ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

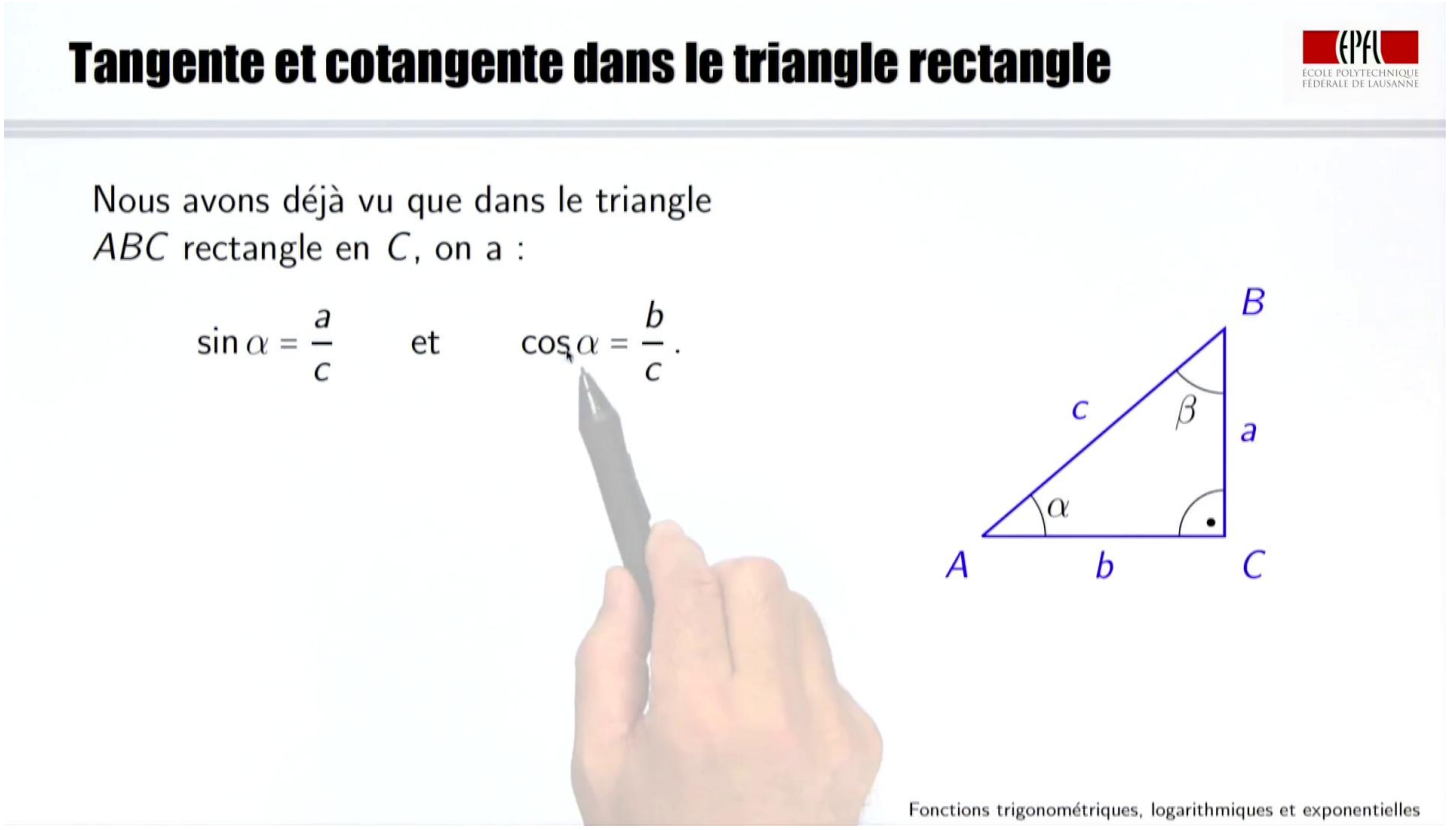
Les fonctions trigonométriques tangentes et cotangentes et leurs inverses

3.3 Relations dans le triangle rectangle

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Sinus
Alpha
Kosinus
Tangens
Wert
Winkel
Funktion
heißt
mal
Cosinus
Alpha
π
Kotangens
Gleichung
Null
Pi
α
Summe
Beta
Term
Formeln
finden
Hypotenuse
ergibt
Quadrat
geteilt
Funktionen
Wurzel
log
nehme
ersetzen
berechnen
Lösungen
Ableitung
positiv
sagen
entspricht
Punkt
Differenz
Ergebnis
Graphen
sin
cos
ln
arctan
Grad
Grenze
zwei
Gamma
Winkel
erhalten
schreiben
bedeutet
gleiche
Grenzwert
Werte
Seite
Problem
Fall
gerade
Beispiel
erhalte
bestimmt
Formel
bleibt
negativ
bestimmen
Achse
minus
gegeben
betrachten
liegt
Form
Omega
Produkt
kennen
multiplizieren
Vorzeichen
Einheitskreis
Konstante
rechtwinkligen Dreieck
Definitionsbereich
Quotienten
Steigung
Weise
Art
Punkte
Tat
Guten Tag
sieht
Relation
Typ
Zähler
nutzen
drei
Hilfe
Lösung
Arkustangens
Arkussinus
Kosinus Alpha
Sinus Alpha
Sinus Beta
Alpha Beta
Winkel Alpha
Pi minus
minus Alpha
minus Beta
minus Wurzel
trigonometrischen Kreis
Einheitskreis
Ankathete
Gegenkathete
Hypotenuse
Nenner
Kapitel
Symmetrie
Situation
Ausdruck
Definition
Berechnungen
Element
Halbe
größer
Faktor
nimmt
ersten
zweiten
erste
hoch
möchte
links
wollen
Beginnen
diesmal
Stelle
genau
tendiert
Dreieck
Zahl
Lassen
Bereich
passiert
Länge
Position
Tangente
Vektor
exp
kenne
versuchen
geht
Lösung
Wurzel
Verhältnis
Kosinus Alpha
erneut
Quadrat
gelernt
verwenden
bekannt
Term
Formeln
2π
Alpha
Tangens
Beta
Sinus Alpha
gleichen
Fläche
geben
Teil
Grad
beträgt
Graphen
definiert
Gamma
zwei
Kotangens
Alpha
Winkel
Pi
Summe
α
Omega
Produkt
kennen
multiplizieren
Vorzeichen
Einheitskreis
Achse
minus
bestimmen
negativ
gegeben
betrachten
liegt
Form
Schauen
gegenüber
Potenz
Pi minus
Beziehung
lösen
Zahl
Differenz
Punkt
Stelle
Ergebnis
Graphen
sin
cos
ln
arctan
Grad
Grenze
zwei
Gamma
Winkel Alpha
Pi
Summe



Guten Tag, während der letzten Sitzungen habe ich Ihnen die trigonometrischen Funktionen *Tangens* und *Kotangens* vorgestellt. Wir haben darüber hinaus ihre Definitionen und ihre Graphen studiert sowie die auf Symmetrien basierenden Beziehungen im Einheitskreis aufgestellt. Ich habe Ihnen versprochen, heute über die Nutzung der Funktionen *Tangens* und *Kotangens* im Einheitskreis zu sprechen. Fangen wir zunächst an zu wiederholen, was ich Ihnen zum rechtwinkligen Dreieck gesagt habe. In der Standard-Benennung des Dreiecks A, B, C legen wir den rechten Winkel auf den Punkt C, wir haben den Winkel Alpha (α) bei A, und Beta (β) bei B, wir haben *c* gegenüber vom Punkt C, dies ist die Hypotenuse und wir haben zwei Katheten *a* und *b*. *a* liegt gegenüber vom Punkt A und b gegenüber vom Punkt B. In diesem Grundfall haben wir den Sinus von Alpha (α) und den Cosinus von Alpha (α) kennengelernt. Beginnen wir beim Sinus von Alpha, der Sinus von Alpha wird bestimmt durch die Gegenkathete geteilt durch die Hypotenuse, folglich *a* geteilt durch *c*. Der Cosinus hingegen, der Cosinus von Alpha ist der Quotient aus Ankathete zu *c*, das heißt *b* geteilt durch *c*.

Notes

Summary

0m 03s

Tangente et cotangente dans le triangle rectangle

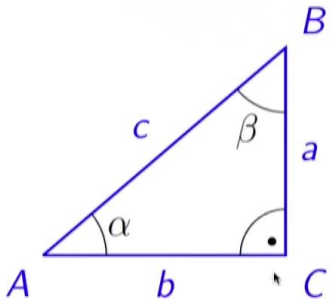
Nous avons déjà vu que dans le triangle ABC rectangle en C, on a :

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

On en déduit la tangente et la cotangente de l'angle α :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b},$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{a}.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Daraus können wir unmittelbar eine Beziehung zwischen *Tangens* und *Kotangens* herleiten. Tatsächlich ist der Tangens von Alpha nichts anderes als der Sinus von Alpha geteilt durch den Cosinus von Alpha. Für Sinus von Alpha setze ich ein: *a* geteilt durch *c*, für Cosinus von Alpha setze ich ein: *b* geteilt durch *c*, *c* kürze ich im Bruch weg und es bleibt *a* geteilt durch *b*. Das heißt für die Tangente von Alpha dividiere ich die Gegenkathete durch die Ankathete. Der Kotangens von alpha ist, wie wir wissen, 1 durch Tangens von Alpha, also wird der Term *a* geteilt durch *b* zu b geteilt durch *a*, folglich gilt für *Kotangens* von Alpha, ich dividiere die Ankathete durch die Gegenkathete.

Notes

Summary

1m 16s

Rapports trigonométriques dans le triangle rectangle

Proposition

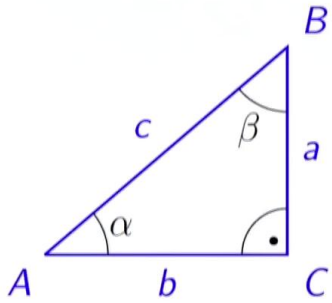
Dans le triangle rectangle ABC, on a :

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cathète opposée à l'angle } \alpha}{\text{hypothénuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cathète adjacente à l'angle } \alpha}{\text{hypothénuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cathète opposée à l'angle } \alpha}{\text{cathète adjacente à l'angle } \alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cathète adjacente à l'angle } \alpha}{\text{cathète opposée à l'angle } \alpha}$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir können also den Satz formulieren: In einem rechtwinkligen Dreieck A,B,C, das nach Standard-Notation beschriftet ist, ist der Sinus von Alpha die Gegenkathete dividiert durch die Hypotenuse, also *a* geteilt durch *c*. Der Kosinus von Alpha ist *b* geteilt durch *c*, das heißt die Ankathete dividiert durch die Hypotenuse. Der Tangens von Alpha ist *a* geteilt durch *b*, das heißt die Gegenkathete dividiert durch die Ankathete und der Kotangens ist *b* geteilt durch *a*, folglich die Ankathete dividiert durch die Hypotenuse. Oft reduziert man diese Sätze auf den einzelnen Satz der Kotangens von Alpha ist *a* geteilt durch *ba*, der Tangens von Alpha ist *a* geteilt durch *b*.

Notes

Summary

2m 00s

Rapports trigonométriques dans le triangle rectangle

Proposition

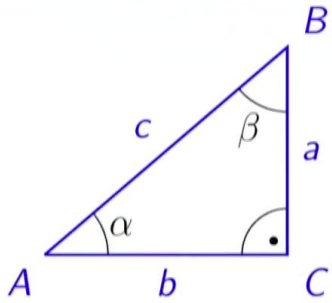
Pour l'angle β ces relations s'écrivent :

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{cathète opposée à l'angle } \beta}{\text{hypothénuse}}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{cathète adjacente à l'angle } \beta}{\text{hypothénuse}}$$

$$\tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{cathète opposée à l'angle } \beta}{\text{cathète adjacente à l'angle } \beta}$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \frac{\text{cathète adjacente à l'angle } \beta}{\text{cathète opposée à l'angle } \beta}$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Für Beta (β) kann man die Relationen also folgendermaßen darstellen: Der Sinus von Beta ist das Gegenteil, also *b* geteilt durch *c*, der Cosinus von Beta ist die Ankathete *a* geteilt durch *c*, der Tangens von Beta ist *b* geteilt durch *a* und der Kotangens von Beta ist *a* geteilt durch *b*.

Notes

Summary

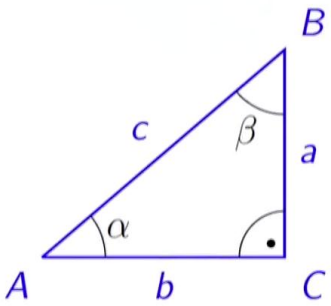
2m 47s

Exemple

Dans un triangle ABC rectangle en C, on connaît la longueur de la cathète a et la valeur de l'angle α en A :

$$a = 5 \qquad \text{et} \qquad \alpha = 38°.$$

Déterminer la longueur de la cathète b.



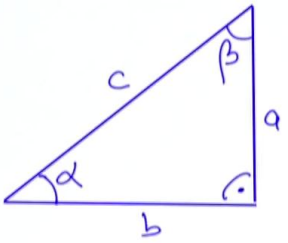
Beweisen wir also, wie man diese Beziehungen auf Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck anwenden kann. Nehmen wir an, wir haben ein rechtwinkliges Dreieck, wie hier gezeichnet, und wir kennen die Kathete *a*, diese beträgt 5. Ferner kennen wir den Winkel Alpha, 38°. Im Zusammenhang mit der Berechnung im Dreieck, werden die Winkel nicht in Radiant ausgedrückt, sondern in Grad. Das bedeutet, die Einheit Grad muss in Radiant umgerechnet werden, wie wir es bereits gelernt haben. Hier ist das Ziel, die Länger der Kathete *b* zu ermitteln. Diese Art von Problem haben wir schon gelöst als wir *c* und später *b* berechnet haben. Dieses Mal versuchen wir eine Lösung zu finden, die den Rechenweg über die Hypotenuse *c* vermeidet.

Notes

Summary

3m 10s

Exemple (solution)



$a = 5$, $\alpha = 38°$

On cherche : b

Mais $\cot\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \cot\alpha$

$b = 5 \cdot \cot 38° \approx 6.39971$

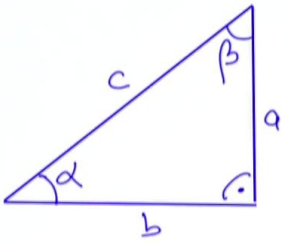
Wir haben also ein rechtwinkliges Dreieck, von dem wir wissen, dass *a* gleich 5 ist. Außerdem kennen wir Alpha. Wir versuchen also den Wert von *b* zu bestimmen. Zu diesem Zweck halten wir fest, dass wir eine Beziehung zum Kotangens von Alpha haben. Der Kotangens von Alpha ergibt sich aus der Ankathete dividiert durch die Gegenkathete, das heißt *b* geteilt durch *a*. Deswegen können wir den Wert von *b* bestimmen als *a* multipliziert mit dem Kotangens von Alpha. Folglich ist *b* gleich *a* - und wir wissen, dass dies 5 ist - multipliziert mit dem Kotangens von Alpha, der uns ebenfalls bekannt ist, von 38°. Mit Hilfe eines Taschenrechners können wir nun leicht den Wert von *b* bestimmen, der 6,39971 beträgt. Ein kleiner Hinweis drängt sich hier dennoch auf: Kennen wir statt dem Winkel Alpha und *a*, beispielsweise *a* und *b*, impliziert die vorliegende Gleichung, dass wir den Kotangens von Alpha kennen. Ich kenne den Quotienten *b* durch *a* und in diesem Fall, muss der Winkel Alpha bestimmt werden, der diesem Wert entspricht. Hier finden wir uns vor einem Problem des Kotangens von Alpha wieder, bei dem eine Konstante gegeben und Alpha zu bestimmen ist.

Notes

Summary

4m 01s

Exemple (solution)



$a = 5$, $\alpha = 38°$

On cherche : b

Mais $\cot\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \cot\alpha$

$b = 5 \cdot \cot 38° \approx 6.39971$

Dies gleicht den Problemen, denen wir bereits bei Sinus und Cosinus begegnet sind. Wir haben gesagt, dass zum Beispiel der Sinus von Alpha dem Wert *y* entspricht oder der Cosinus von Alpha dem Wert *x* entspricht. Und wir haben gelernt, die zugehörigen Winkel zu bestimmen. Diese bezeichnen wir als die einfachen trigonometrischen Gleichungen. Das nächste Mal werden wir über diesen Typ einer Gleichung sprechen und wir werden uns mit den Berechnungen des Dreiecks auseinandersetzen, mit denen man die Winkel mit Hilfe der heute etablierten Gleichungen berechnen kann.

Notes

Summary

5m 56s

Trigonométrie dans le triangle rectangle

Ce que nous avons appris :

- la définition et l'utilisation de la tangente et de la cotangente dans les triangles rectangles.

Prochaine étape :

- les équations trigonométriques simples en *tangente* et *cotangente* ;
- la définition des fonctions *arctangente* et *arccotangente*.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wiederholen wir, was wir heute gelernt haben: Wir haben gelernt, die Funktionen des Tangens und Kotangens im rechtwinkligen Dreieck anzuwenden. Im nächsten Schritt lösen wir einfache trigonometrische Gleichungen der Art der Konstanten Tangens von Alpha und Kotangens von Alpha. Ich möchte erwähnen, dass diese Art von Gleichung im Rahmen von Berechnungen in Dreiecken sehr selbstverständlich wirken kann und wir werden - ganz wie beim Sinus und Cosinus - uns eine Definition der Funktionen *Arkustangens* und *Arkuskotangens* erarbeiten. Das war es für heute. Ich danke Ihnen und bis bald!

Notes

Summary

6m 29s