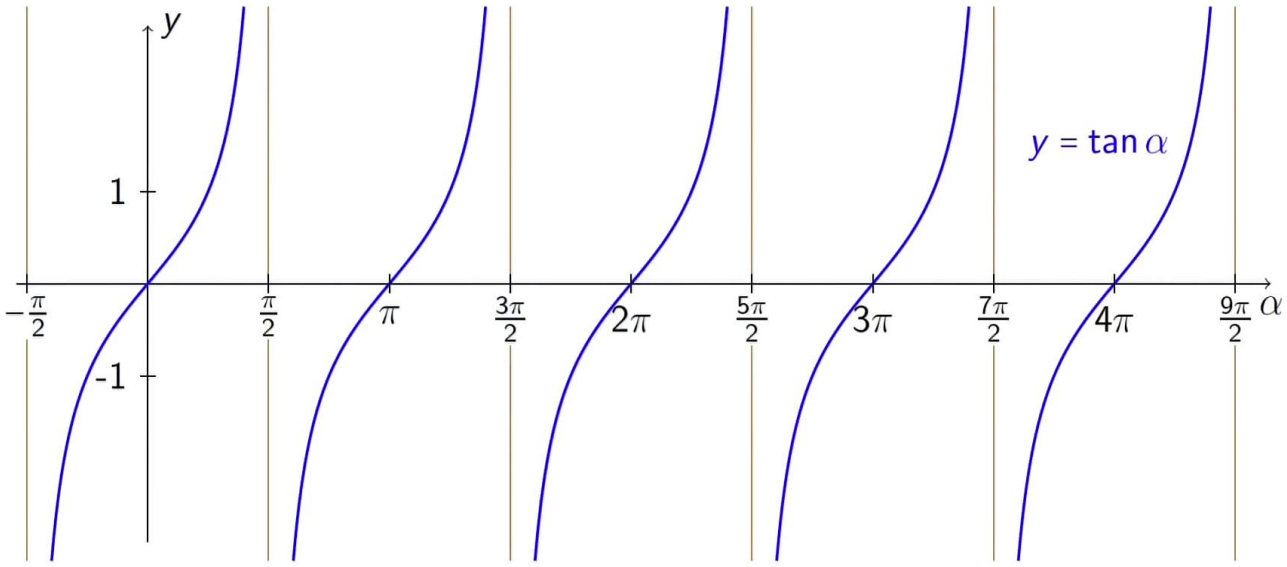
Das sieht man hier auf dieser Grafik, mit den Punkten, die sich nach oben bewegen. Sobald wir bei π/2 angelangt sind, werden wir sehen, dass tan nicht definiert ist, also keinen entsprechenden Wert auf dieser Grafik hat. Sobald ich darüber bin, werden die entsprechenden Werte stark negativ ausfallen. Sehen wir uns das an. Hier sieht man die negativen Werte erscheinen, wenn man alpha weiter vergrößert, erhält man Werte für tan, die ansteigen bis zur Position von 3π/2, wo man dann erneut diesen Sprung hat. Hier finden sich erneut negative Werte wieder, die dann ansteigen.

Notes

Summary

19m 02s

Graphe de la fonction tangente



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Hier die Kurve der Funktion tan alpha. Für Werte von alpha größer als 2π wiederholt sich dieses Schema unendlich, wie es scheint.

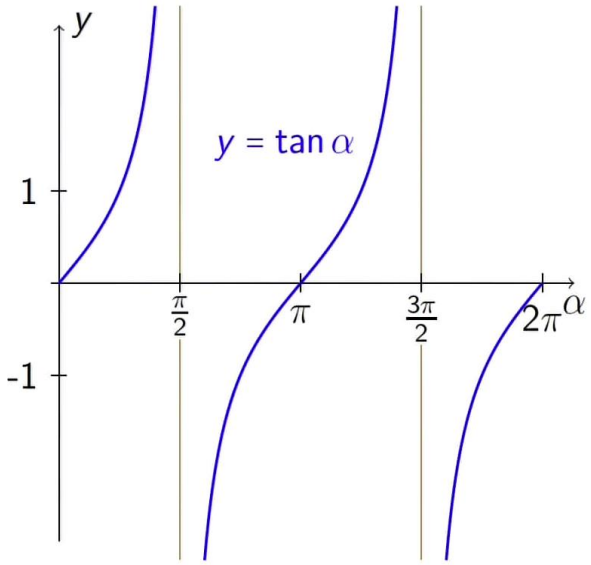
Notes

Summary

19m 44s

Points remarquables et croissance de la tangente

- La fonction tangente n'admet pas d'extremum :
  - ni maximum,
  - ni minimum.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Trotzdem können wir noch einige wichtige Bemerkungen dazu machen. Hier sehe ich, dass tan alpha gleich null ist, wenn alpha 0 ist. Ich finde die Nullstellen jedoch auch für π, 2π, 3π, etc. Ich habe immer eine Nullstelle, wenn alpha gleich 0 modulo π ist. Sprich 0 + K mal π mit K Teil von Z. Im Gegensatz zu den sinus und cosinus Funktionen hat tan weder ein Maximum noch ein Minimum. Das sieht man bei dieser Kurve sehr gut.

Notes

Summary

19m 58s

Points remarquables et croissance de la tangente

- La fonction tangente admet un pôle avec changement de signe en

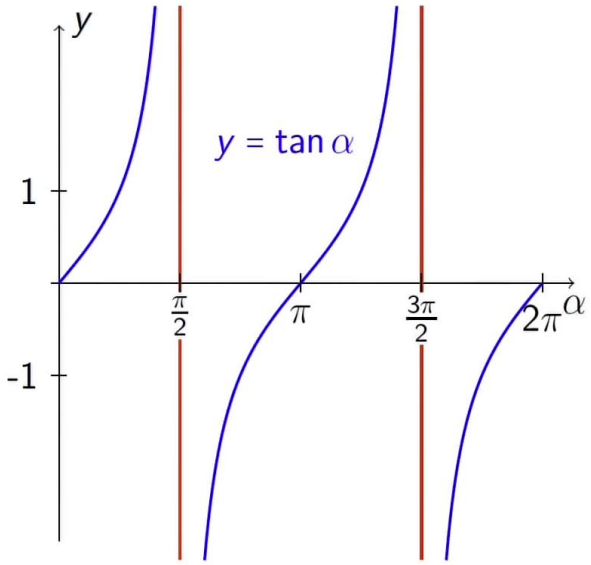
$$\alpha = \frac{\pi}{2} \mod \pi.$$

En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

- $\lim_{\alpha \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)^-} \tan\alpha = +\infty$

et

- $\lim_{\alpha \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)^+} \tan\alpha = -\infty.$



Wenn ich mich einem bestimmten Wert nähere, wie zB π/2, oder 3π/2, usw, also einem Wert π/2 modulo 2π, dann sieht man, dass die tan Funktion eine Spitze mit einem Wechsel des Vorzeichen zeigt. Was bedeutet das nun? Das bedeutet, dass wenn ich mich dem Wert π/2 annähere, um Ihnen das nochmal klar zu machen, das Gleiche gilt für 3π/2, 5π/2, usw, also wenn ich mich π/2 von der linke Seite nähere, dann hat man, was ich nun aufschreibe: alpha tendiert zu π/2 von der linke Seite mit dem kleinen - Zeichen, also wird tan alpha immer und immer größer werden und nach + unendlich tendieren. Wenn ich mich allerdings π/2 von rechts nähere, das schreibe ich hier auf, alpha tendiert zu π/2 + dann wird tan alpha unendlich klein. Es ist tatsächlich modulo π, ich kann π/2 durch 3π/2, 5π/2, usw ersetzen.

Notes

Summary

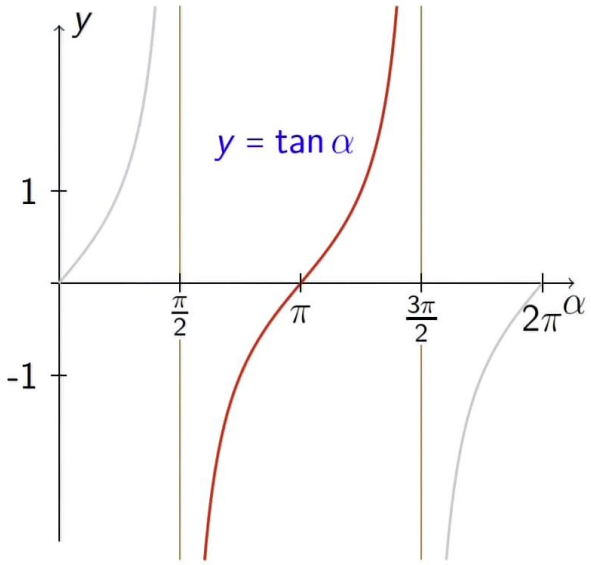
20m 28s

Points remarquables et croissance de la tangente

- La fonction tangente est strictement croissante sur chaque intervalle

$$\left]-\frac{\pi}{2}+k\,\pi\,,\ \frac{\pi}{2}+k\,\pi\right[,\quad (k\in\mathbb{Z}),$$

(sur chaque intervalle de son domaine de continuité).



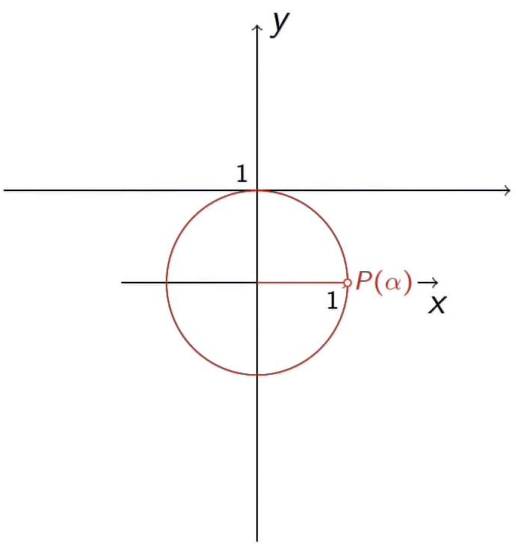
Auch hier wieder ist es ganz anders, als das was wir für sinus und cosinus gesehen haben. Die tan Funktion ist strikt wachsend zwischen zwei aufeinanderfolgenden Polen. Zwischen π/2 und 3π/2 zum Beispiel ist diese Funtkion strikt steigend. Man sieht die gleiche Steigung auf den anderen Intervallen zwischen zwei dieser Pole.

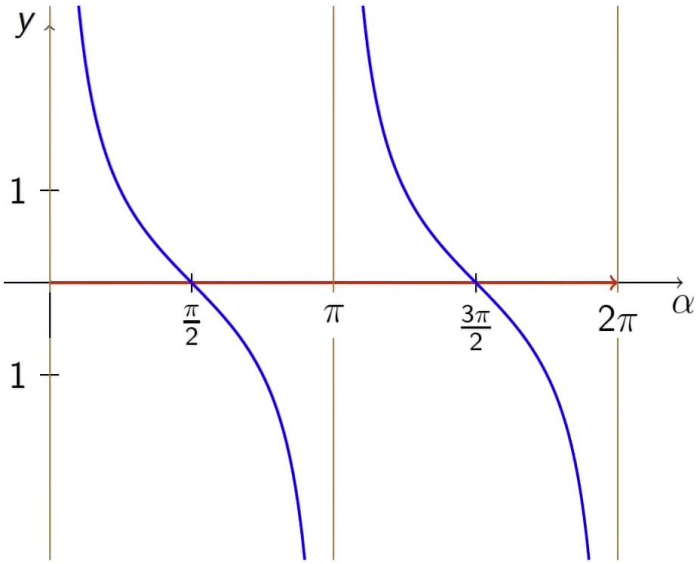
Notes

Summary

21m 23s

Animation de la fonction cotangente





Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

REPLAY

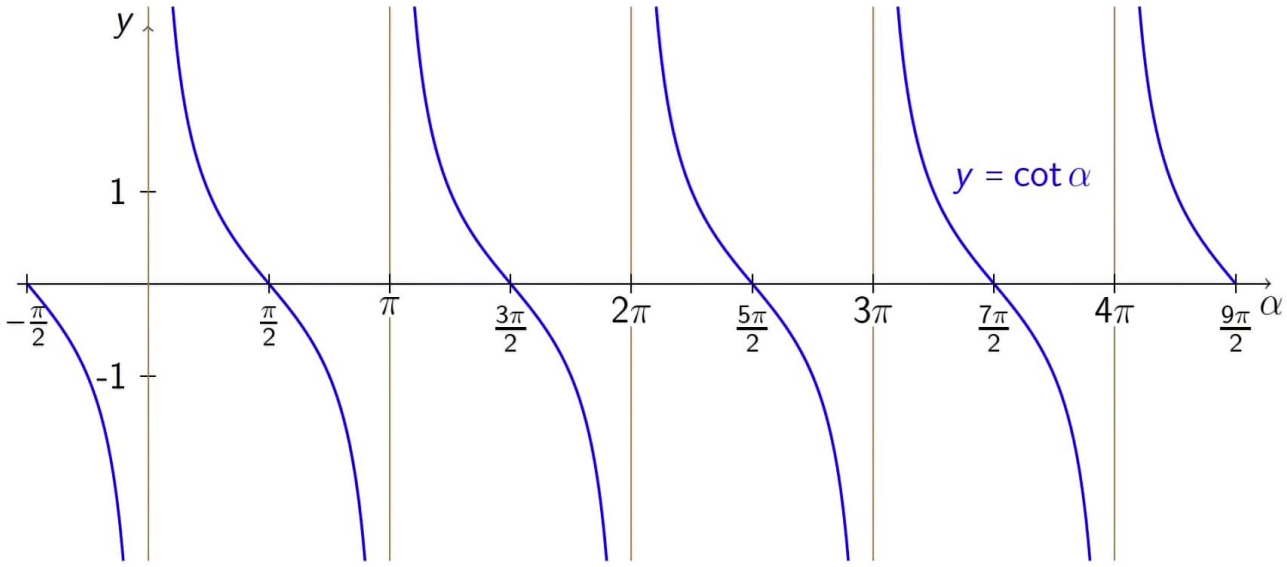
Sehen wir uns nun an, was wir für cot bekommen, wenn wir auf die gleiche Art und Weise fortfahren. Wenn man wieder den trigonometrischen Kreis nimmt und die horizontale numerische Achse hier nimmt und auf ein Koordinatensystem mit den Achsen Y alpha und den Werten cot nimmt. Zu Beginn misst alpha gleich 0, den Punkt P alpha habe ich schon. Die Gerade (OP) ist parallel zur horizontalen numerischen Achse, das heißt, dass cot von 0 nicht definiert sein wird. Was passiert, wenn ich alpha ein bisschen vergrößere? Das haben wir hier gemacht. Man nimmt diesen Winkel alpha und überträgt ihn hierher, die Gerade (OP) wird meine horizontale Achse hier schneiden bei einem blauen positiven Wert. Ich übertrage das hier auf die Vertikale. Ich sehe, dass diesmal cot die Tendenz hat, kleiner zu werden. Wir machen weiter und ändern alpha. Wir bekommen bei 0 negative Werte. Sehen wir uns das etwas genauer an: Hier annuliert es sich bei π/2, die Werte werden immer kleiner. Ich nähere mich jetzt π an. Ich nähere mich immer mehr an und bin erneut in der Situation, in der die Gerade (OP) parallel zur horizontalen numerischen Achse ist. Und bei π/2 werde ich keinen Wert für cot haben. Hier haben wir noch die Animationen dazu. Diese Punkte hier auf dem zweiten Teil sind auf der Verlängerung von (OP), diesmal nach oben.

Notes

Summary

21m 49s

Graphe de la fonction cotangente



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Hier ist die Kurve der cot Funktion, diesmal über einen etwas größeren Bereich gezeichnet als nur zwischen 0 und 2π. Sie hat etwas Ähnlichkeit mit jener, die wir für tan gesehen haben, aber die Unterschiede sind dennoch signifikant. Sehen wir uns ein paar besondere Punkte an. Wir werden sehen, dass diese sich unterscheiden.

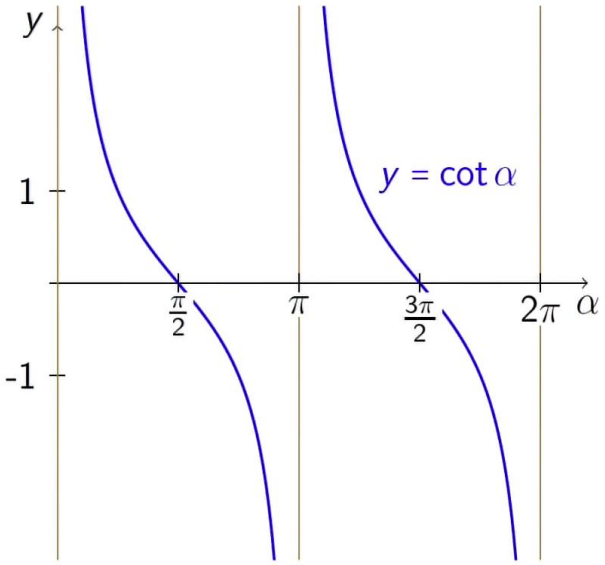
Notes

Summary

23m 27s

Points remarquables et décroissance de la cotangente

- La fonction cotangente n'admet pas d'extremum :
  - ni maximum,
  - ni minimum.



Als erstes sieht man, dass cot keine Nullstelle bei 0 hat, dafür bei π/2, 3π/2, usw, also bei π halbe modulo π. Das sind genau jene Werte, für die tan nicht definiert ist.

Notes

Summary

23m 47s

Points remarquables et décroissance de la cotangente

- La fonction cotangente admet un pôle avec changement de signe en

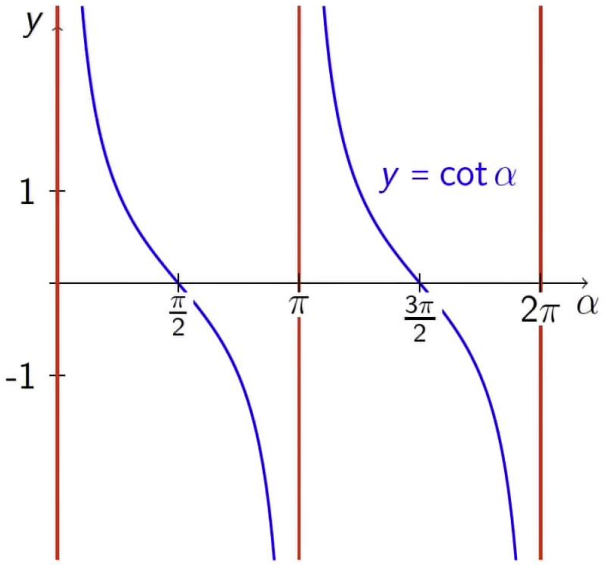
$$\alpha = 0 \mod \pi.$$

En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

- $\lim_{\alpha \to (k\pi)^-} \cot \alpha = -\infty$

et

- $\lim_{\alpha \to (k\pi)^+} \cot \alpha = +\infty.$



Im Gegensatz dazu hat cot wie auch tan weder ein Maximum noch ein Minimum sondern Pole mit einem Wechsel des Vorzeichens, die diesmal bei den Punkten alpha = 0 modulo π sind. Es sind jene Werte, bei denen tan null ist, wo cot seine Pole hat. Wenn ich mich einem dieser Werte nähere, zum Beispiel π von der linken Seite aus, dann tendiert der Wert von cot zu - unendlich. Wenn ich mich von rechts an π annähere, dann geht der Wert nach + unendlich.

Notes

Summary

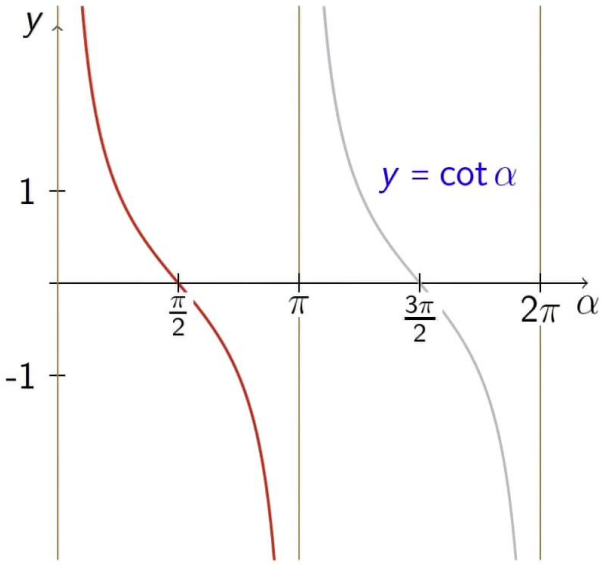
23m 59s

Points remarquables et décroissance de la cotangente

- La fonction cotangente est strictement décroissante sur chaque intervalle

  $]k\pi,\ \pi + k\pi[,\quad (k \in \mathbb{Z}),$

  (sur chaque intervalle de son domaine de continuité).



Auch hier wieder wie bei tan ist zwischen zwei Polen die Funktion von cot strikt fallend.

Notes

Summary

24m 36s

Les fonctions tangente et cotangente

Ce que nous avons appris :

- la définition des fonctions tangente et cotangente ;
- leur interprétation sur le cercle trigonométrique ;
- le graphe de ces fonctions ;
- les valeurs remarquables de ces fonctions.

Prochaine étape :

- la périodicité des fonctions tangente et cotangente ;
- la parité de ces deux fonctions ;
- tangente et cotangente des angles supplémentaires ;
- tangente et cotangente des angles complémentaires.

Fassen wir zusammen! Was haben wir heute gelernt? Wir haben die Definitionen der tangens und cotangens Funktionen definiert als Quotient der sinus und cosinus Funtktion. Wir haben anschließend auf dem trigonometrischen Kreis interpretiert, was diese Quotienten bedeuten, die Bedeutung von tan und cot alpha. Wir haben Punkt für Punkt die Kurven dieser Funktionen konstruiert. Wir kennen die besonderen Werte dieser Funktionen. Wir wissen auch, wo sich die Nullstellen und die Pole dieser Funktionen befinden. Was werden wir uns also im nächsten Schritt ansehen? Wir werden uns die Periodizität dieser Funktionen ansehen. Dass diese periodisch sind, ist wenig überraschend, wenn man sich die Kurven ansieht. Wir werden uns auch die Parität ansehen, das heißt, uns folgende Frage stellen: Sind sie gerade oder ungerade oder keines von beiden? Und wir werden uns auch wie für sinus und cosinus ansehen, was passiert, wenn wir supplementäre und komplementäre Winkel bei tangens und cotangens nehmen. Ich bedanke mich für Ihre Aufmerksamkeit, bis zum nächsten Mal!

Notes

Summary

24m 45s