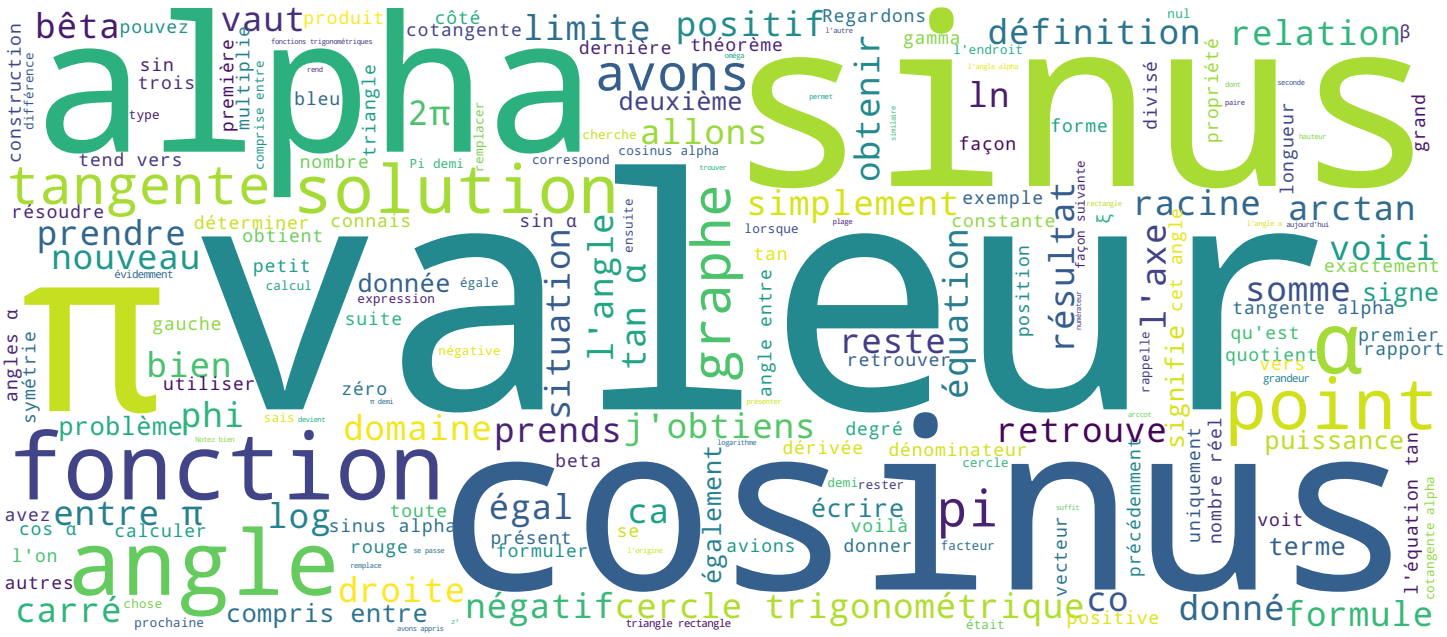
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les fonctions trigonométriques tangentes et cotangentes et leurs inverses

3.4 Equations trigonométriques simpes en tan et cot

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

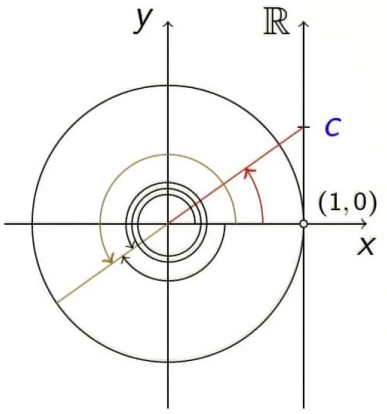
Video

EPFL

L'équation $\tan\alpha = c$

On peut donc formuler notre problème sous la forme suivante :

Donné :	$c \in \mathbb{R}$
Recherché :	toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}$ telles que $\tan\alpha = c$



Bonjour. La dernière fois, nous avions établi des relations dans un triangle rectangle, qui permettent de déterminer les valeurs de sinus alpha, cosinus alpha, tangente alpha et cotangente alpha à l'aide d'un quotient de longueur, à l'aide d'un rapport. Aujourd'hui, nous allons considérer le problème suivant : supposons que je connaisse la valeur de tangente alpha, ou plutôt cotangente alpha, est-ce que je peux retrouver la valeur, ou plutôt les valeurs, de alpha qui correspondent à cette valeur donnée de tangente alpha, respectivement de cotangente alpha? Commençons par considérer l'équation tan α = c. Alors, ici, *c* est un nombre réel, une valeur donnée, et *α* est un nombre réel qui est la valeur recherchée. Donc, je me donne *c* et je recherche toutes les valeurs de *a* qui remplissent l'équation tan α = c. Notez bien que *α* doit être dans le domaine de définition de tangente pour pouvoir satisfaire à l'équation tan α = c. Si je regarde cette situation sur le cercle trigonométrique, le voilà. Là j'ai le cercle trigonométrique et j'ai l'axe tangent sur lequel on reporte les valeurs tangentes. Alors, je peux tout de suite conclure que notre problème a toujours DES solutions, pas seulement une.

Notes

Summary

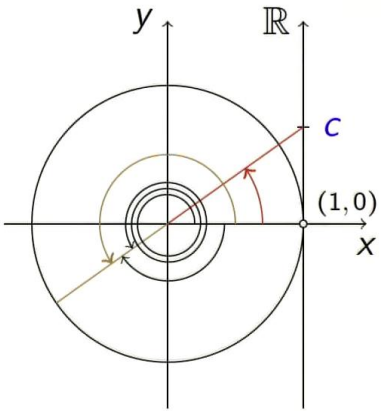
0m 04s

Résolution de l'équation $\tan\alpha = c$

Le problème

Donné :	$c \in \mathbb{R}$
Recherché :	toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}$ telles que $\tan\alpha = c$

admet toujours des solutions,
quelle que soit la donnée $c \in \mathbb{R}$.



Je rapporte la valeur de *c* sur cet axe. *C* est positif, et je construis cette droite qui relie ce point *c* avec l'origine du cercle trigonométrique, et je retrouve tout de suite quelques angles, ou même plusieurs. J'en ai dessiné ici quelques uns, en rouge en premier, en brun et 2 autres en noir. On s'aperçoit qu'il y a toujours une infinité de solutions. Cette situation, je peux du reste la confirmer si je regarde le graphe de la fonction tangente.

Notes

Summary

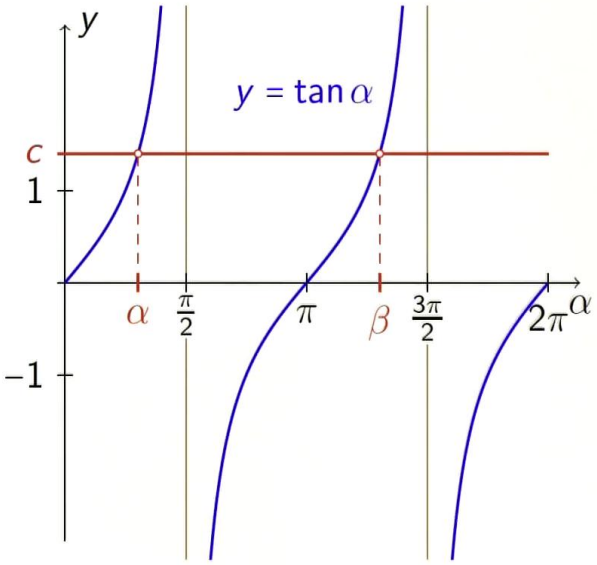
1m 36s

Résolution de l'équation $\tan\alpha = c$

Le problème

Donné :	$c \in \mathbb{R}$
Recherché :	toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}$ telles que $\tan\alpha = c$

admet toujours des solutions,
quelle que soit la donnée $c \in \mathbb{R}$.



Voici un extrait de ce graphe : ici l'axe horizontal des α, ici l'axe vertical en y. J'ai repris la valeur *c* correspondante. Je connais la valeur de tan α et de y, et je cherche un, des ou tous les points sur le graphe de ma fonction tangente qui passent par cette droite horizontale en rouge. Je vois tout de suite que j'ai là une 1re possibilité, et ici une deuxième. Si je construis le graphe davantage vers la gauche ou vers la droite, je trouve encore d'autres possibilités.

Notes

Summary

2m 09s

Résolution de l'équation $\tan\alpha = c$

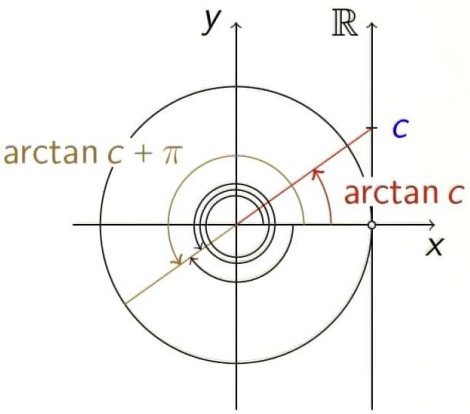
Toutes les solutions de l'équation

$$\tan\alpha = c, \quad (c \in \mathbb{R} \text{ donné}),$$

sont décrites par

$$\alpha = \arctan(c) + k\,\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

où $\arctan(c)$ est l'unique angle strictement compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont la tangente vaut c.



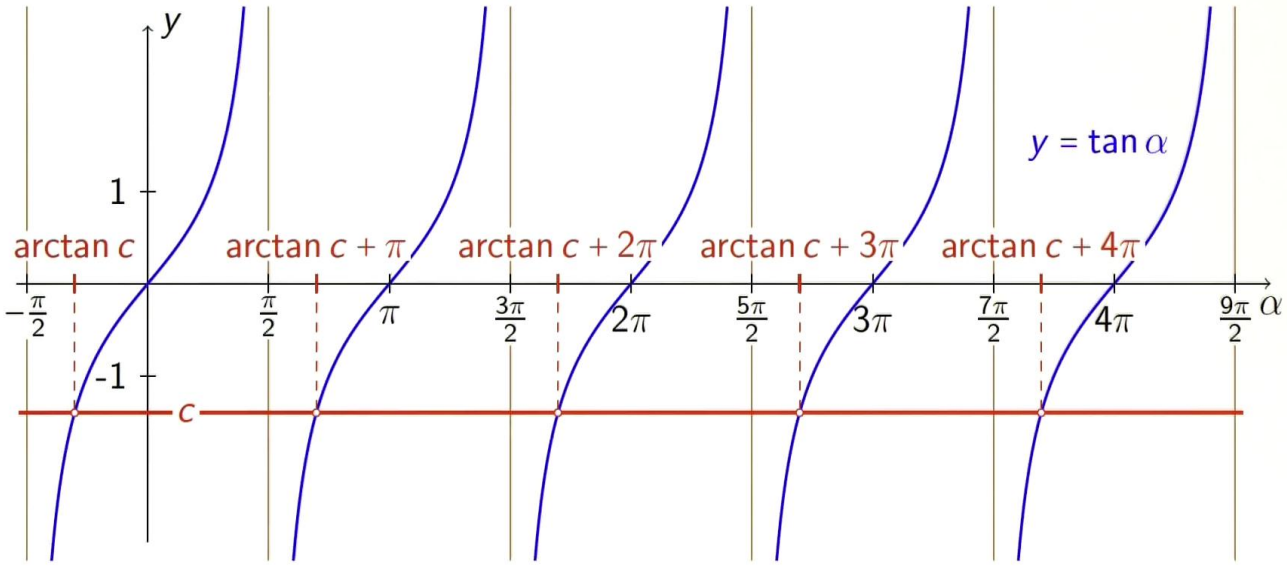
On peut donc formuler le résultat que voici : je peux donner toutes les solutions de l'équation tan *a* = *c*, où *c* est une valeur réelle donnée, et je peux écrire ces solutions sous la forme suivante : α = arc tan (c) + k π. Donc, une fois que j'ai une solution, les autres, je les obtiens simplement en additionnant un multiple, positif ou négatif, entier de π. Alors, qu'est-ce que c'est que arctan(c) ? Là, il y a une convention : on va dire que arctan (c) est une des solutions construites de la façon suivante : c'est la solution que j'obtiens dans cette construction et qui est située entre -π/2 et π/2. Alors sur cette plage, qui est située sur la droite du cercle trigonométrique, je retrouve toujours une seule solution de l'équation tan α = c que j'appelle arctan(c). Ici, nous l'avons dessiné en rouge.

Notes

Summary

2m 48s

Résolution de l'équation $\tan \alpha = c$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Regardons ce que cela donne sur le graphe de la fonction tan, l'axe des α, ici à l'horizontale, à la verticale, l'axe des y. Cette fois, j'ai pris une valeur de *c* négative. Donc je cherche à résoudre l'équation tan α = c avec un *c* négatif, donc sur l'axe vertical, j'inscris la valeur de *c*, je trace cette horizontale et je cherche à retrouver les points où le graphe de tan α coupe cette horizontale en rouge. Alors je commence sur la plage -π/2, π/2 qui correspond sur le cercle trigonométrique à la partie à droite. Alors sur cette plage, ici en bleu, je trouve une des solutions. Ici, je l'appelle arctan *c*. C'est une valeur de α, et les autres, je les trouve modulo π, que ce soit vers la droite ou vers la gauche.

Notes

Summary

3m 57s

Définition : fonction arctangente

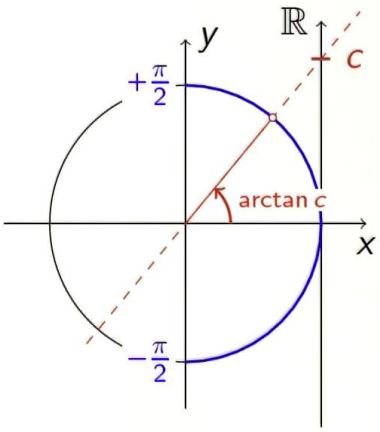
La fonction *arctangente* est la fonction

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad c \mapsto \arctan c$$

qui à toute valeur $c \in \mathbb{R}$ donnée,

fait correspondre l'unique angle $\alpha \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$

tel que $\tan \alpha = c$.



Donnons à présent une définition précise de ce que c'est arctan. C'est en fait une fonction abrégée par a-r-c-t-a-n, qui accepte une valeur réelle *c* quelconque, qui me rend une valeur strictement comprise entre -π/2 et π/2, et qui est définie de la façon suivante : la valeur rendue, pour ce *c* donné, est une solution tan α = *c*. C'est l'unique solution comprise entre -π/2 et π/2. Donc, ici en bleu, j'ai la plage et la construction qui, à partir de *c* détermine un angle, va me donner un angle qui est exactement dans cette plage -π/2 et π/2, et je l'appelle arctan *c*.

Notes

Summary

4m 57s

Remarques

Conséquence de la définition :

$$\tan(\arctan c) = c, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

et

$$\arctan(\tan \alpha) = \alpha, \qquad \forall\, \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Nous appelons un angle α un bon angle pour la *tangente* si $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Les bons angles pour la *tangente* sont donc exactement les angles donnés par la fonction *arctangente*.

La relation $\arctan(\tan \alpha) = \alpha$ est donc vraie si et seulement si α est un bon angle pour la *tangente*.

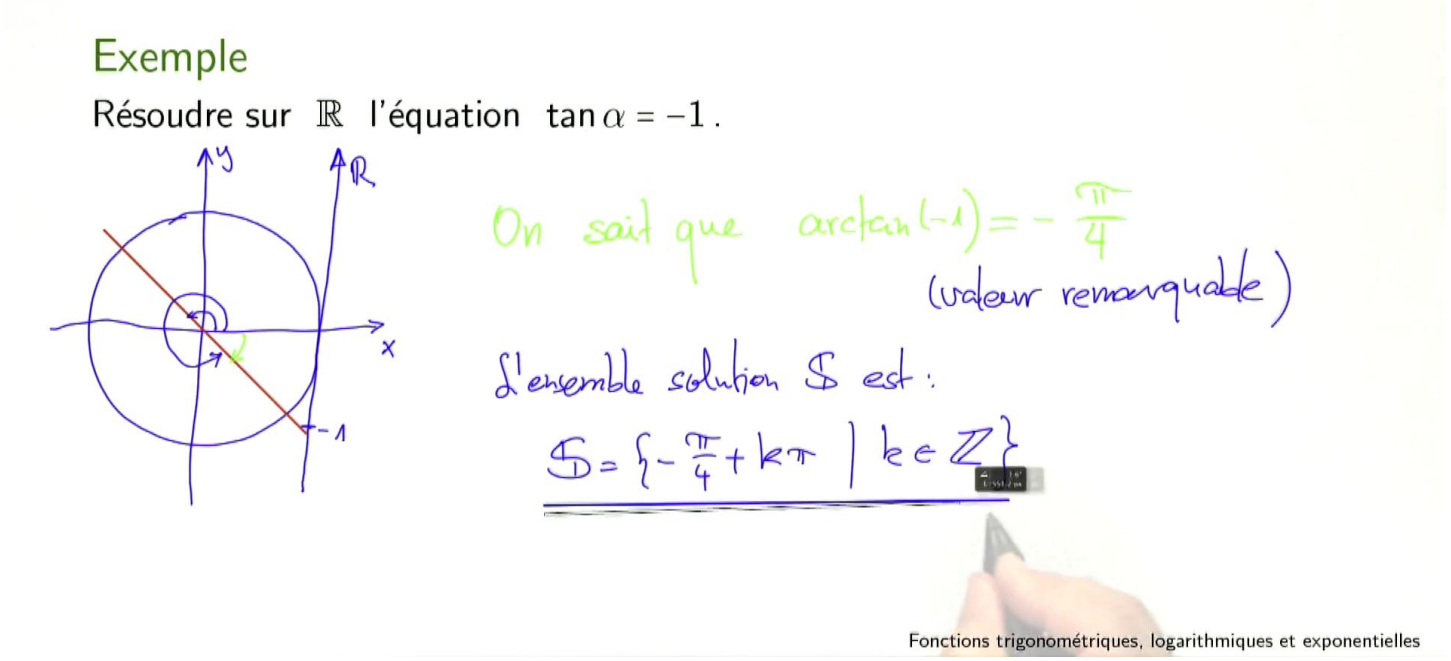
Alors, cette définition implique quelques relations. Voici la 1re : si je prends une valeur de *c*, je calcule d'abord arctan puis tan, c'est-à-dire tan(arctan c), je vais retrouver *c*. C'est la définition même de arctan *c*, puisque arctan *c* est l'angle a, tel que tan a = c, avec des contraintes supplémentaires sur α. Si j'intervertis ici l'ordre, si je calcule arctan (tan α), je n'obtiens pas toujours α. J'obtiens α à condition qu'il soit compris entre -π/2 et π/2. C'est simplement que arctan rend toujours un angle entre -π/2 et π/2. Nous allons appeler un angle α bon pour la fonction tan s'il est justement compris strictement entre -π/2 et π/2. C'est-à-dire les angles qui sont bons pour tan sont exactement les angles donnés par la fonction arctan. Et cette deuxième relation, arctan (tan α) = α, elle est vraie si et seulement si, α est un bon angle pour tan.

Notes

Summary

5m 48s

Exemple



Appliquons ces résultats à un premier exemple : résolvons l'équation tan α = -1. Nous la résolvons sur R, c'est-à-dire que nous déterminons tous les angles α réels qui satisfont à cette équation. Pour commencer, on va dessiner la situation sur le cercle trigonométrique. Le voici. Nous ajoutons l'axe tangente sur lequel nous prenons les valeurs de tan. La valeur de tan qui est donnée vaut -1. Alors je procède à la construction inverse que pour tan : je relie ce point avec l'origine du cercle. Je retrouve une solution entre -π/2 et π/2 qui est ici, donc, je peux écrire : qu'est-ce qu'on sait de arctan de -1 ? -1 est une valeur remarquable pour la fonction tan. On sait que c'est l'angle -π/4 qui a la propriété que tan (-π/4) = -1. Donc, -π/4 est compris entre -π/2 et π/2; donc, arctan va me retourner précisément cette valeur -π/4. Alors ça, c'est une valeur précisément remarquable. Une fois que j'ai *une* solution, je peux obtenir facilement les autres solutions, simplement en ajoutant un multiple entier de π. Donc, je peux écrire : l'ensemble solution S est donné sous la forme suivante : S regroupe toutes les valeurs de la forme -π/4 + k π avec k dans Z.

Notes

Summary

6m 55s

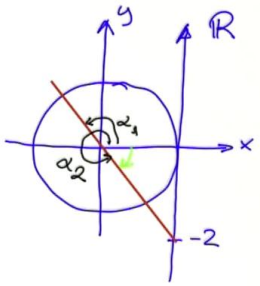
Autre exemple

Exemple

Résoudre sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'équation $\tan\alpha = -2$.

On sait que $\arctan(-2) \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$

Notre problème a deux solutions :



Modifions quelque peu le problème : remplaçons l'équation tan α = -1 par tan α = -2 cette fois-ci. Mais imposons une contrainte supplémentaire. Nous aimerions avoir uniquement les angles α compris entre 0 et 2π. On peut redessiner la situation sur le cercle trigonométrique comme je l'ai fait précédemment, mais on peut aussi, par calcul simple, résoudre ce problème. Commençons par regarder ce que je sais sur arctan de -2, puisque c'est *une* solution de tan a = -2. Alors cette solution me rend un angle qui est bon pour tan, c'est-à-dire qui est compris entre -π/2 et zéro. Pourquoi zéro ? Sur le cercle trigonométrique, on voit tout de suite que si tan est négatif, le bon angle doit être négatif lui aussi. Donc ici en vert, on a cet angle arctan -2 qui est justement compris entre -π/2 et 0. Donc arctan -2 ne va pas être une solution à notre problème, puisque nous cherchons des angles qui sont compris entre 0 et 2π. Cependant, je peux modifier cet angle rendu d'un multiple de π. Donc je vais obtenir une première solution ici, α1, ici une deuxième solution α2. Donc, le problème a deux solutions. Une première α1 : pour l'obtenir, j'ajoute à arctan (-2) π Cette solution est comprise entre π/2 et π.

Notes

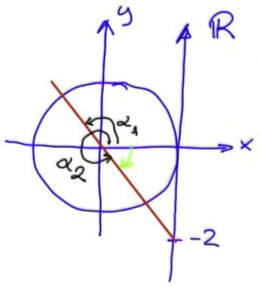
Summary

9m 15s

Autre exemple

Exemple

Résoudre sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'équation $\tan\alpha = -2$.



On sait que $\arctan(-2) \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$

Notre problème a deux solutions :

- $\alpha_1 = \arctan(-2) + \pi \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

et

- $\alpha_2 = \arctan(-2) + 2\pi \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$

Nous avons une deuxième solution, a 2, cette fois-ci je prends arctan (-2) et j'ajoute 2π. J'obtiens ainsi une solution comprise entre 3π/2 et 2π. Et voilà ce qui résout notre problème.

Notes

Summary

11m 26s

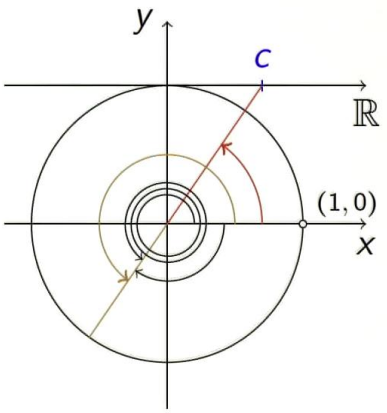
L'équation $\cot \alpha = c$

On considère l'équation

$$\cot \alpha = c,$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une valeur donnée

et $\alpha \in \mathbb{R}$ est la grandeur recherchée.



Changeons de problème et regardons cette fois-ci l'équation : cotan α = *c*. Donc cette fois-ci, *c* est de nouveau une valeur donnée et α est la valeur recherchée.

Notes

Summary

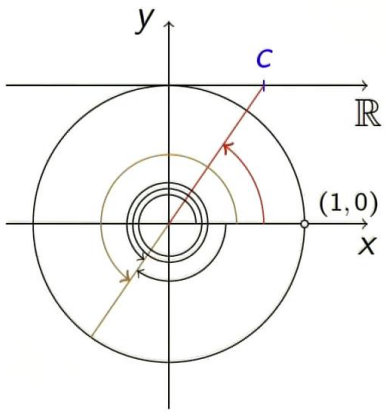
11m 44s

Résolution de l'équation $\cot \alpha = c$

Le problème

Donné :	$c \in \mathbb{R}$
Recherché :	toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}$ telles que $\cot \alpha = c$

admet toujours des solutions,
quelle que soit la donnée $c \in \mathbb{R}$.



De façon précise, nous allons rechercher toutes les valeurs de α, telles que cotan α = *c*, c'est-à-dire que α peut évidemment uniquement se situer sur le domaine de définition de la fonction cotan. Si on considère cette situation sur le cercle trigonométrique, le voici, avec l'axe des x et l'axe des y, nous avons ici l'axe tangent sur lequel on reporte cotan. Alors cotan est donné ici par la valeur c. La construction pour cotan est la suivante : il faut relier ce point avec l'origine du cercle trigonométrique, et là on retrouve les angles α dont la cotan vaut la valeur donnée c. Je peux donc dire qu'il y a toujours des solutions, une infinité de solutions.

Notes

Summary

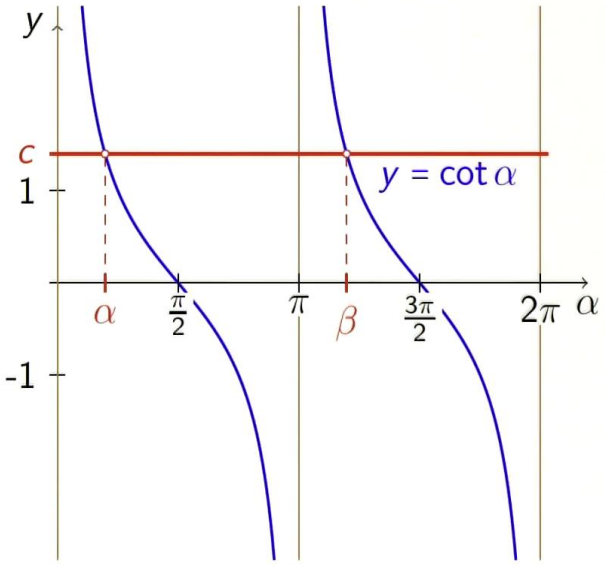
11m 57s

Résolution de l'équation $\cot \alpha = c$

Le problème

Donné :	$c \in \mathbb{R}$
Recherché :	toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}$ telles que $\cot \alpha = c$

admet toujours des solutions,
quelle que soit la donnée $c \in \mathbb{R}$.



Je retrouve ce même résultat sur le graphe de la fonction cotan. Voici ce graphe, ou un extrait de ce graphe : donc l'axe horizontal en α, Ici, l'axe y à la verticale, la valeur *c* positive comme précédemment donnée. Ici, je cherche donc où le graphe de la fonction cotangente, en bleu, prend la valeur *c* positive. Donc, je retrouve ici une valeur α, une deuxième valeur β ici et si je prolonge ce graphe sur la gauche et sur la droite, je retrouve un nombre infini de solutions.

Notes

Summary

12m 47s

Résolution de l'équation $\cot \alpha = c$

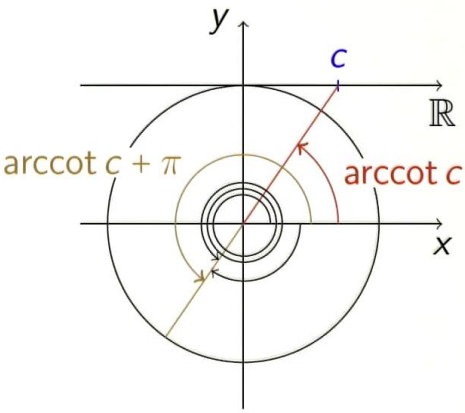
Toutes les solutions de l'équation

$$\cot \alpha = c\,, \quad (c \in \mathbb{R} \text{ donné}),$$

sont décrites par

$$\alpha = \operatorname{arccot}(c) + k\,\pi\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,,$$

où $\operatorname{arccot}(c)$ est l'unique angle strictement compris entre 0 et π dont la tangente vaut c.



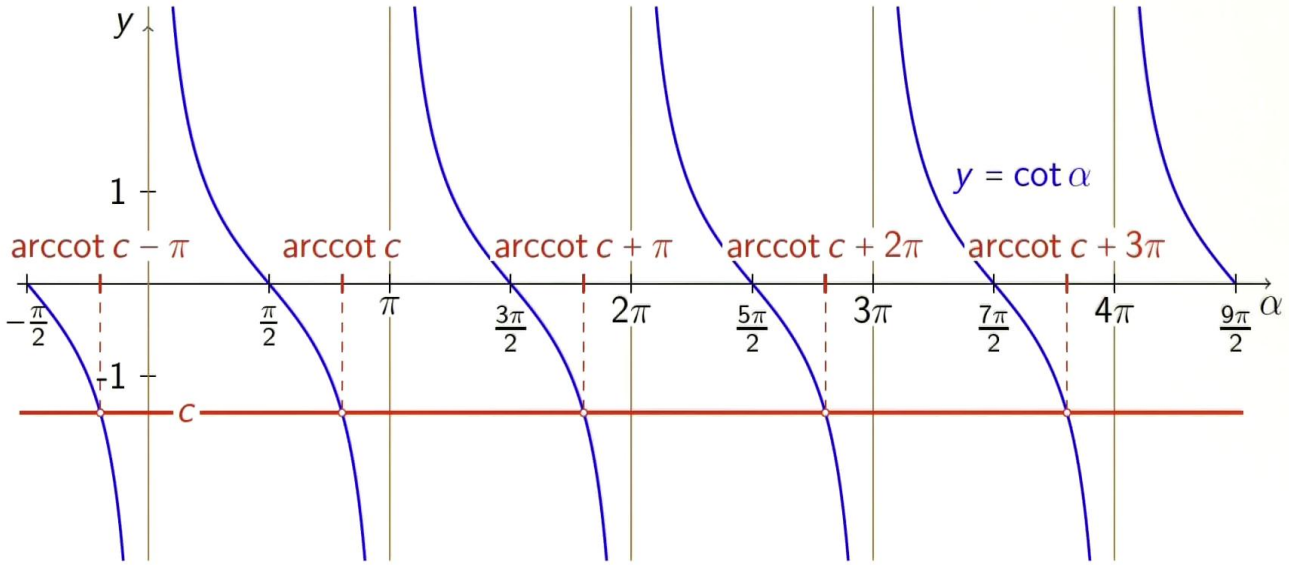
On peut donc formuler le résultat que voici : je peux obtenir toutes les solutions de l'équation cot α = *c* où *c* est une valeur réelle donnée. Et ces solutions s'écrivent toujours sous la forme suivante : α vaut une valeur que je dénote arccot (*c*) plus un multiple de π. Comme ça j'obtiens toutes les solutions. Alors arccot (*c*) est une valeur bien définie, spécifique, qui est définie aussi de la façon suivante : Donc arccot (*c*) est l'unique solution de cette équation cot α = *c* sur la partie comprise entre 0 et π. Donc, l'angle α doit être compris entre 0 et π. Ici, je vois en rouge que j'ai bien pris un angle entre 0 et π, et je l'ai appelé arccot (*c*). Et pour toute valeur de *c*, qu'elle soit positive ou négative, cette construction me permet de déterminer de façon unique un angle entre 0 et π dont la cot vaut *c*. Je l'appelle arccot (*c*), et les autres, je les obtiens en additionnant un multiple entier de π.

Notes

Summary

13m 20s

Résolution de l'équation $\cot \alpha = y$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Sur le graphe, on retrouve ce résultat : ici l'axe des α, l'axe des y, le graphe de la fonction cot, je repère immédiatement la plage de valeurs entre 0 et π, elle est ici. Ici, la valeur de c donnée : elle est négative. Et je vois que cette valeur est prise par la fonction cot en un point entre 0 et π, ce point je l'appelle arccot (*c*), et je peux obtenir les autres angles α pour laquelle la cot prend cette valeur *c* en additionnant successivement π ou en retranchant successivement π.

Notes

Summary

14m 24s

Définition : fonction arccotangente

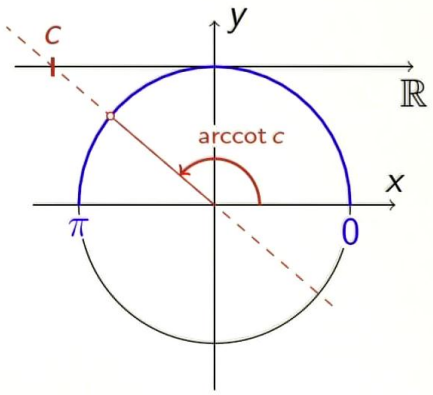
La fonction *arccotangente* est la fonction

$$\text{arccot} : \mathbb{R} \to]0, \pi[, \quad c \mapsto \text{arccot}\, c$$

qui à toute valeur $c \in \mathbb{R}$ donnée,

fait correspondre l'unique angle $\alpha \in]0, \pi[$

tel que $\cot \alpha = c$.



Alors soyons un peu plus précis, nous sommes en présence d'une fonction qui s'appelle arccotangente, qui s'abrège a-r-c-c-o-t, qui, à partir d'un nombre réel, rend un angle entre 0 et π. Donc, si je me donne cette valeur *c*, je détermine l'angle α entre 0 et π. Donc, voici la construction : ici *c* est négatif, je retrouve un seul angle entre 0 et π, sur cette plage bleue, un seul angle, et cet angle α est exactement la valeur retournée par la fonction arccot *c*.

Notes

Summary

15m 05s

Remarques

Conséquence de la définition :

$$\cot(\operatorname{arccot} c) = c, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

et

$$\operatorname{arccot}(\cot \alpha) = \alpha, \qquad \forall\, \alpha \in \,]0, \pi[\,.$$

Nous appelons un angle α un bon angle pour la *cotangente* si $\alpha \in \,]0, \pi[$.

Les bons angles pour la *cotangente* sont donc exactement les angles donnés par la fonction *arccotangente*.

La relation $\operatorname{arccot}(\cot \alpha) = \alpha$ est donc vraie si et seulement si α est un bon angle pour la *cotangente*.

Alors, comme précédemment, on peut faire quelques remarques : si je calcule cot (arccot *c*), je retrouve la valeur de *c*. Ça c'est vrai pour toutes les valeurs réelles de c. À nouveau, si on change l'ordre, si on regarde ce que donne arccot (cot α), on retrouve α à condition que l'angle soit compris entre 0 et π. Un tel angle est appelé bon pour cot. Donc, les angles bons pour cotan sont exactement ceux rendus par la fonction arcot, et cette relation est vraie si et seulement si α est un bon angle pour cotangente.

Notes

Summary

15m 40s

L'équation $A \sin\alpha = B \cos\alpha$

On considère l'équation

$$A \sin\alpha = B \cos\alpha\,,$$

où $A, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sont des constantes données et où $\alpha \in \mathbb{R}$ est la grandeur recherchée.

On peut donc formuler notre problème sous la forme suivante :

Donné :	$A, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Recherché :	toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $A \sin\alpha = B \cos\alpha$.

Regardons encore un troisième type d'équation : A sin α = B cos α. Et nous allons nous intéresser uniquement au cas où ces coefficients A et B sont des nombres réels, mais qui ne sont pas 0. Et nous allons rechercher toutes les valeurs de α qui satisfont cette relation telles que A sin α = B cos a, si A et B sont des constantes non nulles données.

Notes

Summary

16m 26s

Résolution de l'équation $A \sin\alpha = B \cos\alpha$

On écrit l'équation sous la forme

$$\sin\alpha = \frac{B}{A}\cos\alpha\,, \qquad (A, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\,.$$

Et on observe que

- si $\cos\alpha = 0$, $\left(\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right)$ alors l'équation n'est pas vérifiée, car le membre de droite est nul et le membre de gauche vaut ± 1,
- si $\cos\alpha \neq 0$, alors l'équation est équivalente à

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{B}{A}\,.$$

Alors, première chose que l'on peut faire : écrire cette équation sous la forme que voici, diviser par la constante A qui est non nulle et obtenir une relation sin α = un multiple de cos α, c'est-à-dire B/A. Une première remarque, la voici : est-ce que cos α pourrait être nul ? S'il est nul, cela signifie que α vaut π/2 modulo π, cela signifie que le sinus vaut plus ou moins 1. Alors, je vois tout de suite que ça c'est exclu par ma relation. En effet, si le cos est nul, à droite j'obtiens 0, et à gauche j'obtiens plus ou moins 1. Donc, il suffit de chercher des angles α où le cos est non nul. Et dans ce cas là, je peux diviser cette équation par cette valeur non nulle cos α pour retrouver sin α sur cos α = une constante donnée B/A.

Notes

Summary

17m 02s

Résolution de l'équation $A \sin\alpha = B \cos\alpha$

Le problème

Donné :	$A, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Recherché :	toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $A \sin\alpha = B \cos\alpha$

est donc équivalent au problème suivant :

Donné :	$A, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Recherché :	toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $\tan\alpha = \frac{B}{A}$.

Alors, on se retrouve exactement devant une équation du type : tan α = une constante. Donc, je peux dire que l'équation de départ est équivalente au problème suivant : je cherche toutes les valeurs de α telles que tan α = B/A.

Notes

Summary

18m 07s

Résolution de l'équation $A \sin\alpha = B \cos\alpha$

Proposition

L'ensemble de toutes les solutions du problème

Donné :	$A, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Recherché :	*toutes les valeurs de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *telles que* $A \sin\alpha = B \cos\alpha$.

est donné par

$$\mathbb{S} = \left\{\alpha = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) + k\,\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Je peux donc formuler la proposition que voici : l'ensemble de toutes les solutions de notre problème (A sin α = B cos α avec A et B non nuls) sont données par α est arctan (B/A) + un multiple entier de π.

Notes

Summary

18m 29s

Equations trigonométriques simples

Ce que nous avons appris :

- la résolution des équations trigonométriques simples en tangente et en cotangente ;
- la définition des fonctions *arctangente* et *arccotangente* ;
- la résolution de l'équation $A \sin\alpha = B \cos\alpha$.

Prochaine étape :

- le graphe des fonctions *arctangente* et *arccotangente* ;
- les valeurs remarquables de ces deux fonctions.

Alors, qu'est-ce que nous avons appris aujourd'hui ? Nous avons appris à résoudre des équations trigonométriques simples en tan et cot, des équations du type tan α ou cotan α = une constante donnée, et l'on cherche à trouver tous les angles α correspondants. Cela nous a conduit à définir une fonction arctan et arccot, des fonctions qui nous donnent une des solutions à notre problème, et nous avons appliqué nos connaissances à la résolution de l'équation A sin α = B cos α, avec A et B différents de zéro. Alors, qu'est-ce qui nous attend la prochaine fois ? Je vais vous présenter les graphes des fonctions arctan et arccot, et je vais vous présenter les valeurs remarquables pour ces deux fonctions. Merci et à la prochaine fois.

Notes

Summary

18m 48s