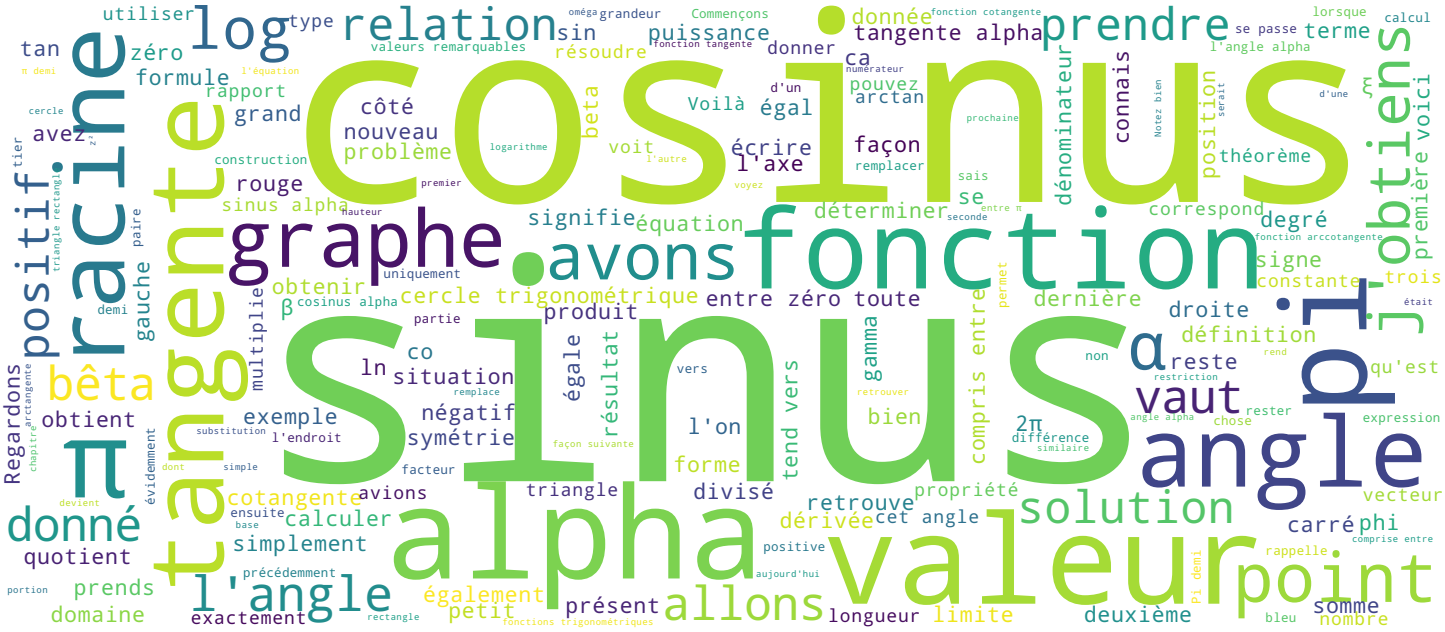
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les fonctions trigonométriques tangentes et cotangentes et leurs inverses

3.5 Les fonctions arctan et arccot

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

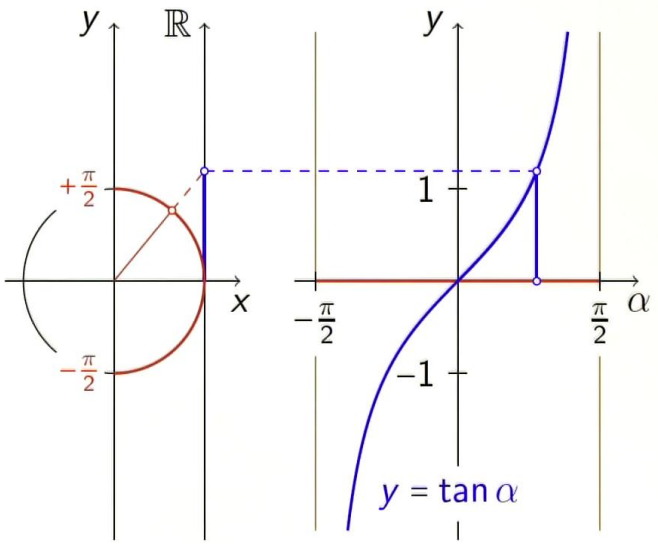
Video

EPFL

Rappel : arctangente

Nous avons défini, pour $y \in \mathbb{R}$ donné, la valeur arctan y comme l'angle α unique ayant les propriétés suivantes :

- $\tan \alpha = y$ et
- l'angle α est bon pour la *tangente*, c'est-à-dire $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Bonjour. La dernière fois, nous avons introduit les fonctions arctangente et arccotangente, aujourd'hui nous allons regarder d'un peu plus près ces deux fonctions arctangente et arccotangente. Commençons par la fonction arctangente et commençons par rappeler la définition de arctangente. Nous avons procédé comme suit : nous avons dit, pour un $y \in R$, la dernière fois nous avons appelé cette constante c, ici maintenant dans ce contexte nous préférons l'appeler y. Alors pour un $y \in R$ donné, arctangente y est l'angle unique alpha qui a les deux propriétés que voici : alors premièrement l'angle retourné par arctangente, cet angle retourné alpha satisfait l'équation tangente alpha égale à y ($\tan \alpha = y$). Donc, je prend y ici sur le cercle trigonométrique, sur cette axe tangent et je fais la construction pour tangente sur la plage, moins pi/2 pi/2. Ca c'est la deuxième contrainte que je mets sur cet angle alpha retourné. Donc l'angle retourné correspond à la position ici en rouge. On peut tout à fait regarder ce qui se passe sur le graphe de la fonction tangente, alors, vu que l'angle qui est retourné par arctangente est compris entre moins pi/2 et pi/2 c'est-à-dire que c'est un angle qui est bon pour tangente.

Notes

Summary

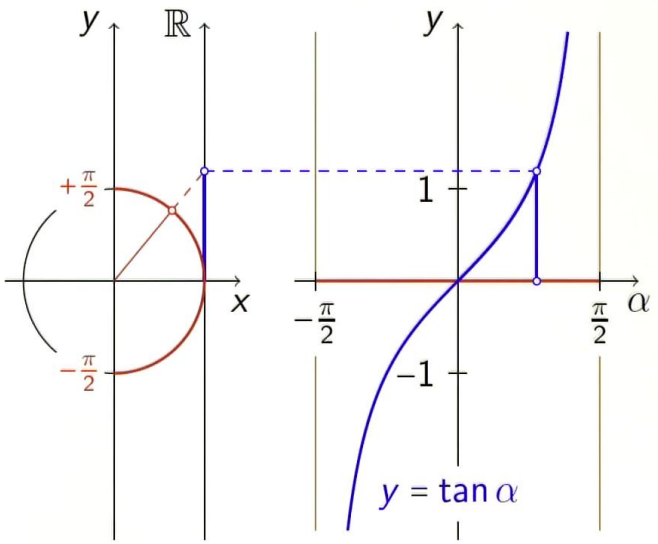
0m 03s

Fonction tangente restreinte

La fonction qui à tout $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ associe $y = \tan\alpha$ est appelée

la restriction de la fonction *tangente* à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On la note $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$.



Je regarde la portion du graphe uniquement entre moins pi/2 et pi/2 c'est l'axe des alpha entre moins pi/2 et pi l'axe vertical des *y* ici, la portion de graphe de tangente alpha comprise entre moins pi/2 et pi/2. Alors pour cette valeur *y* donnée qui est positive ici de nouveau, je retrouve une position ici que j'appelle arctangente de *y*. Alors, il est judicieux de considérer uniquement cette partie du graphe de tangente alpha si l'on veut parler de arctangente. Et on va dire que, on a à faire à la restriction de tangente, on va la noter de la façon suivante : tangente, la tige verticale, intervalle entre moins pi/2 et pi/2, strictement entre moins pi/2 et pi/2 et on va dire que ça c'est la fonction restriction de la fonction tangente, c'est-à-dire que nous admettons dans cette fonction, non pas tout les angles de alpha, qui sont dans le domaine de définition de la fonction tangente mais uniquement les angles entre moins pi/2 et pi/2.

Notes

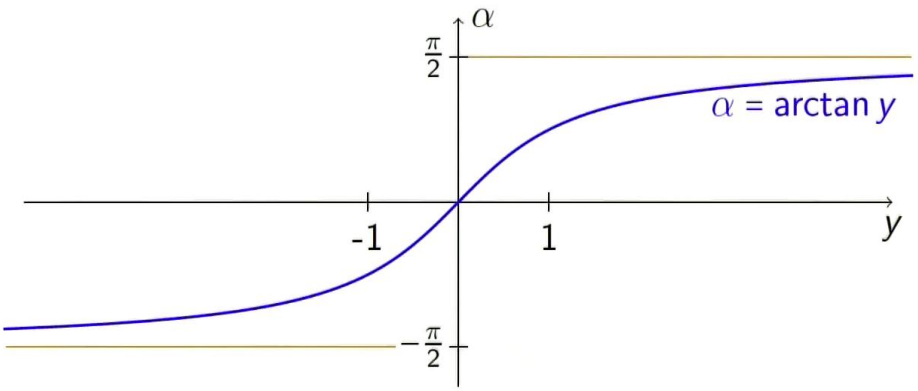
Summary

1m 21s

Graphe de la fonction arctan

La fonction arctan est la réciproque de la fonction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$.

On déduit son graphe de celui de $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ par symétrie d'axe $y = \alpha$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors on peut dire à présent que la fonction arctangente est précisément la fonction réciproque de cette restriction. Donc, je peux obtenir le graphe de cette fonction arctangente simplement par une symétrie d'axe *y* égale à alpha ($y = \alpha$) ce que j'ai fais ici, donc ce graphe qui était auparavant de la forme que voici, devient maintenant une courbe qui est présentée ici en bleu.

Notes

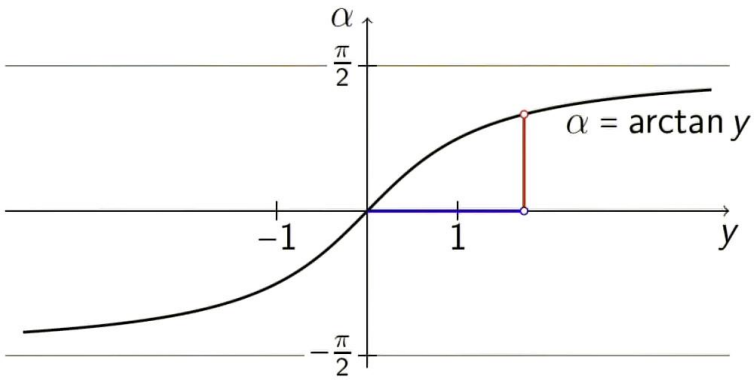
Summary

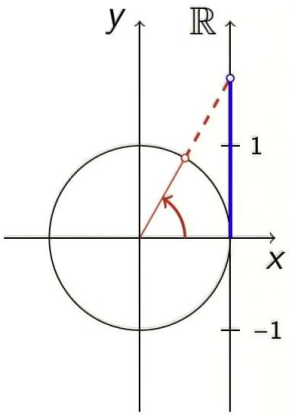
2m 21s

Valeurs remarquables de la fonction arctangente

Les valeurs remarquables de la fonction arctangente découlent des valeurs connues de la tangente.

y	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan y$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$





Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors on peut donner quelques valeurs remarquables pour cette fonction arctangente, donc ici son graphe. Ici J'ai le cercle trigonométrique, si je regarde par exemple : moins racine de 3 (- √3) voilà ici la valeur moins racine de 3 je vois que la solution est comprise entre moins pi/2 et 0, comment est-ce que je peux la retrouver ? Je sais, je connais la valeur de tangente pi/3 cela est racine de 3 donc, tangente de pi/3 je connais, tangente est une fonction impaire donc tangente de moins pi/3 donne moins racine de 3 et j'ai à présent une paire, qui permet de dire que pour moins racine de 3, arctangente me rend moins pi/3. Alors le raisonnement que je viens de faire, vous pouvez le faire avec toutes les valeurs remarquables de tangente, alors on obtient pour moins 1 que c'est l'angle moins pi/4 simplement parce que tangente de moins pi/4 donne moins un. On obtient une valeur pour moins racine de 3 tiers qui est pi/6, on obtient une valeur de zéro pour zéro, pour racine de 3 tiers on obtient pi/6 etc... je vous laisse découvrir ces valeurs. Notez bien que ces valeurs représentent une symétrie qui correspond tout à fait à la symétrie du graphe arctangente *y*.

Notes

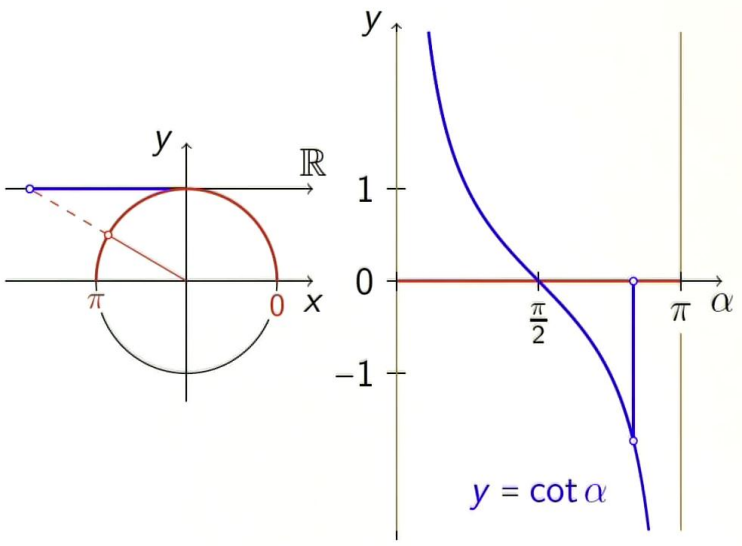
Summary

2m 48s

Rappel : arccotangente

Nous avons défini, pour $y \in \mathbb{R}$ donné, la valeur arccot y comme l'angle α unique ayant les propriétés suivantes :

- $\cot \alpha = y$ et
- l'angle α est bon pour la *cotangente*, c'est-à-dire $\alpha \in]0, \pi[$.



Commençons par quelques rappels sur la fonction arccotangente. Alors nous avons dit que pour une valeur *y* donnée c'était *c* la dernière fois, on préfère de nouveau prendre *y* dans le contexte que voici, donc pour une valeur *y* donnée, arccotangente *y* était l'unique angle alpha qui remplissait deux conditions : les voici ici. La première condition c'est que cotangente de alpha est bien *y* et que alpha est compris entre zéro et pi. Alpha est un angle qui est bon pour cotangente, donc sur le cercle trigonométrique, l'angle alpha est compris entre zéro et pi, ici j'ai l'axe tangent pour cotangente. Alors *y* ici, j'ai choisi un *y* négatif et donné et la construction ici permet de retrouver l'angle unique qui est ici dans cet angle, l'angle unique qui correspond à tangente alpha égale à *y* et l'angle est compris entre zéro et pi. On peut tout à fait regarder la situation sur le graphe de la fonction cotangente, voici le graphe. Evidemment je prends uniquement la portion de graphe qui est compris entre zéro et pi puisque l'angle rendu va être entre zéro et pi et cela signifie que la valeur négative ici, *y* elle est donnée et je recherche ici, l'angle où cette valeur *y* négative est prise et la valeur ici je l'appelle cotangente de *y*.

Notes

Summary

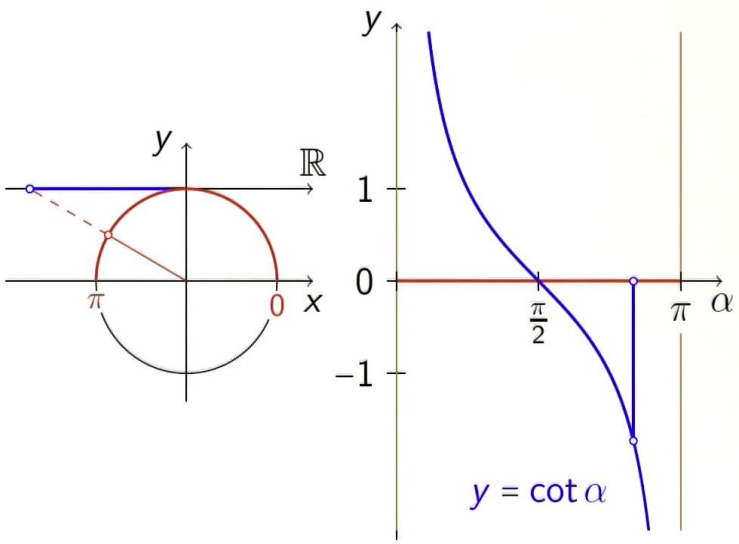
4m 05s

Fonction cotangente restreinte

La fonction qui à tout $\alpha \in]0, \pi[$ associe $y = \cot \alpha$ est appelée

la restriction de la fonction *cotangente* à l'intervalle $]0, \pi[$.

On la note $\cot|_{]0,\pi[}$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

On peut de nouveau procéder comme pour tangente, on peut dire ok, nous allons uniquement prendre cette partie du graphe de la fonction cotangente, c'est-à-dire la partie comprise entre zéro et pi. Alors nous disons que on a à faire à une restriction de la fonction cotangente, à l'intervalle zéro pi, nous notons cinq moins cotangente, la tige verticale et l'intervalle de restriction, et si on le fait, alors la fonction arccotangente est exactement la fonction réciproque de tangente puisque simplement sur ce graphe, je pars depuis une valeur de *y* pour retourner à une valeur de alpha.

Notes

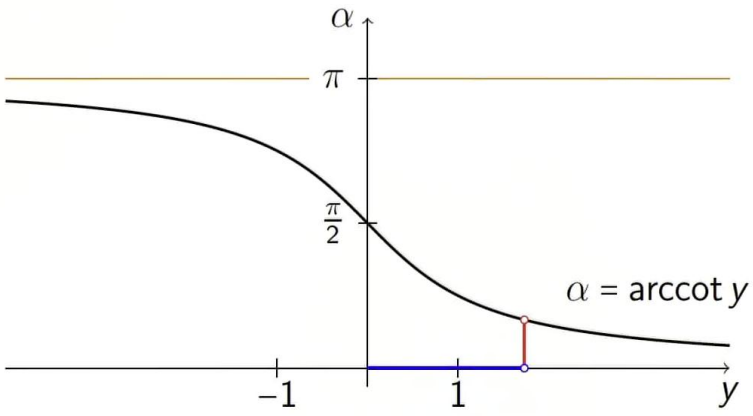
Summary

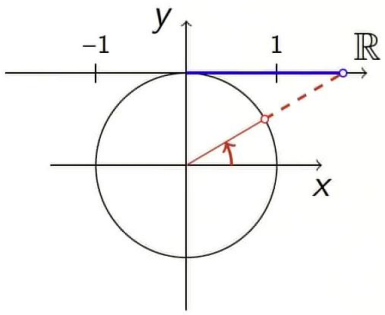
5m 29s

Valeurs remarquables de la fonction arccotangente

Les valeurs remarquables de la fonction arccotangente découlent des valeurs connues de la cotangente.

y	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arccot} y$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$





Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Donc, nous retenons la fonction arccotangente est la réciproque de la fonction cotangente, restreinte à l'intervalle zéro pi et j'obtient le graphe de ma fonction arccotangente simplement par une symétrie d'axe *y* égale alpha. Alors si vous le faites, vous obtenez le graphe que vous voyez ici. Alors tout comme pour tangente, ici pour cotangente on peut utiliser les valeurs remarquables de la fonction cotangente et alors faire une liste des valeur remarquables pour la fonction arccotangente. On retrouve les angles remarquables connus : si on commence par exemple avec moins racine de 3 on sait que cotangente de cinq pi/6, ici il faut peut être quand même regarder le cercle trigonométrique, l'axe ici, j'ai moins racine de 3 qui est négative et si je fais cette construction qui me rend un angle entre zéro et pi, on voit que l'angle cinq pi/6 est l'angle qu'il faut prendre comme étant l'angle qui a une cotangente de moins racine de 3. Donc, il ne faut pas prendre moins pi/6, qui serait une autre possibilité puisqu'il faut être sur cette plage entre zéro et pi. Alors, les autres valeurs on les retrouve ici : donc pour moins 1, pour moins racine de 3 tiers, pour zéro, pour racine de 3 tiers, pour un et pour racine de trois.

Notes

Summary

6m 06s

Le graphe des fonctions arctangente et arccotangente

Ce que nous avons appris :

- le graphe des fonctions *arctangente* et *arccotangente* ;
- les valeurs remarquables de ces deux fonctions.

Prochaine étape :

- quelques exemples.

Résumons: Qu'avons-nous appris aujourd'hui ? Alors, nous avons fait connaissance avec les graphes des fonctions arctangente et arccotangente et nous avons établi une liste des valeurs remarquables pour ces deux fonctions. Nous avons établi cette liste sur la base des valeurs remarquables des fonctions tangente et cotangente. À la prochaine étape, donc à la prochaine fois, je vais vous présenter quelques exemples qui utilisent ce que nous avons appris jusqu'à présent dans ce chapitre sur les fonctions tangente et cotangente. À la prochaine.

Notes

Summary

7m 30s