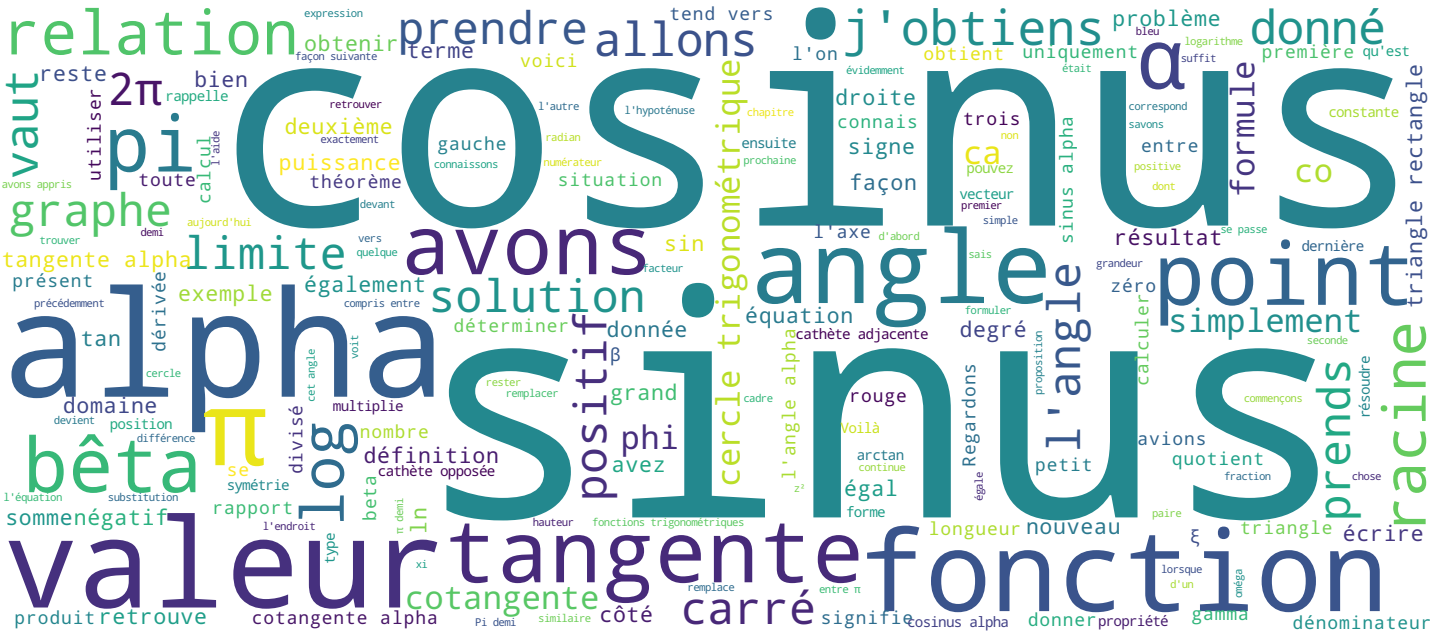
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les fonctions trigonométriques tangentes et cotangentes et leurs inverses

3.3 Relations dans le triangle rectangle

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

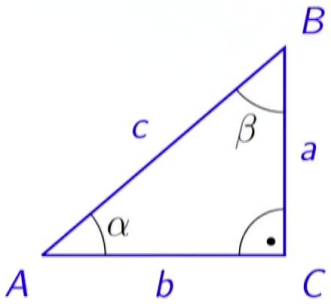


EPFL

Tangente et cotangente dans le triangle rectangle

Nous avons déjà vu que dans le triangle ABC rectangle en C, on a :

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Bonjour. lors des dernières séquences je vous ai présenté les fonctions trigonométriques *tangente* et *cotangente*. Nous avons étudié outre leurs définitions, leurs graphes; nous avons établi des relations dues aux symétries sur le cercle trigonométrique. Je vous avais promis de parler aujourd'hui de l'utilité de ces fonctions *tangente* et *cotangente* dans le cadre du triangle rectangle. Alors commençons par rappeler ce que nous avons dit au sujet du triangle rectangle. Alors, dans la notation standard A, B, C nous allons mettre l'angle droit au point C, nous avons l'angle alpha (α) en A, bêta (β) en B, nous avons *c* en face du point C qui est l'hypoténuse et nous avons deux cathètes *a* et *b*, *a* opposé à grand A et b opposé à grand B. Dans cette configuration nous avons su interpréter le sinus de alpha (α) et le cosinus de alpha (α). Le sinus de alpha, commençons là, le sinus de alpha est donné par la cathète opposée, divisée par l'hypoténuse donc *a* sur *c*. Le cosinus quand à lui, le cosinus de alpha c'est la cathète adjacente sur *c* donc *b* sur *c*. Alors, on en déduit immédiatement, une relation pour *tangente* et *cotangente*.

Notes

Summary

0m 03s

Tangente et cotangente dans le triangle rectangle

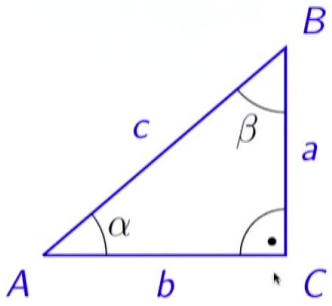
Nous avons déjà vu que dans le triangle ABC rectangle en C, on a :

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

On en déduit la tangente et la cotangente de l'angle α :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b},$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{a}.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

En effet pour tangente alpha, qui n'est rien d'autre que le sinus d'alpha divisé par cosinus d'alpha, je prends pour sinus de alpha ce *a* sur *c*, pour cosinus alpha, ce *b* sur *c*, j'amplifie cette fraction par *c* et il me reste *a* sur *b*. C'est-à-dire que pour tangente alpha, j'ai la cathète opposée divisée par la cathète adjacente. Quand à cotangente alpha, je sais que c'est 1 sur tangente alpha donc là le rapport *a* sur *b* devient b sur *a* donc pour *cotangente* alpha, j'ai la cathète adjacente divisée par la cathète opposée.

Notes

Summary

1m 20s

Rapports trigonométriques dans le triangle rectangle

Proposition

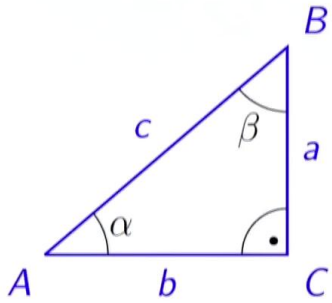
Dans le triangle rectangle ABC, on a :

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cathète opposée à l'angle } \alpha}{\text{hypothénuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cathète adjacente à l'angle } \alpha}{\text{hypothénuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cathète opposée à l'angle } \alpha}{\text{cathète adjacente à l'angle } \alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cathète adjacente à l'angle } \alpha}{\text{cathète opposée à l'angle } \alpha}$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

On peut donc formuler la proposition que voici dans un triangle rectangle A, B, C numéroté de façon standard. Alors, le sinus de alpha, c'est la cathète opposée sur l'hypoténuse donc c'est *a* sur *c*. Le cosinus d'alpha c'est *b* sur *c*, c'est la cathète adjacente divisée par l'hypoténuse. Tangente alpha c'est *a* sur *b*, c'est la cathète opposée divisée par la cathète adjacente et cotangente c'est *b* sur *a* donc c'est la cathète adjacente divisée par la cathète opposée. Souvent on retient ces propositions, cette proposition uniquement sous la forme cotangente alpha c'est *a* sur *ba*, tangente alpha c'est *a* sur *b*.

Notes

Summary

2m 00s

Rapports trigonométriques dans le triangle rectangle

Proposition

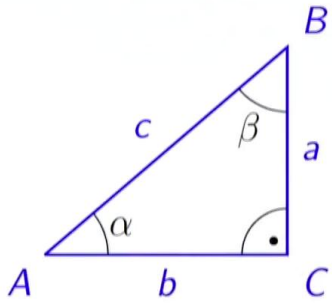
Pour l'angle β ces relations s'écrivent :

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{cathète opposée à l'angle } \beta}{\text{hypothénuse}}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{cathète adjacente à l'angle } \beta}{\text{hypothénuse}}$$

$$\tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{cathète opposée à l'angle } \beta}{\text{cathète adjacente à l'angle } \beta}$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \frac{\text{cathète adjacente à l'angle } \beta}{\text{cathète opposée à l'angle } \beta}$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors si on le fait, on peut écrire les relations pour bêta (β) de la façon suivante : le sinus de bêta c'est l'opposé donc *b* sur *c*, le cosinus de bêta c'est l'adjacent *a* sur *c*, tangente de bêta, c'est *b* sur *a* et cotangente de bêta, c'est *a* sur *b*.

Notes

Summary

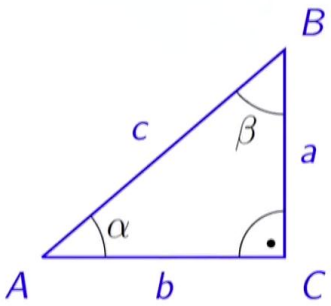
2m 47s

Exemple

Dans un triangle ABC rectangle en C, on connaît la longueur de la cathète a et la valeur de l'angle α en A :

$$a = 5 \qquad \text{et} \qquad \alpha = 38°.$$

Déterminer la longueur de la cathète b.



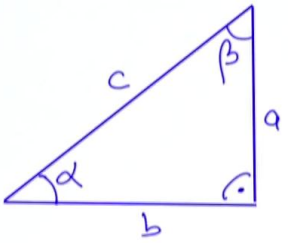
Alors, montrons comment on peut appliquer ces relations pour effectuer des calculs autour du triangle rectangle. Supposons que nous ayons un triangle rectangle dessiné ici et nous connaissons la cathète *a*, elle vaut cinq (5) et nous connaissons l'angle alpha- 38 degrés. Dans le contexte du calcul autour du triangle, visuellement les angles ne sont pas exprimés en radians mais en degrés, il faut transformer ces degrés en radians comme nous l'avons appris. Ici l'objectif c'est de déterminer la longueur de la cathète *b*, nous avions déjà résolu ce type de problème à l'époque nous étions passé par un calcul qui déterminait d'abord *c* et ensuite *b*. Cette fois-ci nous allons essayer de donner une solution qui évite ce passage à travers l'hypoténuse *c*.

Notes

Summary

3m 10s

Exemple (solution)



$a = 5$, $\alpha = 38°$

On cherche : b

Mais $\cot\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \cot\alpha$

$b = 5 \cdot \cot 38° \approx 6.39971$

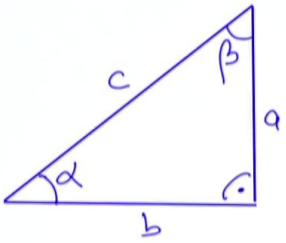
Donc, nous avons ce triangle rectangle, nous savons que *a* vaut cinq (5), nous connaissons également alpha. Alors nous cherchons à déterminer la valeur de *b*. À cet effet, remarquons que nous avons une relation pour cotangente alpha. Alors, cotangente alpha est donnée ici par la cathète adjacente divisée par la cathète opposée, c'est à dire que c'est *b* sur *a*. De ce fait, nous pouvons déterminer la valeur de *b* comme *a* fois cotangente alpha donc *b* vaut *a*, nous connaissons que c'est 5, fois la cotangente de alpha que nous connaissons également, cotangente de 38 degrés. Alors, à l'aide d'une calculatrice on peut déterminer assez facilement cette valeur de *b* qui vaut 6,39971. Une petite remarque s'impose ici quand même : si dans ce contexte, au lieu de connaître l'angle alpha et *a* nous avions par exemple connu *a* et *b*, la relation que j'ai ici, indiquerait que je connais cotangente alpha. Je connais le quotient *b* sur *a* et dans ce cas là, il faudrait déterminer l'angle alpha qui correspond à cette valeur. Alors là nous nous retrouvons dans un problème de type cotangente alpha est une constante donnée, détermine alpha.

Notes

Summary

4m 01s

Exemple (solution)



$a = 5$, $\alpha = 38°$

On cherche : b

Mais $\cot\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \cot\alpha$

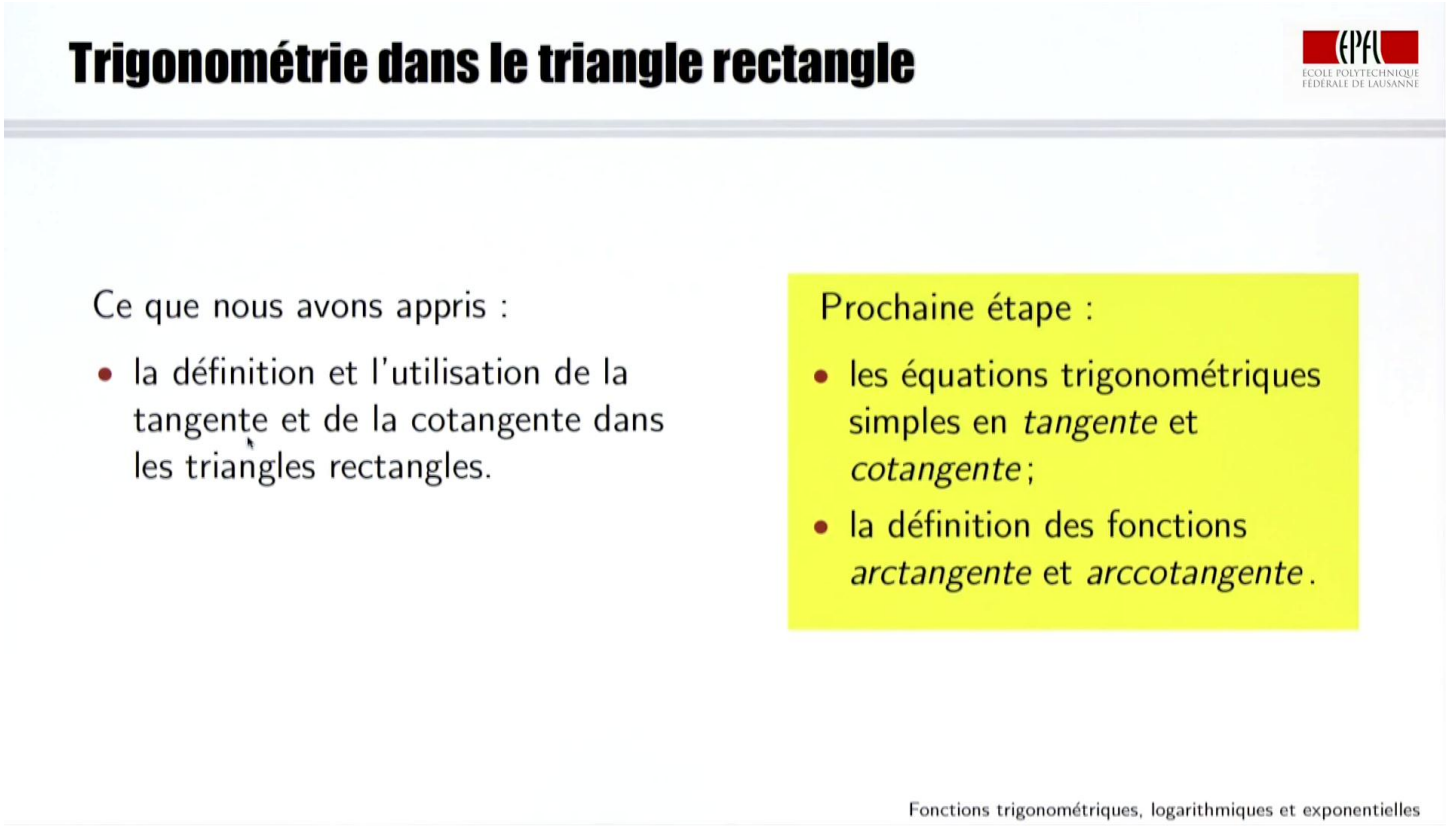
$b = 5 \cdot \cot 38° \approx 6.39971$

C'est tout à fait similaire aux problèmes que nous avions rencontrés autour du sinus et du cosinus, on avait dit que le sinus de alpha vaut, par exemple, une valeur *y* donnée ou le cosinus de alpha vaut une valeur *x* donnée et nous avons appris à déterminer les angles correspondants, c'est ce qu'on appelle des équations trigonométrique simples. Alors, la prochaine fois nous parlerons de ce type d'équation et nous pourrons alors aborder le calcul de triangle où on détermine des angles à l'aide de ces relations que nous avons établies aujourd'hui.

Notes

Summary

5m 56s



Résumant ce que nous avons appris aujourd'hui : nous avons appris simplement à utiliser les fonctions tangente et cotangente dans le cadre du triangle rectangle. La prochaine étape : nous allons résoudre des équations trigonométriques simples du type tangente alpha une constante, cotangente alpha une constante. Je viens de mentionner que ce type d'équation peut apparaître de façon très naturelle dans le cadre des calculs autours des triangles et nous allons- tout comme pour le sinus et le cosinus- alors aboutir à une définition des fonctions *arctangente* et *arccotangente*. Voilà, ça y est pour aujourd'hui, je vous remercie, à la prochaine.

Notes

Summary

6m 29s