ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les fonctions trigonométriques tangentes et cotangentes et leurs inverses

3.2 Les symétries des fonctions tangente et cotangente

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

EPFL

Périodicité des fonctions tangente et cotangente

Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont périodiques de période 2π :

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha \qquad \text{et} \qquad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Guten Tag, Das letzte Mal habe ich Ihnen die trigonometrischen Funktionen Tangens und Kotangens vorgestellt, und Ihnen versprochen, dass wir heute über die Symmetrie hinsichtlich dieser Funktionen Tangens und Kotangens sprechen würden. Wir werden also Relationen vorstellen, und zwar in dreifacher Hinsicht: als Interpretation auf dem trigonometrischen Kreis dieser Relationen, als Interpretation auf dem Graphen der Funktionen Tangens und Kotangens, und schlussendlich im Hinblick auf die Bildung einer Brücke zwischen diesen Relationen für Tangens und Kotangens und ähnlichen Relationen, die wir bereits für Sinus und Kosinus kennen. Beginnen wir mit der Anmerkung, dass Sinus und Kosinus, die beide 2 Pi periodisch sind, unweigerlich die Tatsache herbeiführen werden, dass Tangens und Kotangens zwei Funktionen sind, die ebenfalls 2 Pi periodisch sind.

Notes

Summary

0m 04s

Périodicité des fonctions tangente et cotangente

Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont périodiques de période 2π :

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha \qquad \text{et} \qquad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

On en déduit que les fonctions *tangente* et *cotangente* sont elles aussi 2π-périodiques :

$$\tan(\alpha + 2\pi) = \frac{\sin(\alpha + 2\pi)}{\cos(\alpha + 2\pi)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}),$$

$$\cot(\alpha + 2\pi) = \frac{\cos(\alpha + 2\pi)}{\sin(\alpha + 2\pi)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}).$$

Formell können wir zum Beispiel die Tangente an der Stelle Alpha + 2 Pi berechnen, was dem Sinus-Quotienten von Kosinus entsprich, zum Beispiel alpha + 2 Pi. Da aber Sinus und Kosinus 2 Pi periodisch sind, kann ich den Zähler durch Sinus Alpha ersetzen, den Nenner durch Kosinus Alpha, und schon finde ich den Tangens Alpha. Diese Berechnung gilt in der Tat für alle Alpha, die sich im Definitionsbereich von Tangens befinden. Für Kotangens: An der Stelle Alpha + 2 Pi mache ich genau das Gleiche, den Kosinus-Quotienten von Sinus, dabei benutze ich die 2 Pi Periodizität von Kosinus und Sinus und finde somit Kotangens Alpha.

Notes

Summary

1m 05s

La période des fonctions tangente et cotangente

Mais elles admettent une période plus petite.

En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les points $P(\alpha + \pi)$ et $P(\alpha)$ sont diamétralement opposés.

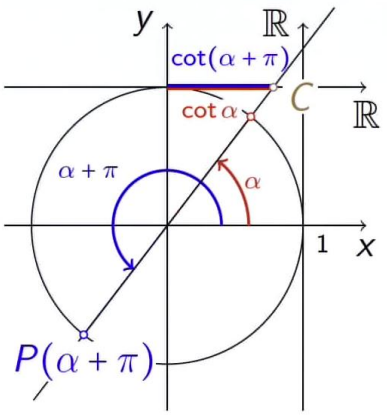
Donc les droites $OP(\alpha + \pi)$ et $OP(\alpha)$ coïncident.

- Les points $T(\alpha + \pi)$ et $T(\alpha)$ coïncident :

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}).$$

- Les points $C(\alpha + \pi)$ et $C(\alpha)$ coïncident :

$$\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}).$$



Anders jedoch als bei Sinus und Kosinus, die keine kleinere Periode als 2 Pi haben, weshalb 2 Pi wirklich DIE Periode dieser Funktionen ist, können wir für Tangens und Kotangens eine kleinere Periode finden. Schauen wir uns das einmal auf dem trigonometrischen Kreis an: Ich habe hier den trigonometrischen Kreis, ich habe die numerische Achse für Tangens und Kotangens und wenn ich einen Alpha-Winkel an dieser Stelle mit dem Punkt P Alpha berücksichtige und einen Winkel Alpha + pi mit dem entsprechenden Punkt P an diesem Winkel Alpha + Pi, stelle ich fest, dass beide Punkte, P Alpha und P Alpha + Pi, diametral entgegengesetzt sind. Dies bedeutet für unsere geometrischen Konstruktionen, dass ich für den Erhalt von Tangens und Kotangens von Alpha beziehungsweise von Alpha plus Pi eben diese gleiche Gerade OP-OP für Alpha oder Alpha + Pi benutzen werde, es handelt sich um die gleiche Gerade, und ich erhalte somit die gleichen Schnittpunkte; sodass ich hier für den Winkel in rot Tangens Alpha in rot erhalte, für den Winkel in blau erhalte ich die gleiche Tangensgröße Alpha + Pi. Ähnlich für Kotangens habe ich hier für den roten Winkel Kotangens Alpha und für den blauen Winkel erhalte ich diesen gleichen Wert von Kotangens Alpha + Pi.

Notes

Summary

1m 45s

La période des fonctions tangente et cotangente

On peut aussi vérifier par un calcul direct que les fonctions tangente et cotangente sont π-périodiques :

$$\tan(\alpha+\pi) = \frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}),$$

$$\cot(\alpha+\pi) = \frac{\cos(\alpha+\pi)}{\sin(\alpha+\pi)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \cot\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}).$$

Man kann diese Relation auch überprüfen, also die Tatsache, dass Pi tatsächlich auch eine Periode von Tangens und Kotangens ist. Man kann dies mittels einer direkten Kalkulation prüfen, indem man eine Brücke schlägt zu den bereits bekannten Relationen Sinus und Kosinus. Wenn Sie sich zum Beispiel Tangens Alpha + Pi, hier, anschauen, muss man den Quotienten von Sinus Alpha + Pi und Kosinus Alpha + Pi nehmen. Also wissen wir, dass wenn wir den Winkel von Pi für Sinus und Kosinus verringern, man einen Sinus und einen Kosinus erhält, die einfach nur das Vorzeichen wechseln. Allerdings werden sich die beiden Vorzeichen dieses Quotienten neutralisieren, und es bleibt nur Sinus Alpha auf Kosinus Alpha, was dem Tangens Alpha entspricht, und dies gilt für alle Alpha, die sich im Definitionsbereich von Tangens befinden. Für Kotangens führe ich eine ähnliche Berechnung durch: Kotangens Alpha + Pi, ich habe hier Kosinus und Sinus, ich zieh den Winkel von Pi ab, was die Minus-Vorzeichen herbeiführt, die sich neutralisieren, und ich finde Kotangens Alpha wieder für alle zulässigen Alpha für Kotangens.

Notes

Summary

3m 03s

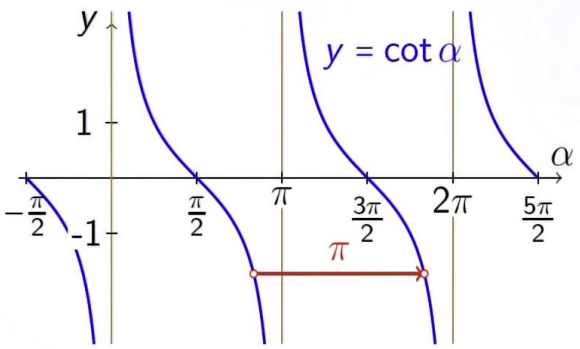
La période des fonctions tangente et cotangente

- La fonction tan : $\mathbf{D}_{\tan} \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \tan\alpha$ est π-périodique :

$$\tan\alpha = \tan(\alpha+\pi), \quad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}).$$

- La fonction cot : $\mathbf{D}_{\cot} \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \cot\alpha$ est π-périodique :

$$\cot\alpha = \cot(\alpha+\pi), \quad (\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}).$$



Ces deux fonctions n'admettent pas de période strictement comprise entre 0 et π.

Leur période est donc égale à π.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir können also das folgende Resultat formulieren: Die Funktion Tangens, in ihrem Definitionsbereich der Tangens zu R, wird Alpha zu Tangens Alpha und periodischem Pi verwandelt. Das bedeutet, dass, wenn ich den Winkel Alpha von Pi erhöhe, ich immer wieder zum gleichen Wert Tangens Alpha zurückkehre. Dies ist immer gültig. Gleiches für die Funktion Kotangens: Man stellt fest, dass sie periodisch Pi ist. Ich kann also den Winkel Alpha um einen Wert von Pi und Kotangens erhöhen, der seine Größe nicht erhöht. Wenn ich mir die Situation für Kotangens anschaue, kann man sich natürlich die Frage stellen: Könnte ich vielleicht eine noch kleinere Periode finden? Aber man sieht sofort, dass Pi die kürzeste Periode zu sein scheint. Wenn ich tatsächlich hier einen Winkel Alpha nehme und seinen Tangens Alpha, kann ich Alpha erhöhen? aber bevor ich diesen gleichen Wert Tangens Alpha wiederfinde, könnte ich mich nicht um weniger als Pi bewegen. Das gleiche stimmt hier für Kotangens: Pi scheint die kürzeste Periode zu sein, sodass man sagen kann, dass Pi die Periode von Tangens und von Kotangens ist.

Notes

Summary

4m 04s

Parité des fonctions tangente et cotangente

La fonction *cosinus* est paire et la fonction *sinus* est impaire :

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \text{et} \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Schauen wir uns nun einmal an, was man über die Parität der Funktionen Tangens und Kotangens sagen kann: Das heißt, dass wir gern entscheiden würden, ob sie nun gerade, ungerade, oder weder das eine noch das andere sind. Zu diesem Zweck müssen wir uns an das erinnern, was wir bereits über Kosinus und Sinus wissen. Wir wissen, dass die Funktion Kosinus gerade ist: Wenn ich sie also an der Stelle minus Alpha oder Alpha nehme, erhalte ich immer die gleichen Werte für Kosinus. Das ist richtig für alle Werte von Alpha in R. Anders jedoch die Funktion Sinus, die ihrerseits ungerade ist: Wenn ich Alpha durch minus Alpha ersetze, ändert Sinus auch sein Vorzeichen.

Notes

Summary

5m 10s

Parité des fonctions tangente et cotangente

La fonction *cosinus* est paire et la fonction *sinus* est impaire :

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \text{et} \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

On en déduit que les fonctions *tangente* et *cotangente* sont impaires :

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}),$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}).$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

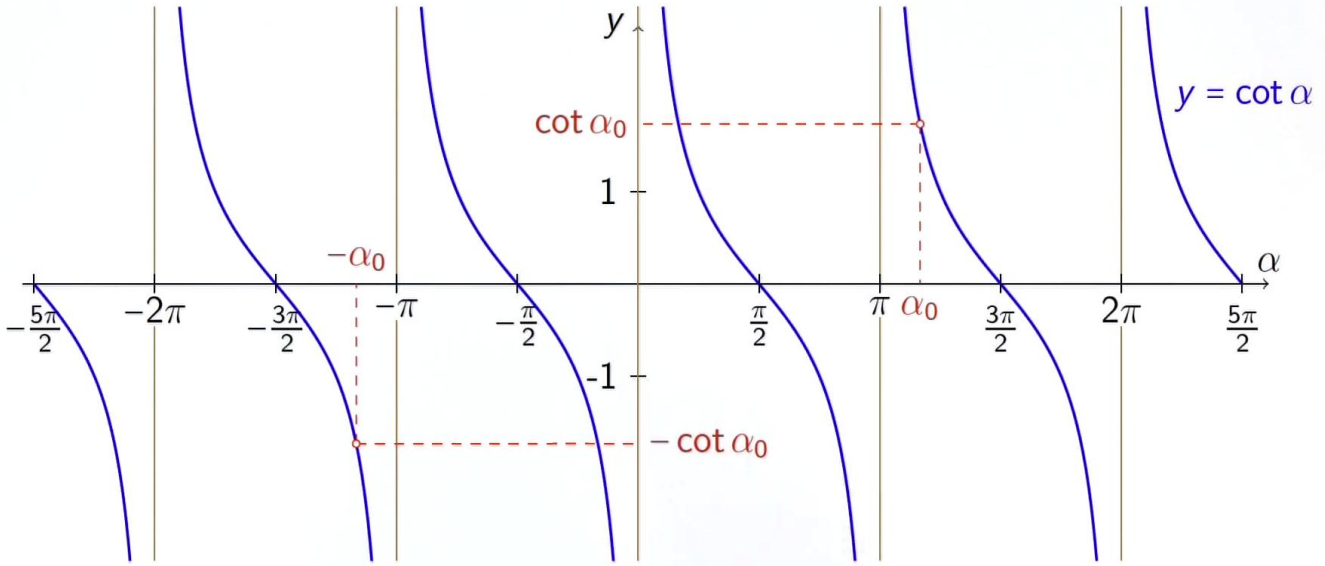
Wir können aus dieser Tatsache schließen, dass Tangens und Kotangens ungerade Funktionen sind, wenn sie Quotienten einer geraden und ungeraden Funktion sind. Schauen wir uns dies einmal für Kotangens an: Wenn ich also Kotangens an der Stelle minus Alpha nehme, muss ich Kosinus minus Alpha, den Sinus minus Alpha nehmen. Ich nutze die Tatsache, dass Kosinus gerade ist, das heißt, dass ich Kosinus minus Alpha durch Kosinus Alpha ersetze. Ich nutze die Tatsache, dass Sinus ungerade ist, ich ersetze Sinus minus Alpha durch minus Sinus Alpha, und dieser Quotient erhält somit ein Vorzeichen minus Kosinus auf Sinus, was minus Kotangens Alpha entspricht. Und diese Berechnung ist so lange gültig, wie Sinus sich nicht auflöst, und das ist genau der Definitionsbereich von Kotangens. Für Tangens in der oberen Linie, denke ich, dass Sie es parallel mit verfolgt haben, haben Sie es in gleicher Art und Weise in diesem Fall ist lediglich Sinus der Zähler; Kosinus der Nenner, aber die Paritäten bleiben gleich, und für Kosinus bleibt am wenigsten.

Notes

Summary

5m 45s

La fonction cotangente est impaire



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir haben gesagt, dass wir trotzdem gern die Relationen interpretieren würden, die wir finden, also die Tatsache gerade/ungerade, auch auf dem Graphen der Funktionen. Also machen wir es: Hier habe ich die Achse der Alpha, ich habe die Achse der Y, und ich habe den Graphen von Tangens Alpha. Sie werden ganz einfach die Schlüsselelemente finden, also die Nullen dieser Funktion und die Pole bei Pi minus 2 Pi. Wenn ich mich auf eine Stelle setze, die ich hier Alpha Zero notiert habe und schaue, welches der Wert von Tangens ist, und wenn ich das Gleiche an einer Stelle minus Alpha Null tue, erhalte ich die gleichen Werte, als absoluten Wert, aber mit umgekehrten Vorzeichen. Das kommt daher, weil der Graph von Tangens Alpha eine Punktsymmetrie besitzt im Vergleich zum Ursprung. Für Kotangens kann man ebenso verfahren: Diese Funktion ist auch eine ungerade Funktion, sie ist also auch symmetrisch gegenüber einer ursprünglichen Punktsymmetrie. Wenn ich mir den Wert dieser Funktion anschaue an einem Punkt Alpha Null und minus Alpha Null, erhalte ich für Kotangens die gleichen Werte bis auf das Vorzeichen.

Notes

Summary

6m 45s

Remarque

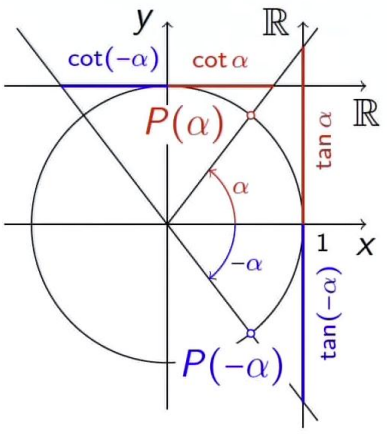
On vérifie sur le cercle trigonométrique que les fonctions tangente et cotangente sont impaires.

- Les droites $OP(-\alpha)$ et $OP(\alpha)$ sont symétriques par rapport à l'axe des x :

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}).$$

- Les droites $OP(-\alpha)$ et $OP(\alpha)$ sont symétriques par rapport à l'axe des y :

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}).$$



Wir möchten auch immer die Relationen verstehen, die wir formulieren; nicht nur auf dem Graphen, den wir gerade gemacht haben, sondern wir würden auch gern die Relationen verstehen, dass also die Funktionen Tangens und Kotangens ungerade ist: Wir würden dieses Phänomen auch gern auf dem trigonometrischen Kreis verstehen. Ich habe dafür die notwendige Lösung mit dem trigonometrischen Kreis und den Achsen für Tangens und Kotangens. Wenn ich also zwei Winkel nehme, den einen Alpha und den anderen minus Alpha, habe ich den Punkt P Alpha, den Punkt P von minus Alpha. Diese symmetrischen Punkte gegenüber der Achse der X, und wenn ich mir die Größen Tangens Alpha beziehungsweise Tangens von minus Alpha anschaue, sehe ich klar, dass sie im Hinblick auf den absoluten Wert gleich sind, jedoch umgekehrte Vorzeichen haben, wodurch ich die Ungleichheit von Tangens Alpha wiederfinde. In gleicher Art und Weise, wenn ich die Konstruktion für diese Winkel Alpha und minus Alpha für Kotangens hier mache, muss ich die Gerade verlängern und erhalte hier Kotangens Alpha und Kotangens minus Alpha. Wieder erhalte ich die gleichen Werte bis auf die Vorzeichen. Somit ist Kotangens von minus Alpha minus Kotangens Alpha für alle möglichen Werte von Alpha, has heißt, alle Alpha, die sich im Definitionsbereich von Kotangens befinden.

Notes

Summary

8m 03s

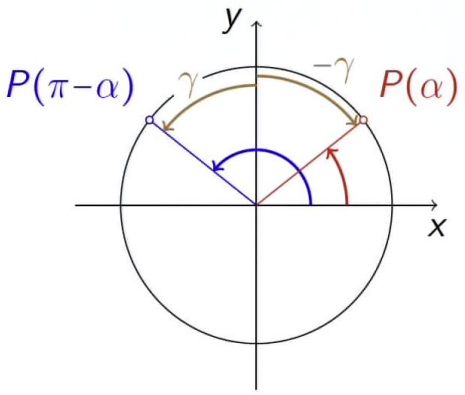
Angles supplémentaires

Soient α et β deux angles supplémentaires :

$$\alpha + \beta = \pi\,, \qquad \beta = \pi - \alpha.$$

Nous avons déjà vu qu'en posant $\gamma := \dfrac{\beta - \alpha}{2}$, on obtient :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\pi}{2} + \gamma$$



Schauen wir jetzt einmal was passiert, wenn wir zwei Winkel Alpha und Beta haben und gern die Werte Tangens und Kotangens in Alpha und Beta vergleichen möchten. Zusätzliche Winkel bedeuten also, dass die Summe der Winkel Pi entspricht oder, wenn Sie es bevorzugen, dass zum Beispiel Beta Pi minus Alpha ist. Wir haben dies hier eingezeichnet, auf dem trigonometrischen Kreis. Ich haben hier einen Winkel Alpha mit dem Punkt P Alpha und für den zusätzlichen Winkel Beta in blau nehme ich Pi minus Alpha. Für die Punkte P Alpha und P Beta kann ich sagen, dass sie in symmetrischer Position sind verglichen mit der Achse der Y. Wir haben also schon gesagt, dass dieser Typ der Symmetrie auch in einer etwas symmetrischeren Art ausgedrückt werden kann, indem man sagt, dass der Winkel Alpha lediglich ein halbes Pi minus ein Gamma ist, und der Winkel Beta ist ein halbes Pi plus ein Winkel Gamma. Was wir hier geschrieben haben. Da ist die Schreibweise symmetrischer, als im Vergleich zu Alpha und Beta in der Linie hier unten.

Notes

Summary

9m 18s

Tangente et cotangente d'angles supplémentaires

Nous savons déjà que

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \text{et} \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Il en découle d'une part, que pour tout $\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}$,

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

et d'autre part, que pour tout $\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}$,

$$\cot(\pi - \alpha) = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha.$$

Was wissen wir also über Sinus und Kosinus in dieser Situation? Wir wissen, dass, wenn ich Sinus an der Stelle Pi minus Alpha und Alpha betrachte, wenn ich also die zusätzlichen Winkel Alpha und hier Beta habe, ich weiß, dass deren Sinus gleich ist, und Kosinus das Vorzeichen wechselt. Das kann man ganz eindeutig auf dem trigonometrischen Kreis sehen. Daraus ergibt sich für Tangens, ich mache den Quotienten, Tangens von Pi minus Alpha, das heißt Sinus und Kosinus an der Stelle Pi minus Alpha. Sinus bleibt gleich, ich kann in den Zähler somit Sinus Alpha schreiben. Für Kosinus muss ich minus Kosinus Alpha schreiben, und es bleibt also Tangens Alpha. Für Kotangens habe ich absolut das Gleiche: Ich nehme Kotangens von Pi minus Alpha, also Kosinus von Sinus in den Zähler und erhalte minus Kosinus Alpha, im Nenner Sinus Alpha, und zum Schluss bleibt mir ein minus Kotangens Alpha. Diese beiden Relationen sind gültig für alle Alpha, wo Tangens Alpha beziehungsweise Kotangens Alpha definiert sind.

Notes

Summary

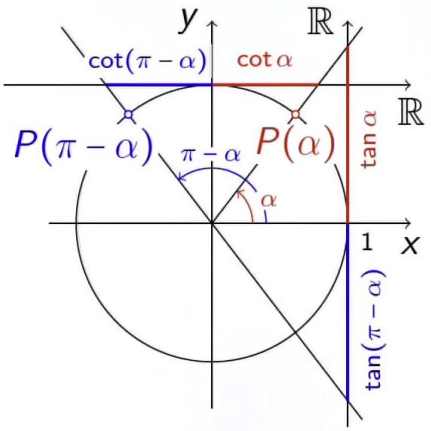
10m 23s

Tangente et cotangente d'angles supplémentaires

Ces deux résultats se vérifient sur le cercle trigonométrique :

- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$,
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$.

Ou sous une forme plus symétrique :



Versuchen wir, diese Relation für die zusätzlichen Winkel auf dem trigonometrischen Kreis zu verstehen. Ich habe hier die Positionen Alpha und Pi minus Alpha, also die zusätzlichen Winkel Alpha und den Winkel in blau, den wir als Beta qualifizieren können. Wenn ich die Konstruktion für Tangens Alpha erstelle, hier in rot, nehme ich die Gerade OP, teile sie, und habe hier Tangens Alpha. Ich mache das Gleiche für den Winkel Beta, das heißt Pi minus Alpha, ich nehme die Gerade, teile sie, und finde hier zweimal den gleichen Wert wieder, bis auf das Vorzeichen. Das bedeutet, dass Tangens von Pi minus Alpha das Gleiche ist wie minus Tangens Alpha. Für Kotangens mache ich die entsprechende Konstruktion und erhalte hier Kotangens Alpha für den Winkel Alpha in rot, und ich erhalte für den Winkel in blau Kotangens von Pi minus Alpha erneut durch Symmetrie. Wir haben hier die gleichen Längen, aber die Werte auf der horizontalen numerischen Achse haben entgegengesetzte Vorzeichen. Ich erhalte also Kotangens von Pi minus Alpha ist gleich minus Kotangens Alpha. Man kann diese Resultate natürlich in einer symmetrischen Form ausdrücken. Ich erinnere Sie daran, dass das bedeutet, dass die Winkel Alpha und Beta ein halbes Pi plus/minus etwas sind.

Notes

Summary

11m 33s

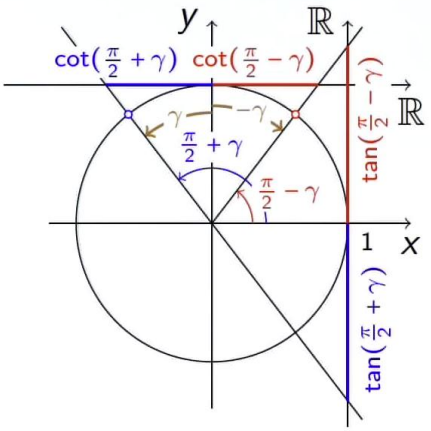
Tangente et cotangente d'angles supplémentaires

Ces deux résultats se vérifient sur le cercle trigonométrique :

- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$,
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$.

Ou sous une forme plus symétrique :

- $\tan(\frac{\pi}{2} - \gamma) = -\tan(\frac{\pi}{2} + \gamma)$,
- $\cot(\frac{\pi}{2} - \gamma) = -\cot(\frac{\pi}{2} + \gamma)$.



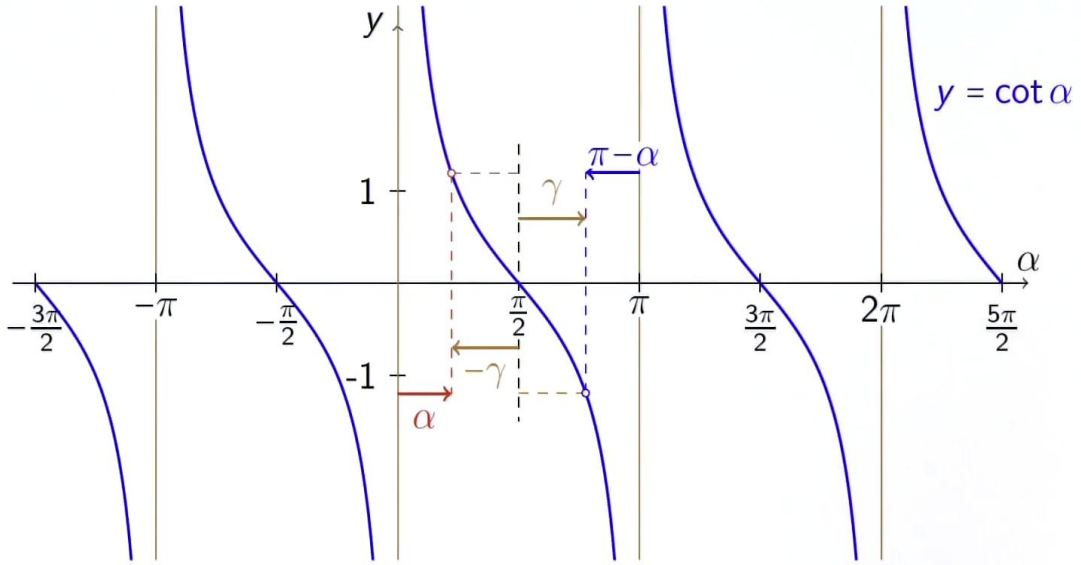
Wir haben da also dieses halbe Pi minus Gamma, ein halbes Pi plus Gamma, und wenn ich nun Tangens vom roten Winkel nehme, das heißt also, dass das hier ein halbes Pi minus Gamma ist, und für den blauen Winkel ein halbes Pi plus Gamma, erhalte ich das Gleiche, bis auf die Vorzeichen, und für Kotangens habe ich erneut das Gleiche bis auf die Vorzeichen. Hier ist die Formulierung einfach symmetrischer als hier oben, aber eigentlich sind es die gleichen Relationen.

Notes

Summary

12m 46s

Cotangente : symétrie de centre $(\frac{\pi}{2}, 0)$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

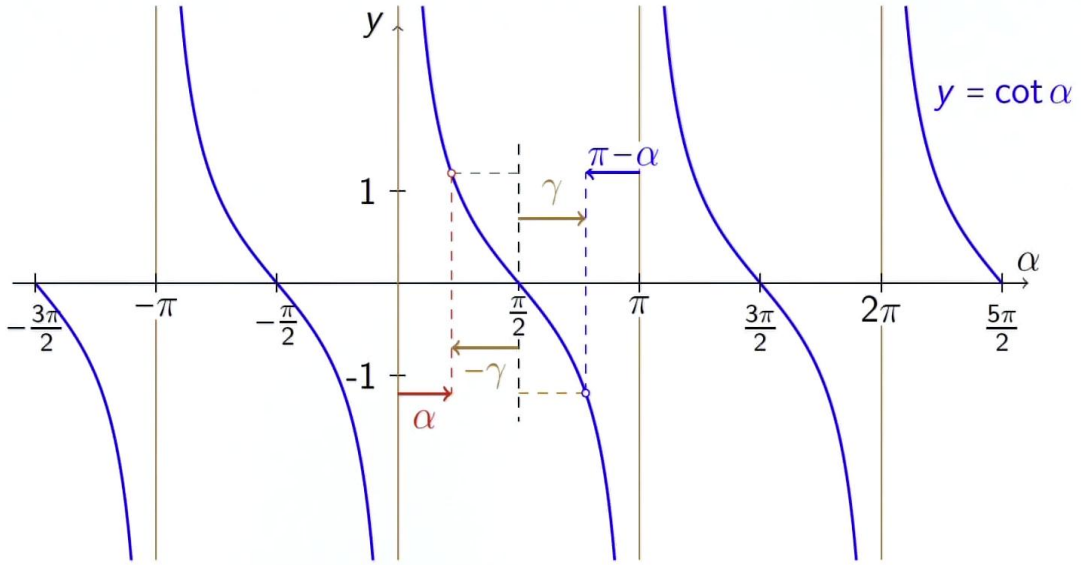
Wir haben auch gesagt, dass wir unsere Relationen auf dem Graphen der Funktionen interpretieren wollten: Hier haben sie den Graphen der Tangens. Hier die Achse der Alpha, die Achse der Y, hier der Ursprung, hier Tangens. Wenn ich mich also an eine Stelle Alpha begebe, die hier rot angegeben ist, oder gar Pi minus Alpha hier, das, das ist der Winkel Beta, sieht man sofort, dass die entsprechenden Werte der Tangens hier gleich sind, bis auf das Vorzeichen. Ich habe also Tangens von Alpha, was das Gleiche ist wie minus Tangens von Pi minus Alpha. Oder aber man stellt sich auf ein halbes Pi, das ist die Stelle, an der wir einen Pol für Tangens haben, und wir bewegen uns nach links und nach rechts um den gleichen Wert Gamma, und wir können sagen, dass Tangens an der Stelle ein halbes Pi minus Gamma, das ist hier, das Gleiche ist wie Tangens an der Stelle ein halbes Pi plus Gamma, das hier ist, bis auf das Vorzeichen, also mit einem Minus-Vorzeichen zwischen diesen beiden Werten. Für Kotangens kann man die folgende Figur entdecken: Wir haben also die Achse der Alpha, die Achse der Y, hier den Ursprung und erneut, wenn ich mich in den Winkel Alpha und Pi minus Alpha begebe, stelle ich fest, dass ich die Werte von Kotangens erhalte, die bis auf die Vorzeichen gleich sind.

Notes

Summary

13m 16s

Cotangente : symétrie de centre $(\frac{\pi}{2}, 0)$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Der Grund hierfür liegt daran, dass die Kurve hier symmetrisch ist, sie besitzt eine Punktsymmetrie am Punkt ein halbes Pi Null. Man kann wiederum symmetrisch sagen, dass wenn ich mich um mehr als ein halbes Pi von Gamma entferne, oder halt von minus Gamme, für Kotangens, ich Werte mit entgegengesetztem Vorzeichen aber dem gleichen absoluten Wert erhalte.

Notes

Summary

14m 44s

Angles complémentaires

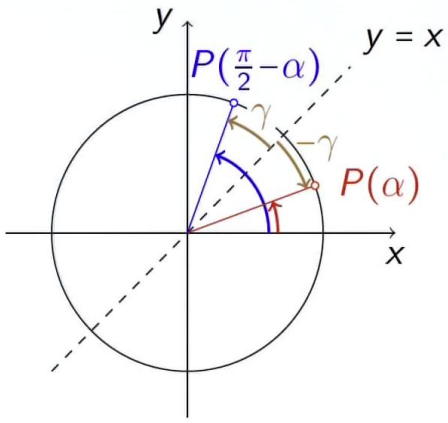
Soient α et β deux angles complémentaires :

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

les points $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ sont symétriques par rapport à l'axe $y = x$.

Et en posant $\gamma := \dfrac{\beta - \alpha}{2}$, on a :

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \gamma \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\pi}{4} + \gamma.$$



Sehen wir jetzt einmal, was für zusätzliche Winkel passiert, das heißt für Winkel Alpha und Beta wie diejenigen, deren Summe ein halbes Pi ist. Man kann dann ebenfalls sagen, dass man den Winkel Beta mittels einem halben Pi minus Alpha ausdrückt. Auf diesem trigonometrischen Kreis haben wir diese Situation mit dem Winkel Alpha in rot und einem halben Pi minus Alpha in blau. Das bedeutet, dass diesmal die beiden entsprechenden Punkte, der rote Punkt P und der Punkt P, der in blau angezeigt ist, diese beiden Punkte sind diesmal symmetrisch im Vergleich zur Achse Y ist gleich X. Auch dort haben wir eine Beurteilung eingeführt, die symmetrischer ist, das heißt, dass man sagen kann, dass einer der Winkel durch Pi minus Gamma gegeben ist und der andere durch Pi plus Gamma, was wir mit der folgenden Schreibweise darstellen.

Notes

Summary

15m 08s

Tangente et cotangente d'angles complémentaires

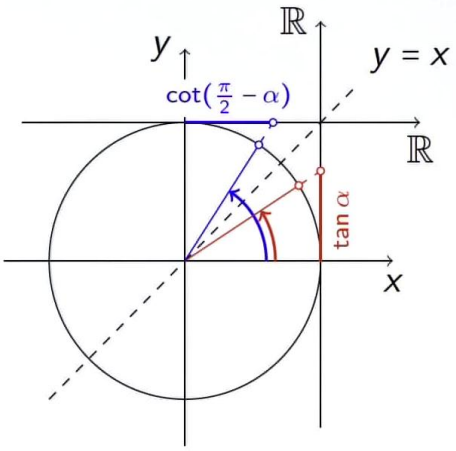
Nous savons déjà que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \quad \text{et} \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

En conséquence :

- pour tout $\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}$,

$$\cot\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Für Sinus und Kosinus mit zusätzlichen Winkeln hier auf dieser Figur wissen wir bereits, dass der Sinus des einen der Kosinus des anderen ist. Als wenden wir dies auf den Fall Tangens an. Für Tangens bedeutet das Folgendes: Ich nehme Tangens an der Stelle¨ ein halbes Pi minus Alpha, also ist es der Sinus des Kosinus. Schauen wir uns diesen Sinus ein halbes Pi minus Alpha an, so entspricht dies Kosinus Alpha. Kosinus ein halbes Pi minus Alpha jedoch entspricht Sinus. Diesmal also erhalte ich Kotangens Alpha. Man kann dies in der Tat auf dem trigonometrischen Zirkel interpretieren: Wir haben hier den Zirkel Alpha, den symmetrischen Winkel Beta im Vergleich zur Achse Y gleich X, und man sieht sofort, dass die Konstruktion für Tangens ein halbes Pi minus Alpha, das ist der blaue Winkel, und diese Tangente hat den gleichen Wert wie Kotangens Alpha für den Winkel in rot. Für Kotangens ist die Berechnung genau gleich. Man nimmt Kotangens an der Stelle ein halbes Pi minus Alpha, also der Kosinus von Sinus, man ersetzt diesen Kosinus von einem halben Pi minus Alpha durch seinen Sinus, den Sinus von einem halben Pi minus Alpha durch den Kosinus, - das ist die Relation, die wir vorher erwähnt haben - und man findet dieses Mal den Quotienten vom Sinus von Kosinus, der der Tangente Alpha entspricht.

Notes

Summary

15m 53s

Tangente et cotangente d'angles complémentaires

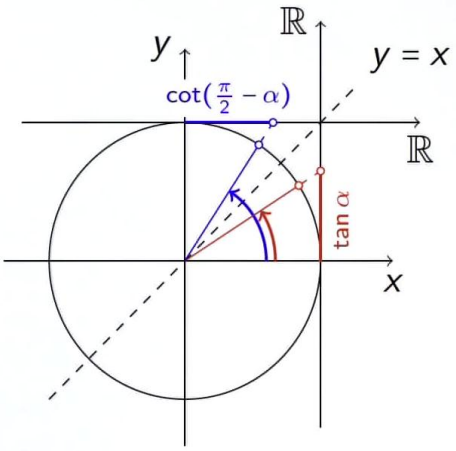
Nous savons déjà que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \quad \text{et} \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

En conséquence :

- pour tout $\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}$,

$$\cot\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Auch hier, können Sie auf dem trigonometrischen Kreis zweifellos dieses Resultat wiederfinden: Sie haben hier den Winkel Alpha, hier den Winkel Beta und Tangens Alpha, und Kotangens von einem halben Pi minus Alpha, das heißt von Beta, diese beiden numerischen Wert, also Längen mit Vorzeichen sind identisch.

Notes

Summary

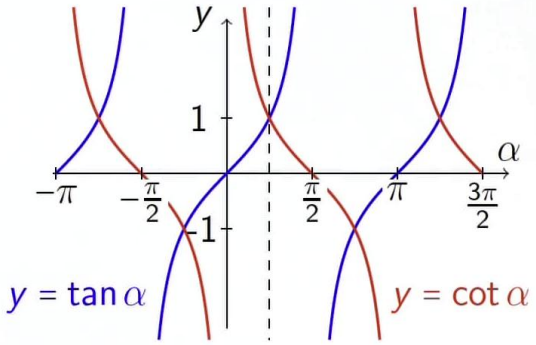
17m 19s

Symétrie d'axe $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Sous une forme plus symétrique, les deux relations précédentes s'écrivent

- $\tan(\frac{\pi}{4} - \gamma) = \cot(\frac{\pi}{4} + \gamma)$,
- $\cot(\frac{\pi}{4} - \gamma) = \tan(\frac{\pi}{4} + \gamma)$, $\quad (\gamma \in \mathbb{R})$.

Ceci montre que les graphes des fonctions tan et cot sont symétriques par rapport à l'axe vertical d'équation $\alpha = \frac{\pi}{4}$.



Also, mit einer etwas symmetrischeren Form kann man diese Winkel Alpha und Beta, demnach Alpha ein halbes Pi minus Alpha, durch Pi minus Gamma und Pi plus Gamma ersetzen, und man erhält also, dass Tangens von Pi minus Gamma gleich ist wie Kotangens von Pi plus Gamma und für Kotangens von Pi minus Gamma ist es Tangens von Pi plus Gamma. Dies ist im Grunde genommen für alle Werte von Gamma gültig, positive oder negative, was dazu führt, dass diese beiden Relationen übereinstimmen. Es reicht aus, hier ein Vorzeichen Minus für Gamma zu nehmen, und man erhält das Plus hier, und man hat exakt die gleiche Relation wie hier oben. Somit hat man lediglich eine einzige Relation in diesem Fall. Auf dem Graphen findet man natürlich auch diese Relation: Man nimmt den Graphen von Tangens Alpha mit der Punktsymmetrie im Vergleich zum Ursprung. Man nimmt auch dieses Kotangens hier, Punktsymmetrie im Vergleich zum Ursprung. Wenn ich an diese Stelle Pi gehe, da dies Stelle Pi ist hier, stelle ich fest, dass dort die Kurven Tangens und Kotangens sich schneiden, und ich kann nun dieses Resultat auf den Kurven interpretieren, indem ich ein halbes Pi minus Gamma und ein halbes plus Gamma nehme. Ich stelle fest, dass in der Tat Tangens zu Kotangens wird und umgekehrt.

Notes

Summary

17m 38s

Les symétries des fonctions tangente et cotangente

Ce que nous avons appris :

- la périodicité des fonctions tangente et cotangente ;
- la parité de ces deux fonctions ;
- tangente et cotangente des angles supplémentaires ;
- tangente et cotangente des angles complémentaires.

Prochaine étape :

- l'utilisation de la tangente et de la cotangente dans les triangles rectangles.

Fassen wir zusammen. Was haben wir gelernt? Wir haben die Periodizität der Funktionen Tangens und Kotangens analysiert; und wir haben gesehen, dass sie bi-periodisch sind, und dass Pi deren Periode ist. Wir haben die Parität dieser beiden Funktionen analysiert; wir sehen, dass sie beide ungerade sind. Wir haben geschaut was passiert, wenn für uns die zusätzlichen und komplementären Winkel angeschaut, sobald wir ein Tangens und Kotangens haben. Das nächste Mail stelle ich die Nutzung dieser beiden Funktionen Tangens und Kotangens vor im Rahmen des rechtwinkligen Dreiecks. Ich danke Ihnen. Bis zum nächsten Mal.

Notes

Summary

19m 07s