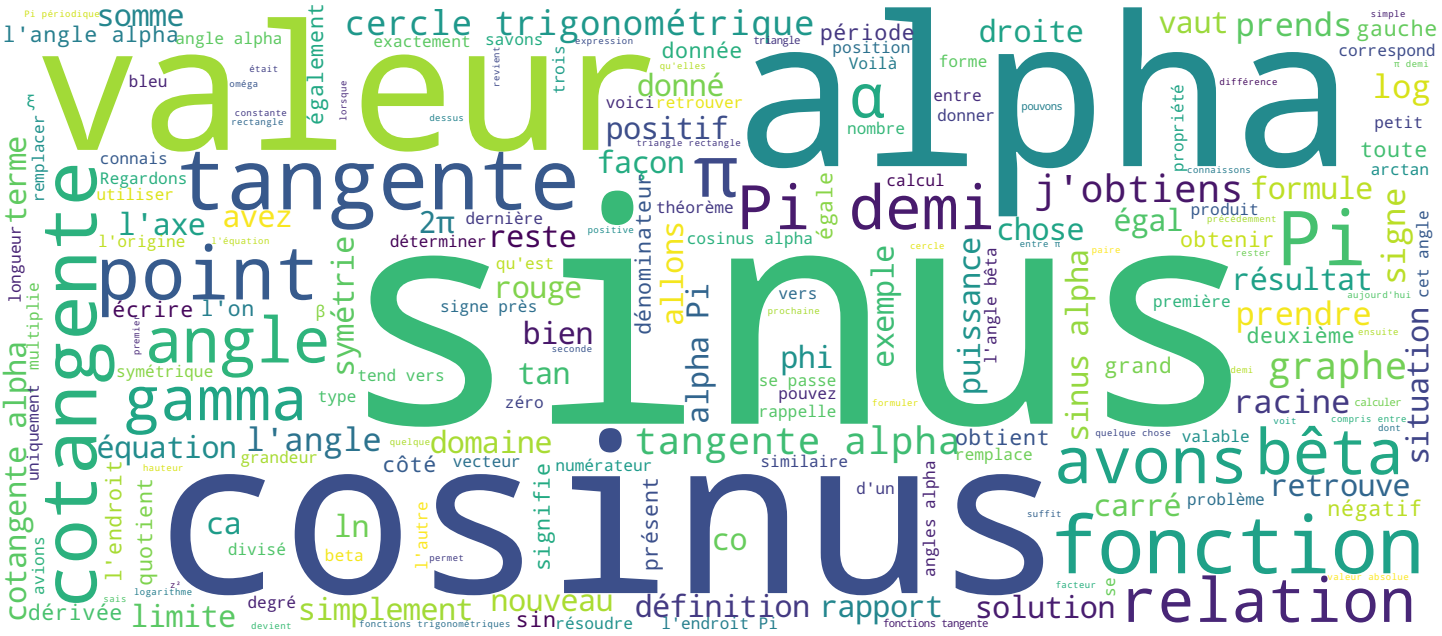
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les fonctions trigonométriques tangentes et cotangentes et leurs inverses

3.2 Les symétries des fonctions tangente et cotangente

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

Video

EPFL

Périodicité des fonctions tangente et cotangente

Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont périodiques de période 2π :

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha \qquad \text{et} \qquad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Bonjour, La dernière fois je vous ai présenté les fonctions trigonométriques tangente et cotangente et je vous avais promis qu'aujourd'hui nous allions parler de symétrie autour de ces fonctions tangente et cotangente. Nous allons présenter donc des relations et nous allons le faire sous un triple aspect : sous l'aspect d'une interprétation sur le cercle trigonométrique de ces relations, sous l'aspect d'une interprétation sur le graphe des fonctions tangente et cotangente et finalement sous l'aspect de créer un pont entre ces relations pour tangente et cotangente et des relations similaires que nous connaissons déjà pour sinus et cosinus. Commençons par la remarque que le sinus et le cosinus qui sont tous deux 2 Pi périodiques vont nécessairement entraîner le fait que tangente et cotangente sont des fonctions qui, elles-aussi, sont 2 Pi périodiques.

Notes

Summary

0m 04s

Périodicité des fonctions tangente et cotangente

Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont périodiques de période 2π :

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha \qquad \text{et} \qquad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

On en déduit que les fonctions *tangente* et *cotangente* sont elles aussi 2π-périodiques :

$$\tan(\alpha + 2\pi) = \frac{\sin(\alpha + 2\pi)}{\cos(\alpha + 2\pi)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}),$$

$$\cot(\alpha + 2\pi) = \frac{\cos(\alpha + 2\pi)}{\sin(\alpha + 2\pi)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}).$$

Formellement, nous pouvons par exemple calculer tangente à l'endroit alpha + 2 Pi cela revient à prendre le quotient sinus sur cosinus, pour l'exemple alpha + 2 Pi, mais vu que le sinus et le cosinus sont 2 Pi périodiques je peux remplacer le numérateur par sinus alpha, le dénominateur par cosinus alpha et je retrouve tangente alpha. Ce calcul est tout à fait valable pour tous les alpha qui sont dans le domaine de définition de tangente. Pour cotangente : à l'endroit alpha + 2 Pi, je fais exactement la même chose le quotient cosinus sur sinus, j'utilise la 2 Pi périodicité de cosinus et de sinus et je retrouve cotangente alpha.

Notes

Summary

1m 05s

La période des fonctions tangente et cotangente

Mais elles admettent une période plus petite.

En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les points $P(\alpha+\pi)$ et $P(\alpha)$ sont diamétralement opposés.

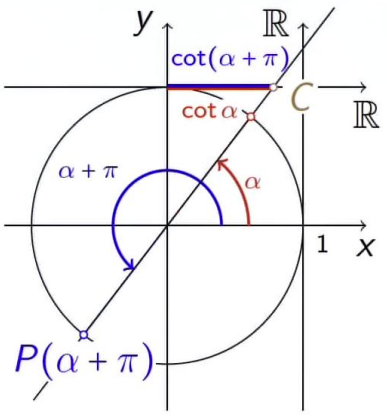
Donc les droites $OP(\alpha+\pi)$ et $OP(\alpha)$ coïncident.

- Les points $T(\alpha+\pi)$ et $T(\alpha)$ coïncident :

$$\tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}).$$

- Les points $C(\alpha+\pi)$ et $C(\alpha)$ coïncident :

$$\cot(\alpha+\pi) = \cot\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Cependant, contrairement au sinus et au cosinus, qui n'ont pas de période plus petite que 2 Pi, donc 2 Pi est vraiment LA période de ces fonctions, pour tangente et cotangente, nous pouvons trouver une période qui est plus petite. En effet, regardons ça sur le cercle trigonométrique : j'ai ici le cercle trigonométrique, j'ai l'axe numérique pour tangente et pour cotangente et si je considère un angle alpha ici avec le point P alpha et un angle alpha + pi avec le point P correspondant à cet angle alpha + Pi, je m'aperçois que les deux points P alpha et P alpha + Pi sont diamétralement opposés. Cela signifie que pour nos constructions géométriques pour obtenir tangente et cotangente de alpha, respectivement de alpha plus Pi, je vais utiliser cette même droite OP -OP pour alpha ou pour alpha + Pi- c'est la même droite et j'obtiens donc les mêmes points d'intersection; si bien que j'obtiens ici pour l'angle en rouge tangente alpha en rouge, pour l'angle en bleu j'obtiens la même grandeur tangente alpha + Pi. De façon similaire, pour cotangente, pour l'angle rouge j'ai ici cotangente alpha et pour l'angle bleu j'obtiens cette même valeur de cotangente alpha + Pi.

Notes

Summary

1m 45s

La période des fonctions tangente et cotangente

On peut aussi vérifier par un calcul direct que les fonctions tangente et cotangente sont π-périodiques :

$$\tan(\alpha+\pi) = \frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}),$$

$$\cot(\alpha+\pi) = \frac{\cos(\alpha+\pi)}{\sin(\alpha+\pi)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \cot\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}).$$

On peut tout à fait vérifier cette relation, le fait que Pi est également une période de tangente et de cotangente. On peut le vérifier par un calcul direct, cela c'est sous l'aspect de créer un pont vers des relations connues entre sinus et cosinus. En effet, si vous regardez par exemple tangente alpha + Pi, ici, il faut donc prendre le quotient de sinus alpha + Pi et cosinus alpha + Pi. Alors nous savons que si l'on diminue l'angle de pi pour sinus et cosinus, on obtient des sinus et cosinus qui changent de signe simplement. Mais, dans ce quotient, les deux signes vont se neutraliser et il reste uniquement sinus alpha sur cos alpha qui équivaut à tangente alpha et cela est valable pour tous les alpha qui sont dans le domaine de définition de tangente. Pour cotangente, je mène un calcul tout à fait similaire : cotangente alpha + Pi, j'ai ici les cosinus et sinus, je diminue l'angle de Pi, ce qui m'amène les signes moins qui se neutralisent et je retrouve cotangente alpha pour tous les alpha admissibles pour cotangente.

Notes

Summary

3m 03s

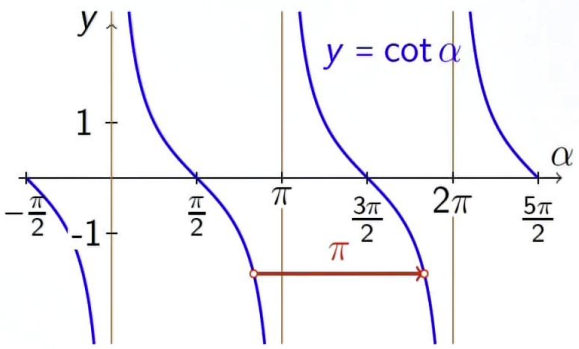
La période des fonctions tangente et cotangente

- La fonction tan : $\mathbf{D}_{\tan} \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \tan\alpha$ est π-périodique :

$$\tan\alpha = \tan(\alpha + \pi), \quad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}).$$

- La fonction cot : $\mathbf{D}_{\cot} \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \cot\alpha$ est π-périodique :

$$\cot\alpha = \cot(\alpha + \pi), \quad (\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}).$$



Ces deux fonctions n'admettent pas de période strictement comprise entre 0 et π.

Leur période est donc égale à π.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous pouvons donc formuler le résultat suivant : la fonction tangente, sur son domaine de définition des tang vers R, alpha est transformé en tangente alpha et Pi périodique. C'est-à-dire que si j'augmente l'angle alpha de Pi, je retombe toujours sur la même valeur tangente alpha. Cela est toujours valable. De même pour la fonction cotangente : on retrouve qu'elle est Pi périodique. Donc je peux augmenter l'angle alpha d'une valeur de Pi et cotangente ne change pas sa valeur. Si je regarde la situation pour tangente, on peut évidemment s'interroger : est-ce que je pourrais trouver une période plus petite encore ? Mais on voit immédiatement que Pi semble être la période la plus courte. En effet, si je prends ici un angle alpha et sa tangente alpha, je peux augmenter alpha mais avant de retrouver cette même valeur tangente alpha je ne pourrais pas me déplacer de moins de Pi. La même chose est vraie ici pour cotangente : Pi semble être la période la plus courte si bien qu'on peut dire que Pi est la période de tangente et de cotangente.

Notes

Summary

4m 04s

Parité des fonctions tangente et cotangente

La fonction *cosinus* est paire et la fonction *sinus* est impaire :

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \text{et} \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Regardons à présent ce qu'on peut dire sur la parité des fonctions tangente et cotangente : c'est-à-dire que nous aimerions décider est-ce qu'elles sont paires, est-ce qu'elles sont impaires, est-ce qu'elles sont ni l'un ni l'autre ? A cet effet, il nous faut rappeler ce que nous connaissons sur le cosinus et le sinus. Nous savons que la fonction cosinus est paire : c'est-à-dire que si je la prends à l'endroit moins alpha ou alpha, cela me donne les mêmes valeurs pour le cosinus. Cela est vrai pour toutes les valeurs de alpha dans R. En revanche, la fonction sinus est, elle, impaire : c'est-à-dire que si je remplace alpha par moins alpha le sinus, lui, change également de signe.

Notes

Summary

5m 10s

Parité des fonctions tangente et cotangente

La fonction *cosinus* est paire et la fonction *sinus* est impaire :

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \text{et} \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

On en déduit que les fonctions *tangente* et *cotangente* sont impaires :

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}),$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}).$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

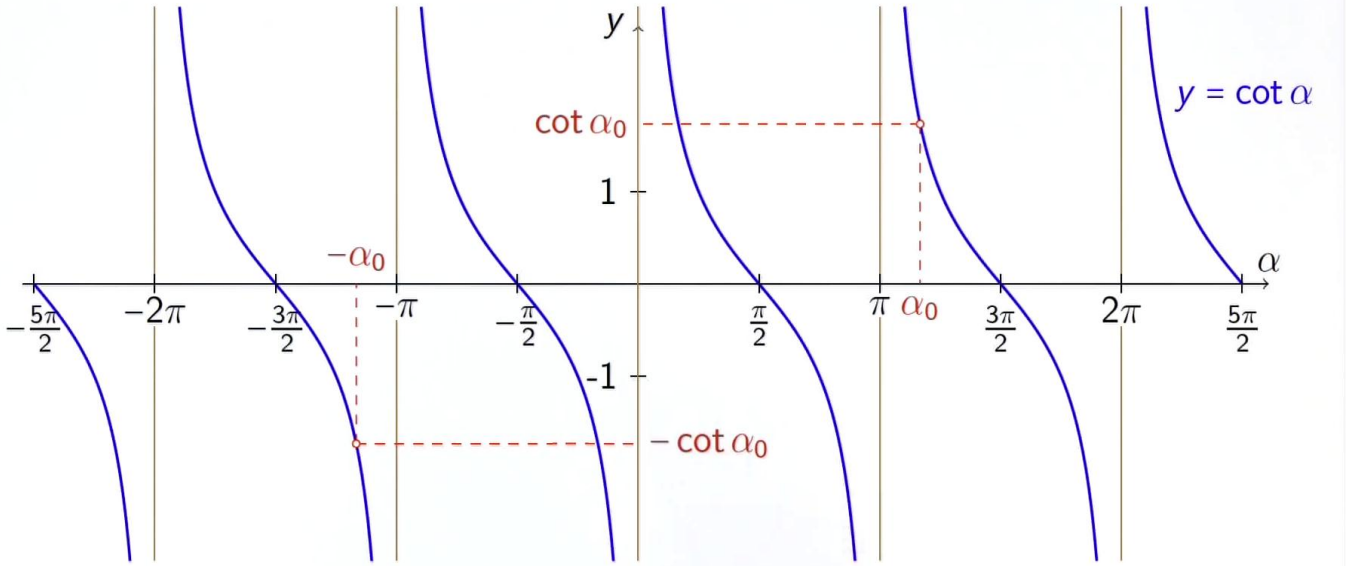
Nous pouvons conclure que, de ce fait, tangente et cotangente sont des fonctions impaires en tant que quotients d'une fonction paire et impaire. Regardons cela pour une cotangente cette fois-ci : donc si je prends cotangente à l'endroit moins alpha, je dois prendre le cosinus moins alpha, le sinus moins alpha. J'utilise le fait que cosinus est pair c'est-à-dire que je remplace cosinus moins alpha par cosinus alpha; j'utilise le fait que le sinus est impair, je remplace le sinus moins alpha par moins sinus alpha et ce quotient obtient donc un signe moins cos sur sinus qui correspond à moins cotangente alpha et ce calcul est valable tant que le sinus ne s'annule pas et cela est exactement le domaine de définition de cotangente. Pour tangente, dans la ligne en haut, je pense que vous l'avez suivi en parallèle- vous avez de façon tout à fait similaire cette fois simplement, le sinus est numérateur; le cosinus au dénominateur mais le jeu des parité est le même et c'est pour cosinus le moins qui reste.

Notes

Summary

5m 45s

La fonction cotangente est impaire



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous avons dit que nous aimerions interpréter quand même les relations que nous trouvons, c'est-à-dire le fait pair/impair aussi sur le graphe des fonctions alors faisons-le : ici, j'ai l'axe des alpha j'ai l'axe des Y et j'ai le graphe de tangente alpha. Vous retrouvez facilement les éléments-clés, c'est-à-dire les zéros de cette fonction et les pôles à Pi moins 2 Pi. Si je me place en un point que j'ai noté ici alpha zéro et je regarde quelle est la valeur de tangente et si je fais la même chose à l'endroit moins alpha zéro, je retrouve des valeurs égales, en valeur absolue, mais de signes contraires. Cela est du au fait que le graphe des tangentes alpha possède une symétrie de points par rapport à l'origine. Pour cotangente, on peut procéder exactement de la même façon : cette fonction est également une fonction impaire, c'est-à-dire qu'elle est également symétrique par rapport à une symétrie de points à l'origine si je regarde la valeur de cette fonction en un point alpha zéro et moins alpha zéro, j'obtiens pour cotangente les mêmes valeurs au signe près.

Notes

Summary

6m 45s

Remarque

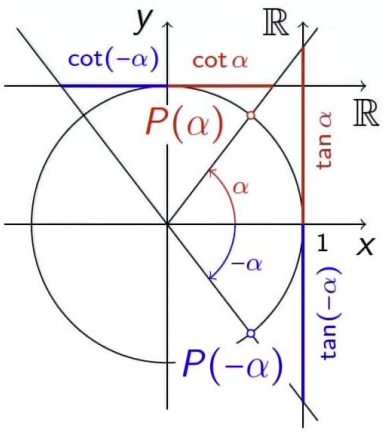
On vérifie sur le cercle trigonométrique que les fonctions tangente et cotangente sont impaires.

- Les droites $OP(-\alpha)$ et $OP(\alpha)$ sont symétriques par rapport à l'axe des x :

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}).$$

- Les droites $OP(-\alpha)$ et $OP(\alpha)$ sont symétriques par rapport à l'axe des y :

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}).$$



Nous voulons toujours aussi comprendre les relations que nous formulons non seulement sur le graphe que nous venons de faire, mais nous aimerions également comprendre ces relations c'est-à-dire que les fonctions tangentes et cotangentes sont impaires : on aimerait comprendre ce phénomène également sur le cercle trigonométrique. J'ai là la situation qu'il me faut avec le cercle trigonométrique et les axes pour tangente et cotangente. Alors si je prends deux angles l'un alpha et l'autre moins alpha, j'ai le point P alpha, le point P de moins alpha. Ces points sont symétriques par rapport à l'axe des X et si je regarde les grandeurs tangente alpha, respectivement tangente de moins alpha, je vois très bien qu'en valeur absolue elles sont égales mais de signes contraires ce qui me permet de retrouver cette imparité de tangente alpha. De façon tout à fait similaire, si je fais la construction pour ces angles alpha et moins alpha, pour cotangente ici je dois prolonger la droite et j'obtiens ici cotangente alpha et cotangente moins alpha, de nouveau j'obtiens les mêmes valeurs au signe près donc cotangente de moins alpha c'est moins cotangente alpha, pour toutes les valeurs possibles de alpha c'est-à-dire tous les alpha qui sont dans le domaine de définition de cotangente.

Notes

Summary

8m 03s

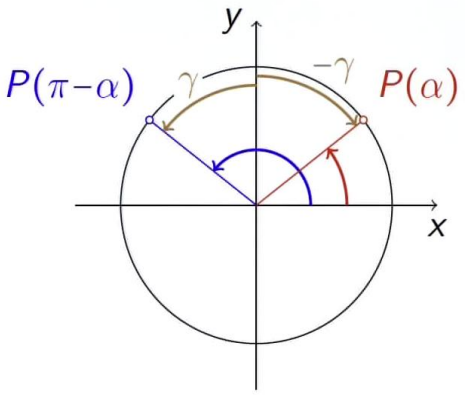
Angles supplémentaires

Soient α et β deux angles supplémentaires :

$$\alpha + \beta = \pi\,, \qquad \beta = \pi - \alpha.$$

Nous avons déjà vu qu'en posant $\gamma := \dfrac{\beta - \alpha}{2}$, on obtient :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\pi}{2} + \gamma$$



Regardons à présent ce qui se passe lorsque nous sommes en présence de deux angles alpha et bêta et que nous aimerions comparer les valeurs de tangente et de cotangente en alpha et en bêta. Donc des angles supplémentaires signifient que la somme des angles vaut Pi ou, si vous préférez, que par exemple bêta, c'est Pi moins alpha. Nous avons dessiné cela ici, sur le cercle trigonométrique : j'ai ici un angle alpha avec le point P alpha et pour l'angle supplémentaire bêta, en bleu, je prends pi moins alpha. Pour les points P alpha et P bêta, je peux dire qu'ils sont en position de symétrie par rapport à l'axe des Y. Alors nous avons déjà dit que ce type de symétrie, on peut aussi l'exprimer de façon un peu plus symétrique en disant que l'angle alpha c'est simplement Pi demi moins un gamma et l'angle bêta, c'est Pi demi plus un angle gamma. Ce que nous avons écrit ici. Là l'écriture est plus symétrique que par rapport à alpha et bêta que dans la ligne ci-dessus.

Notes

Summary

9m 18s

Tangente et cotangente d'angles supplémentaires

Nous savons déjà que

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \text{et} \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Il en découle d'une part, que pour tout $\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}$,

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

et d'autre part, que pour tout $\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}$,

$$\cot(\pi - \alpha) = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha.$$

Alors que savons-nous sur le sinus et le cosinus dans cette situation ? Nous savons que si je considère le sinus à l'endroit Pi moins alpha et alpha, c'est-à-dire si j'ai des angles alpha et ici bêta qui sont supplémentaires, je sais que leur sinus est égal et le cosinus change de signe. Cela on peut le voir de façon évidente sur le cercle trigonométrique. Il en découle pour tangente, je fais le quotient, tangente de Pi moins alpha c'est-à-dire le sinus et le cosinus à l'endroit Pi moins alpha. Le sinus reste le même, je peux écrire donc au numérateur sinus alpha. Pour le cosinus, je dois écrire moins cosinus alpha et il me reste donc moins tangente alpha. Pour cotangente, j'ai absolument la même chose : je prends cotangente de Pi moins alpha donc le cosinus sur le sinus au numérateur j'obtiens moins cos alpha au dénominateur sinus alpha et il me reste pour finir un moins cotangente alpha. Ces deux relations sont valables pour tous les alpha où tangente alpha, respectivement cotangente alpha sont définies.

Notes

Summary

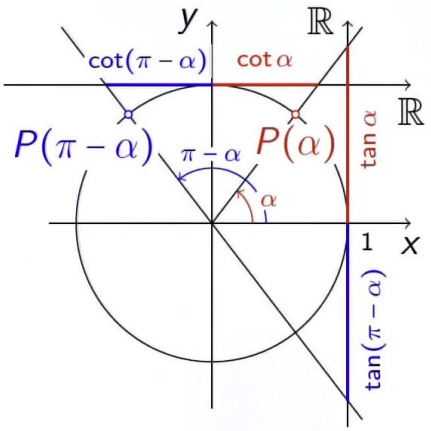
10m 23s

Tangente et cotangente d'angles supplémentaires

Ces deux résultats se vérifient sur le cercle trigonométrique :

- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$,
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$.

Ou sous une forme plus symétrique :



Essayons de comprendre cette relation pour les angles supplémentaires sur le cercle trigonométrique. J'ai ici les positions alpha et Pi moins alpha, donc l'angle alpha et l'angle en bleu qu'on peut qualifier de bêta sont supplémentaires. Si je fais la construction pour tangente alpha, ici en rouge, je prends la droite OP, je la coupe, j'ai ici tangente alpha. Je fais la même chose pour l'angle bêta c'est-à- dire Pi moins alpha, je prends la droite, je coupe, je retrouve ici deux fois une même valeur au signe près. C'est-à-dire que tangente de Pi moins alpha est la même chose que moins tangente alpha. Pour cotangente, je fais la construction correspondante et j'obtiens ici cotangente alpha pour l'angle alpha, en rouge, j'obtiens pour l'angle en bleu cotangente de Pi moins alpha de nouveau par symétrie nous avons ici les mêmes longueurs mais les valeurs sur l'axe numérique horizontal sont de signes contraires. Donc j'obtiens cotangente de Pi moins alpha est égal à moins cotangente alpha. On peut évidemment formuler ces résultats aussi sous une forme symétrique. Je vous rappelle cela revient à dire que les angles alpha et bêta sont Pi demi mois quelque chose / plus quelque chose.

Notes

Summary

11m 33s

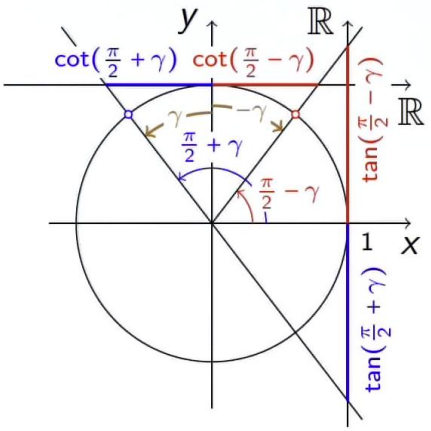
Tangente et cotangente d'angles supplémentaires

Ces deux résultats se vérifient sur le cercle trigonométrique :

- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$,
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$.

Ou sous une forme plus symétrique :

- $\tan(\frac{\pi}{2} - \gamma) = -\tan(\frac{\pi}{2} + \gamma)$,
- $\cot(\frac{\pi}{2} - \gamma) = -\cot(\frac{\pi}{2} + \gamma)$.



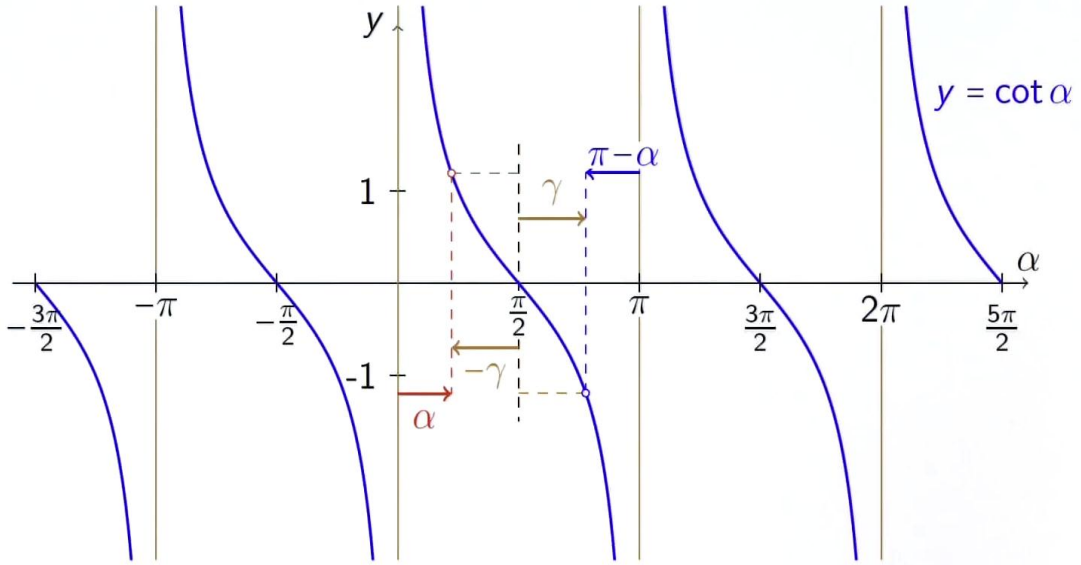
Donc là, nous avons ce Pi demi moins gamma Pi demi plus gamma et si je prends maintenant tangente de l'angle rouge, c'est-à-dire que ça c'est Pi demi moins gamma et pour l'angle bleu Pi demi plus gamma, j'ai la même chose au signe près et pour cotangente, j'ai de nouveau la même chose au signe près. Là, la formulation est simplement plus symétrique que ci-dessus mais, en fait, ce sont les mêmes relations.

Notes

Summary

12m 46s

Cotangente : symétrie de centre $(\frac{\pi}{2}, 0)$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

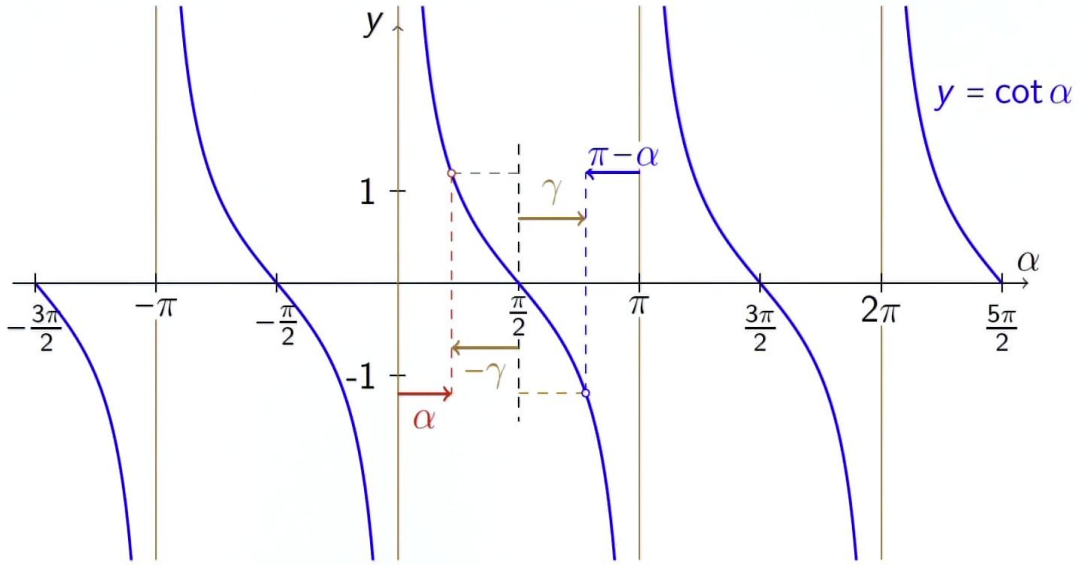
Nous avons également dit que nous aimerions interpréter nos relations sur le graphe des fonctions : ici, vous avez le graphe de tangentes. Ici l'axe des alpha, l'axe des Y, ici l'origine, ici tangente. Alors si je me place à un endroit alpha, qui est ici en rouge ou bien Pi moins alpha ici, ça, c'est l'angle bêta, on voit immédiatement que les valeurs respectives de tangentes qui sont ici sont égales au signe près. Donc j'ai tangente de alpha, qui est la même chose que moins tangente de Pi moins alpha. Ou bien on peut se placer sur Pi demi, ça c'est l'endroit où nous avons un pôle pour tangente, et nous nous déplaçons vers la gauche et vers la droite d'une même quantité gamma et nous pouvons dire que tangente à l'endroit Pi demi moins gamma ça, c'est ici, donne la même chose que tangente à l'endroit Pi demi plus gamma qui est ici au signe près, donc avec un signe moins entre ces deux valeurs. Pour cotangente, on peut découvrir la figure similaire : donc nous avons l'axe des alpha, l'axe des Y, ici l'origine et, de nouveau, si je me place dans l'angle alpha et Pi moins alpha, je m'aperçois que j'obtiens des valeurs de cotangente qui sont les mêmes au signe près.

Notes

Summary

13m 16s

Cotangente : symétrie de centre $(\frac{\pi}{2}, 0)$



Cela est dû au fait que cette courbe ici est symétrique, elle a une symétrie de points située à l'endroit Pi demi zéro. On peut aussi formuler de façon de nouveau symétrique, on peut dire que si je m'écarte de plus de Pi demi de gamma ou de moins gamma alors, pour cotangente, j'obtiens des valeurs de signe contraire mais de même valeur absolue.

Notes

Summary

14m 44s

Angles complémentaires

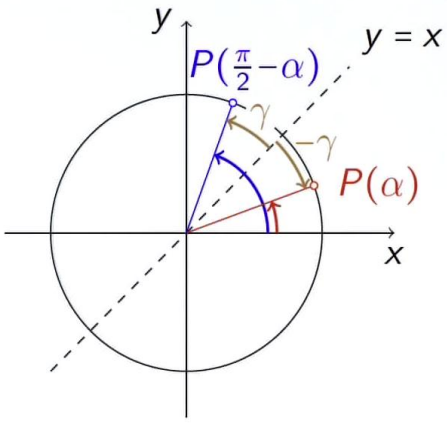
Soient α et β deux angles complémentaires :

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

les points $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ sont symétriques par rapport à l'axe $y = x$.

Et en posant $\gamma := \dfrac{\beta - \alpha}{2}$, on a :

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \gamma \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\pi}{4} + \gamma.$$



Regardons à présent ce qui se passe pour des angles complémentaires, c'est-à-dire pour des angles alpha et bêta tels que la somme vaut Pi demi. On peut aussi dire qu'on exprime alors l'angle bêta par Pi demi moins alpha. Sur le cercle trigonométrique, nous avons cette situation avec l'angle alpha en rouge et Pi demi moins alpha en bleu. C'est-à-dire cette fois-ci les deux points correspondants, le point rouge P et le point P qui est en bleu, ces deux points sont cette fois-ci situés symétriquement par rapport à l'axe Y égal X. Là encore nous avons introduit une notation qui est plus symétrique, c'est-à-dire que l'on peut dire qu'un des angles est donné par Pi car moins gamma et l'autre par Pi car plus gamma, ce que nous écrivons sous la forme que voilà.

Notes

Summary

15m 08s

Tangente et cotangente d'angles complémentaires

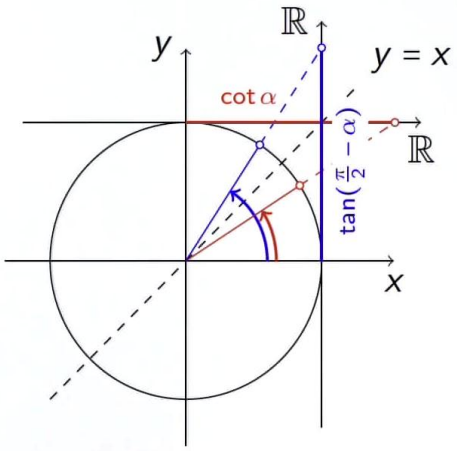
Nous savons déjà que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \quad \text{et} \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

En conséquence :

- pour tout $\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}$,

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$$



Pour le sinus et le cosinus, en présence d'angles complémentaires, ici sur cette figure, nous savons déjà que le sinus de l'un est le cosinus de l'autre. Alors appliquons cela au cas tangente. Pour tangente, cela revient à ce qui suit : je prends tangente à l'endroit Pi demi moins alpha donc c'est le sinus sur le cosinus. Regardons ce sinus Pi demi moins alpha cela correspond à cosinus alpha. En revanche, cosinus Pi demi moins alpha correspond au sinus. Donc cette fois-ci, j'obtiens cotangente alpha. On peut interpréter cela tout à fait sur le cercle trigonométrique : nous avons ici cet angle alpha, l'angle bêta symétrique par rapport à l'axe Y égal à X, et on voit immédiatement que la construction pour tangente Pi demi moins alpha c'est l'angle bleu et cette tangente a la même valeur que cotangente alpha pour l'angle en rouge. Pour cotangente, on a un calcul tout à fait similaire : on prend cotangente à l'endroit Pi demi moins alpha, c'est-à-dire cosinus sur sinus; on remplace ce cosinus de Pi demi moins alpha par son sinus, le sinus de Pi demi moins alpha par le cosinus -ça c'est la relation que nous avions mentionnée ici auparavant- et on retrouve cette fois-ci le quotient sinus sur cosinus qui correspond à tangente alpha.

Notes

Summary

15m 53s

Tangente et cotangente d'angles complémentaires

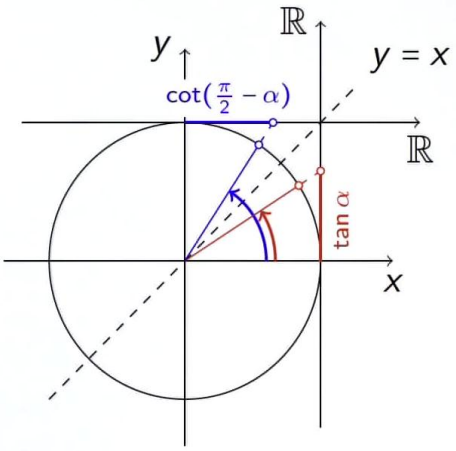
Nous savons déjà que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \quad \text{et} \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

En conséquence :

- pour tout $\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}$,

$$\cot\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha.$$



Là encore, sur le cercle trigonométrique, vous pouvez tout à fait retrouver ce résultat : vous avez ici l'angle alpha, ici l'angle bêta et tangente alpha et cotangente de Pi demi moins alpha c'est-à-dire de bêta, ces deux valeurs numériques c'est-à-dire longueurs avec signes sont identiques.

Notes

Summary

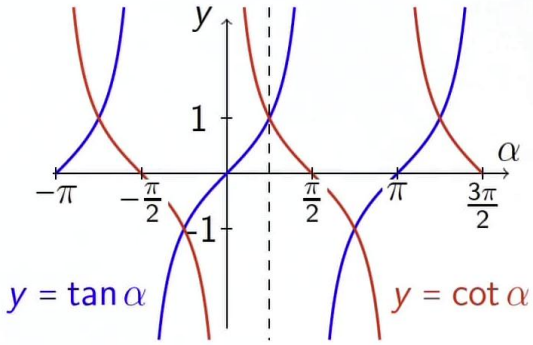
17m 19s

Symétrie d'axe $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Sous une forme plus symétrique, les deux relations précédentes s'écrivent

- $\tan(\frac{\pi}{4} - \gamma) = \cot(\frac{\pi}{4} + \gamma)$,
- $\cot(\frac{\pi}{4} - \gamma) = \tan(\frac{\pi}{4} + \gamma)$, $\quad (\gamma \in \mathbb{R})$.

Ceci montre que les graphes des fonctions tan et cot sont symétriques par rapport à l'axe vertical d'équation $\alpha = \frac{\pi}{4}$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors, sous une forme un peu plus symétrique, on peut remplacer ces angles alpha et bêta c'est-à-dire alpha Pi demi moins alpha par Pi car moins gamma et Pi car plus gamma et on obtient alors que tangente de Pi car moins gamma est égale à cotangente de Pi car plus gamma et pour cotangente de Pi car moins gamma c'est tangente de Pi car plus gamma. En fait, ceci est valable pour toutes les valeurs de gamma, positives ou négatives, ce qui fait en fait que ces deux relations coïncident. Il suffit de prendre ici un signe moins pour gamma et on obtient le plus ici et on a exactement la relation ci-dessus donc, en fait, on n'a qu'une seule relation dans ce cas-là. Sur le graphe, on retrouve évidemment également cette relation : il faut prendre le graphe de tangente alpha avec sa symétrie de points par rapport à l'origine. On prend la cotangente ici également, symétrie de points par rapport à l'origine. Si je vais ici à l'endroit Pi car, l'endroit Pi car est ici, je m'aperçois qu'en fait, là, les courbes tangente et cotangente se coupent et je peux maintenant interpréter ce résultat sur ces courbes en prenant Pi demi moins gamma et Pi demi plus gamma et rendre compte que, effectivement, tangente devient cotangente et vice-versa.

Notes

Summary

17m 38s

Les symétries des fonctions tangente et cotangente

Ce que nous avons appris :

- la périodicité des fonctions tangente et cotangente ;
- la parité de ces deux fonctions ;
- tangente et cotangente des angles supplémentaires ;
- tangente et cotangente des angles complémentaires.

Prochaine étape :

- l'utilisation de la tangente et de la cotangente dans les triangles rectangles.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Résumons. Qu'est-ce que nous avons appris ? Nous avons analysé la périodicité des fonctions tangente et cotangente; nous avons vu qu'elles sont bi-périodiques et que Pi est leur période. Nous avons analysé la parité de ces deux fonctions; nous voyons qu'elles sont impaires toutes les deux. Nous avons regardé ce qui se passe pour les angles supplémentaires et complémentaires lorsqu'on est en présence de tangente et de cotangente. La prochaine fois, je vais présenter l'utilisation de ces deux fonctions tangente et cotangente dans le cadre du triangle rectangle. Je vous remercie. A la prochaine.

Notes

Summary

19m 07s