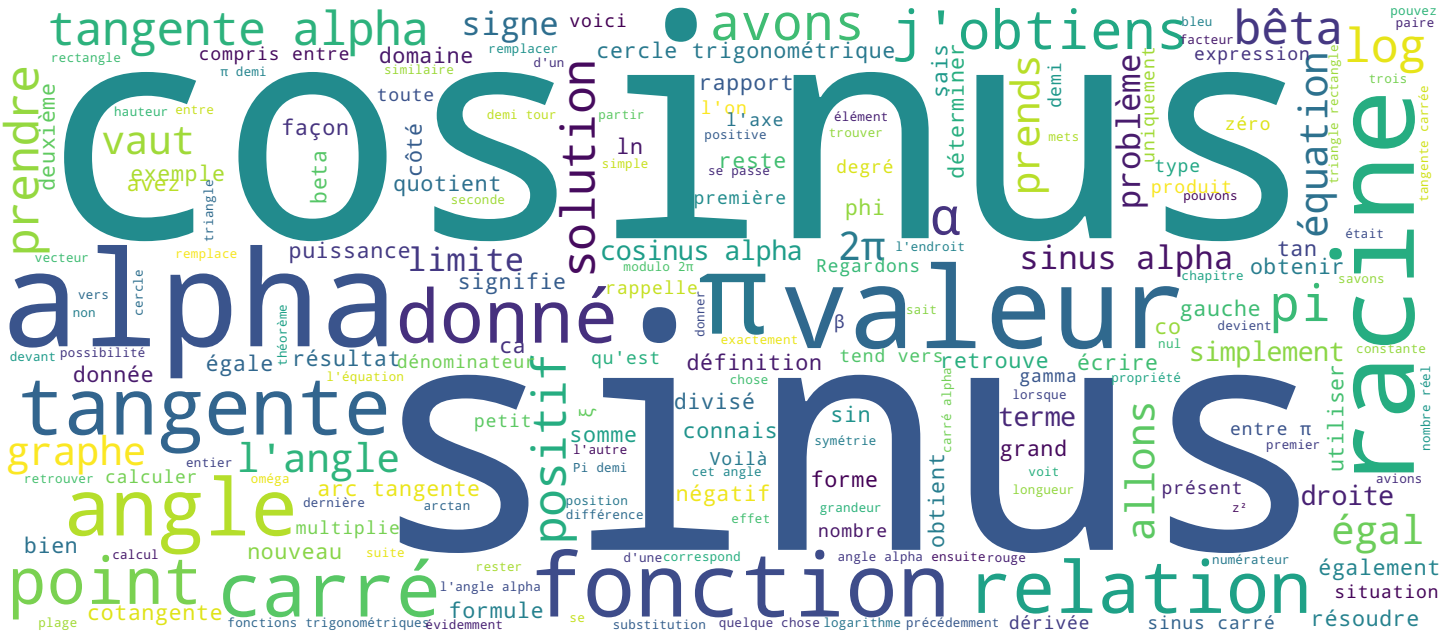
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les fonctions trigonométriques tangentes et cotangentes et leurs inverses

3.6 Quelques exemples

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

Video

EPFL

Exemple 1

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$\tan\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

On sait que $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$ (valeur remarquable !)

L'ensemble solution S est donc

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Bonjour. Pour clore ce chapitre sur les fonctions trigonométriques tangentes et cotangentes et leurs inverses, Nous allons présenter aujourd'hui quelques exemples qui mettent en oeuvre ces fonctions tangentes, cotangentes, arc-tangentes et arc-cotangentes. Commençons par un premier exemple où nous résolvons sur R l'équation tangente alpha égale moins racine de trois, tiers. Moins racine de trois, tiers est une valeur remarquable de tangente alpha, ça veut dire que nous pouvons immédiatement donner une solution de cette équation. Une solution est donnée par arc-tangente moins racine de trois, tiers. Et ceci est une valeur remarquable et je peux donc dire que arc tangente de moins racine de trois, tiers est égal à -π/6. Donc j'ai une solution : -π/6 de mon équation : alpha égale -π/6 est une solution. Les autres solutions, je les obtiens simplement en additionnant un multiple entier de pi à cette solution -π/6. Je peux donc écrire que l'ensemble de solutions S est donné par -π/6 plus k fois πoù k est un élément de Z Et voilà ce problème qui est résolu.

Notes

Summary

0m 03s

Exemple 2

Exemple

Simplifier l'expression

$$\sin(\underbrace{\arctan y}_{=:\alpha}), \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

On sait $\cdot\ \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\cdot\ \tan\alpha = y$

On cherche: $\sin\alpha$

Considérons un deuxième exemple : Nous aimerions simplifier l'expression sinus arc tangente y où y est un nombre réel. Commençons par remarquer que cette expression est définie pour toutes les valeurs de y. En effet, sinus accepte n'importe quel nombre réel et arc tangente y va nous rendre un nombre réel pour toute valeur y réelle donnée En présence de tels problèmes, on peut utiliser une stratégie qui consiste à rechercher l'angle. Ici, pour moi, l'angle est la grandeur dont je veux calculer par exemple un sinus, un cosinus tangente ou cotangente. Ici, dans cle cas présent, j'aimerais calculer le sinus de quelque chose. Donc ce quelque chose pourrait être un angle et c'est pour cela que je vais dire que cette expression là : arc tangente y... Je vais simplement dire que ça, c'est un angle alpha et on sait quelque chose de alpha, on sait que alpha est un bon angle pour tangente. Donc alpha est contenu dans l'intervalle qui va de -π/2 à π/2 et je sais encore une deuxième chose : je sais que si je calcule tangente alpha, j'obtiens y. Mon problème : moi je cherche à déterminer le sinus de alpha. Je connais malheureusement uniquement tangente de alpha et non pas le sinus de alpha que j'aimerais rechercher.

Notes

Summary

1m 46s

Exemple 2

Exemple

Simplifier l'expression

$$\sin(\underbrace{\arctan y}_{=:\alpha}), \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

On sait $\cdot\ \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\cdot\ \tan\alpha = y$

On cherche : $\sin\alpha$

Mais on a : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha \neq \pm 1$

Alors je cherche un pont qui relie mon problème qui relie la valeur recherchée sinus alpha à la valeur donnée tangente alpha Je vais utiliser le fait que tangente alpha est donné par sinus de alpha divisé par cosinus alpha. Il me faut connaître, outre tangente alpha cosinus alpha. Mais je ne connais pas cosinus alpha. Cependant, rappelons-nous que nous avons une relation entre sinus et cosinus. En effet, nous savons que si on prend le sinus au carré de alpha et qu'on y ajoute le cosinus du carré de alpha on obtient toujours 1. En outre, nous savons dans cette relation Vous voyez, alpha est compris entre - π/2 et π/2 Cela signifie que le cosinus de alpha doit être positif et pour le sinus je sais que le sinus de alpha ne peut pas être égal à plus ou moins 1. Nous verrons que cela est une information assez utile. Une fois que j'ai cela, je peux résoudre cette relation par rapport à cosinus alpha Donc, je peux écrire le cosinus de alpha, en fait le cosinus au carré serait donné par 1 moins sinus carré de alpha pour avoir uniquement cosinus je prends la racine et il y a un signe plus ici devant parce que le cosinus, je sais qu'il est positif.

Notes

Summary

3m 25s

Exemple 2

Exemple

Simplifier l'expression

$$\sin(\underbrace{\arctan y}_{=:\alpha}), \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

On sait $\cdot\ \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\cdot\ \tan\alpha = y$

On cherche : $\sin\alpha$

Mais on a : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha \neq \pm 1$

si bien que $\cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ et $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = y$

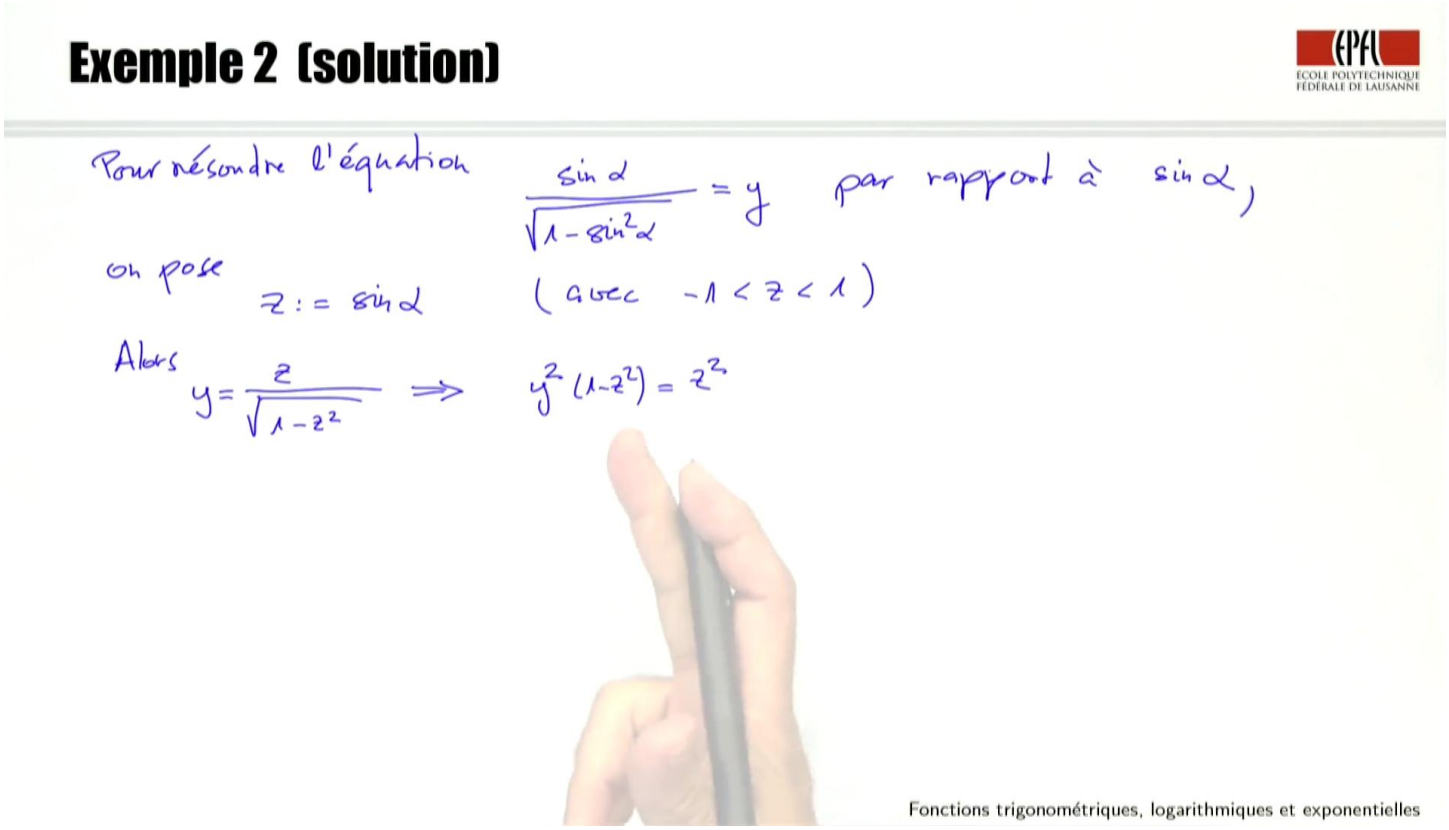
Et je peux à présent dire que tangente alpha, c'est sinus alpha sur cosinus alpha, donc je peux dire que c'est le sinus de alpha sur le cosinus que j'ai pris comme 1 moins sinus carré alpha Voilà, ça c'est sinus alpha divisé par cosinus alpha et je sais que ça c'est y. y est donné et sinus alpha est la grandeur que je recherche. Donc pour résoudre cette équation, sinus alpha divisé par la racine de 1 moins sinus carré de alpha égal à y je vais utiliser une substitution.

Notes

Summary

5m 07s

Exemple 2 (solution)



Pour résoudre cette équation, je pose z égale sinus alpha et je sais que dans ce cas-là, z est compris entre -1 et 1 Les valeurs plus ou -1 sont exclues puisque nous avons dit que le sinus de alpha ne peut pas prendre les valeurs plus ou moins 1. Notre problème prend la forme suivante : j'ai y qui est égal... Alors sinus alpha, je le remplace par z divisé par la racine et là j'ai 1 moins z carré y est donné et je recherche z. On peut élever une relation terme à terme au carré mais il faut être prudent si on procède de la sorte, on n'a plus une équivalence. Faisons-le, regardons ce que cela donne. Donc, j'obtiens le y carré sur la gauche la racine au carré, je vais la placer également sur la gauche donc j'aurai ici un 1 moins z carré et sur la droite il reste z carré. On ne peut pas renverser cette implication depuis la droite vers la gauche simplement parce que si ici vous remplacez cette équation par y égale -z divisé par cette même racine, si vous élevez les deux membres au carré vous retombez ici sur cette même équation. Donc on ne peut pas revenir en arrière. Procédons néanmoins. Ici cette relation, on peut la résoudre par rapport à z carré.

Notes

Summary

6m 01s

Exemple 2 (solution)

Pour résoudre l'équation $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = y$ par rapport à $\sin\alpha$,

on pose $z := \sin\alpha$ (avec $-1 < z < 1$)

Alors $y = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow y^2(1-z^2) = z^2 \Rightarrow z^2 = \frac{y^2}{1+y^2} \Rightarrow z = \pm\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$

y et z sont de même signe

Pour le faire on passe simplement z carré sur la droite et on résout par rapport à z carré pour trouver y carré divisé par 1 plus y carré. Ici j'ai un 1 plus y carré qui est positif ça ne pose pas de problème et j'ai ici un z carré y carré en fait cela signifie que z doit être de la forme y divisé par la racine de 1 plus y carré Je peux tirer cette racine ça ne pose pas de problème. Je prends la racine d'un nombre qui est plus grand que 1 mais si je vais ici depuis la gauche vers la droite, je dois munir ceci d'un signe plus ou moins. En effet, les deux équations z égale plus y sur la racine et z égale -y sur la racine proviennent de cette relation. On sait très bien qu'une équation du type z carré égale une constante a deux solutions plus ou moins la racine. Mais ici nous pouvons quand même faire une remarque : on voit tout de suite ici en regardant cette relation que y est sinus alpha, donc y et z ici sont de même signe. S'ils sont de même signe, cela signifie qu'une des deux possibilités ici, je vais devoir l'exclure si j'avais un moins, z et y seraient de signes différents parce que la racine est toujours positive.

Notes

Summary

7m 30s

Exemple 2 (solution)

Pour résoudre l'équation $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = y$ par rapport à $\sin\alpha$,

on pose $z := \sin\alpha$ (avec $-1 < z < 1$)

Alors $y = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow y^2(1-z^2) = z^2 \Rightarrow z^2 = \frac{y^2}{1+y^2} \Rightarrow z = \pm\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$

y et z sont de même signe

Donc $\sin\alpha = z = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$

et $\sin(\arctan y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ $(y \in \mathbb{R})$

Donc je peux écrire que ce sinus d'alpha que je recherchais et qui est en fait z, z est donné par y sur la racine de 1 plus y carré. Et cela nous conduit au résultat suivant : si je calcule le sinus de arc tangente y cela peut être exprimé sous la forme de y sur la racine de 1 plus y carré et cette relation est vraie pour tout y dans R donc nous avons résolu notre problème. Petite remarque en passant ici : il est peut-être remarquable que cette combinaison de fonctions trigonométriques peut être exprimée en fait par une combinaison algébrique.

Notes

Summary

9m 11s

Exemple 2 (solution)

On peut faire mieux !

On pose $\alpha := \arctan y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ comme ci-dessus.

Mais $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, donc $1 - \sin^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$, si bien que

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

Cependant, on peut faire nettement mieux. Comme précédemment, on va poser que alpha est arc tangente y. Le problème est que je connais donc la tangente d'alpha, elle vaut y mais il me faut déterminer le sinus. Mais cette fois-ci, je ne vais pas chercher un pont du type que tangente alpha est donné par un quotient sinus alpha sur cosinus alpha. Non je vais partir avec une autre relation La relation que je choisis est la relation que 1 plus tangente carrée de alpha est donné par 1 sur cosinus carré alpha. Je vous rappelle que le cosinus ne peut être nul, nous l'avons déjà indiqué précédemment Le cosinus est strictement positif. Donc si je prends cette relation et si je remplace ce cosinus carré par 1 moins sinus carré, alors j'obtiens la relation que 1 moins sinus carré est donné par le quotient 1 sur 1 plus tangente carrée de alpha. On peut résoudre cela par rapport à sinus carré alpha. Et si je mets le tout au même dénominateur qu'est-ce qu'il me reste ? Pour le 1, j'obtiens 1 plus tangente carrée alpha moins le 1; il me reste simplement tangente carrée alpha. J'ai un peu le même problème que précédemment. J'aimerais obtenir le sinus le problème est que ici j'ai alors une indétermination sur le signe mais...

Notes

Summary

10m 05s

Exemple 2 (solution)

On peut faire mieux !

On pose $\alpha := \arctan y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ comme ci-dessus.

Mais $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, donc $1 - \sin^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$, si bien que

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

Pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$ sont de même signe. Donc

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

et

$$\sin(\arctan y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \quad (y \in \mathbb{R})$$

rappelons quand même que l'angle alpha est compris entre -π/2 et π/2. Sur cette plage les fonctions tangente et sinus sont de même signe. Donc je peux dire que le sinus de alpha est donné par tangente alpha sur la racine de 1 plus tangente carrée alpha. C'est-à-dire, puisque tangente de alpha est y, c'est y sur la racine de 1 plus y carré et j'obtiens donc le même résultat que précédemment, c'est-à-dire que le sinus de arc tangente y est toujours donné par le quotient y sur la racine de 1 plus y carré cette relation étant vraie pour toutes les valeurs de y.

Notes

Summary

12m 01s

Exemple 3

Exemple

Déterminer les valeurs des fonctions trigonométriques de l'angle

$$\alpha = \frac{671}{3}\pi.$$

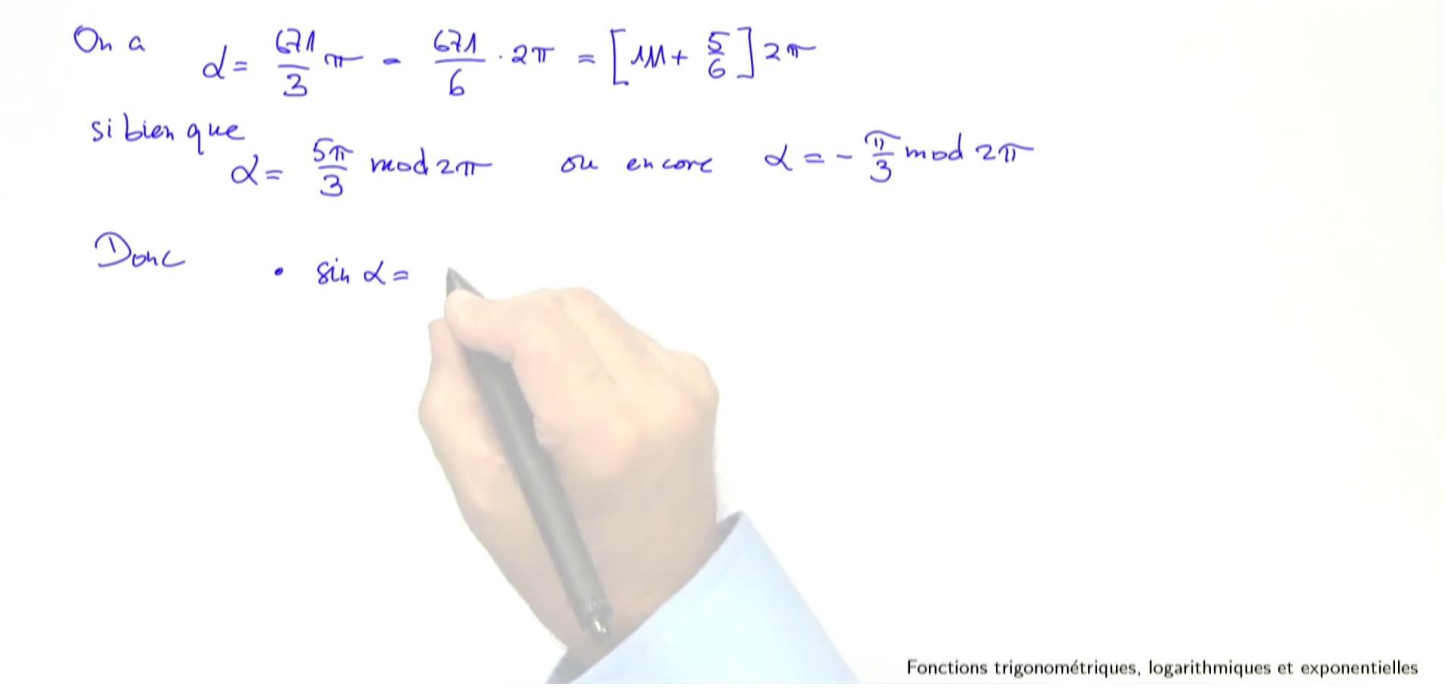
Comme troisième exemple, nous voulons déterminer les valeurs des fonctions trigonométriques, c'est-à-dire du sinus, du cosinus, de tangente et de co-tangente pour un angle qui est donné ici, c'est l'angle 671 tiers pi Alors, on a alpha est donné par 671 tiers pi.

Notes

Summary

13m 03s

Exemple 3 (solution)



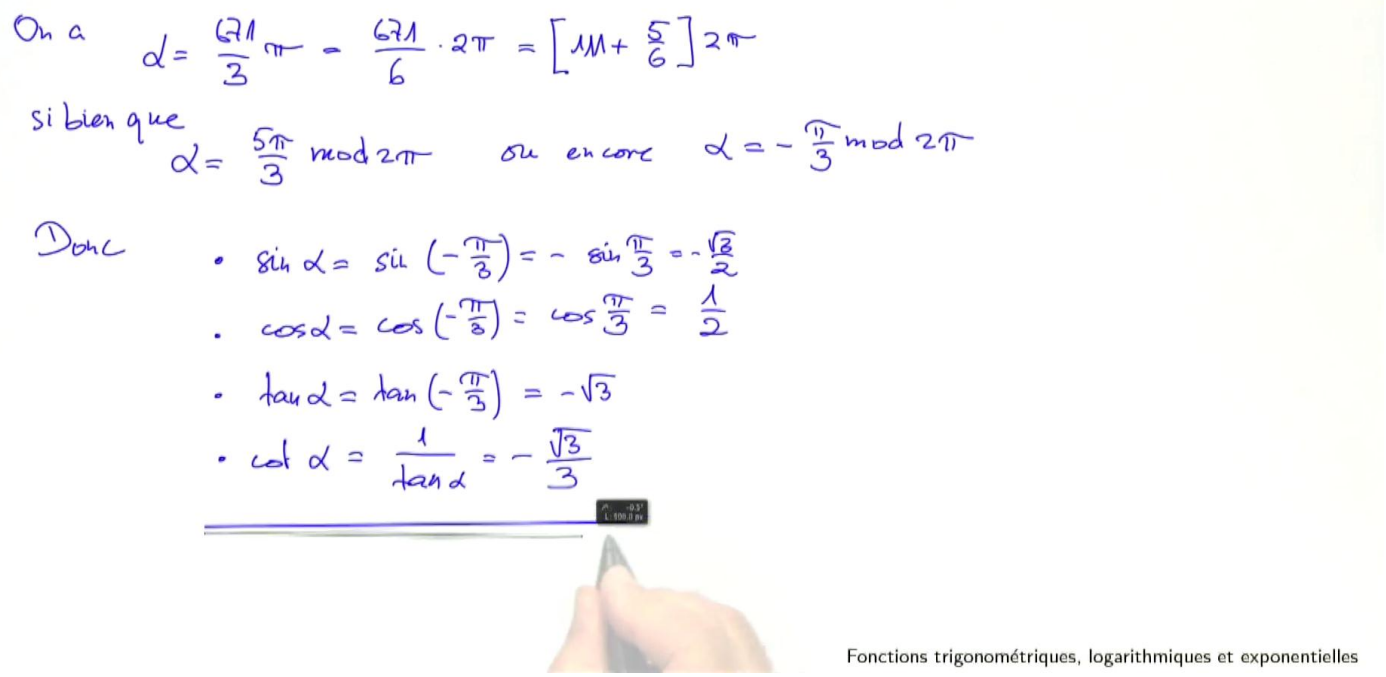
J'aimerais extraire les tours complets ils sont inclus dans ces 671 tiers pi A cet effet j'aimerais avoir quelque chose de la forme fois 2π. Donc j'aimerais connaître le nombre de tours en quelque sorte. J'écris ici 671 et pour compenser le 2 que j'ai mis là, je mets des sixièmes Depuis cette fraction 671 sixièmes je vais extraire les entiers. Cela me fait 111 entiers, c'est-à-dire 666 sixièmes et il va rester encore 5 sixièmes. fois 2π. Donc je peux écrire la relation suivante : alpha est égal à 5π/3 modulo 2π. Ou encore si on préfère alpha est égal je vais encore une fois soustraire 2π ce qui est tout à fait légitime puisque je calcule modulo 2π et j'obtiens -π/3 modulo 2π. L'avantage de -π/3 est que c'est un angle remarquable. Donc je peux écrire immédiatement le sinus de alpha... Je peux remplacer là un angle alpha donné par un angle qui est égal modulo 2π. Donc je peux prendre ce -π/3. Je prends le sinus de -π/3 le sinus, soit dit en passant, est encore une fonction impaire donc je peux dire que c'est le sinus de π/3 muni du signe moins et j'obtiens ainsi moins racine de 3, demi.

Notes

Summary

13m 28s

Exemple 3 (solution)



Si je prends le cosinus, là aussi je remplace simplement le cosinus alpha par le cosinus de -π/3, le cosinus, lui, est pair, donc je peux simplement prendre le cosinus de π/3 et j'obtiens donc 1/2. Pour tangente alpha, alors là, je pourrais même remplacer alpha par un autre angle qui lui est égal modulo πuniquement, mais il est clair que je peux tout à fait prendre ici de nouveau cet angle -π/3. Je vous rappelle que la fonction tangente est π périodique mais elle est de ce fait aussi 2π périodique. Ici on peut utiliser une valeur remarquable ou on peut simplement utiliser le fait que tangente est le quotient de sinus sur cosinus dans les deux cas on obtient le même résultat à savoir moins racine de 3 et pour co-tangente alpha je vais prendre simplement 1 sur tangente alpha c'est-à-dire que je vais obtenir moins racine de 3, tier, et voilà ce qui résout donc l'exercice.

Notes

Summary

15m 15s

Exemple 4

Exemple

Déterminer la valeur de l'expression

$$\sin\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}$$

sachant que

$$\tan\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{9\pi}{2} \leq \alpha \leq 5\pi\,.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Regardons encore un quatrième exemple : on aimerait déterminer la valeur d'une expression qui est donnée ici donc de sinus alpha moins 1 sur cosinus alpha et qu'est-ce que l'on sait sur alpha ? On sait que tangente de alpha vaut -1/2 et on sait que alpha est compris entre 9 π/2 et 5π.

Notes

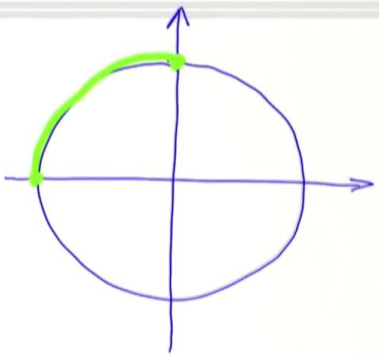
Summary

16m 21s

Exemple 4 (solution)

On a $\frac{9\pi}{2} \leq \alpha \leq 5\pi$ càd $\left[4+\frac{1}{2}\right]\pi \leq \alpha \leq 5\pi$

Donc $\sin\alpha > 0$ et $\cos\alpha < 0$



Or, il faut commencer par clarifier la plage des valeurs de alpha. Quelle est cette plage ? On dit que alpha est compris entre 9 π/2 et 5 π. J'écris ça un peu différemment je vais extraire ici des demi-tours, cette fois-ci c'est peut-être un peu plus simple dans la situation que voici. Donc j'ai ici 4 entiers plus 1/2 ça c'est les 9 demis fois π donc ça c'est des demi-tours et pour 5 π, j'ai 5 demi-tours Donc si je regarde ça sur le cercle trigonométrique, j'ai la situation suivante. La plage d'angles admissibles est contenue entre... il faut d'abord prendre 4 demi-tours 1, 2, 3, 4 et encore la moitié, donc on va partir depuis ici et 5 demi-tours c'est encore 1/4 de tour en plus donc ici sur cette plage je dois retrouver mon angle alpha. Je peux immédiatement conclure de la façon suivante : je peux dire que le sinus de alpha c'est un des termes qu'il y a dans mon expression... le sinus de alpha est certainement positif et je peux également dire que le cosinus de alpha est négatif. Complétons quand même ici le dessin Je sais que tangente de alpha vaut -1/2 donc si j'ai ici l'axe tangent, tangente -1/2 la construction pour tangente, la voici et je vois immédiatement que l'angle qui est donné ici aura un sinus strictement positif et un cosinus strictement négatif.

Notes

Summary

16m 40s

Exemple 4 (solution)

On a $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 5\pi$ càd $\left[4+\frac{1}{2}\right]\pi \leq \alpha \leq 5\pi$

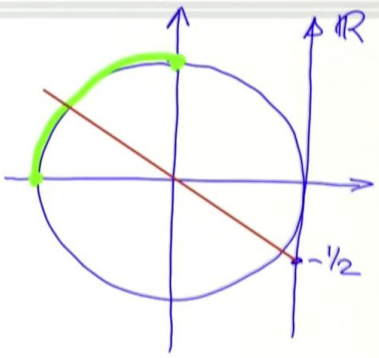
Donc $\sin\alpha > 0$ et $\cos\alpha < 0$

Mais

- $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+(-1/2)^2} = \frac{1}{1+1/4} = \frac{4}{5}$

  $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

- $\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha$



Alors, je connais uniquement la valeur de tangente. Il me faut la valeur du sinus et du cosinus. Je vais utiliser les relations de Pythagore Une première relation permet de dire que le cosinus au carré est donné par 1 divisé par 1 plus tangente carré alpha. Nous venons d'utiliser cette relation dans l'exemple précédent. Tangente alpha vaut -1/2 donc je peux calculer ici 1 sur 1 plus ce -1/2 au carré. Ce qui me donne 1 sur 1 plus 1/4 et si j'amplifie ici par 4 j'obtiens 4 sur 5. Le cosinus de alpha, à strictement parler, ce serait plus ou moins la racine de 4/5 mais le cosinus est négatif donc je sais que je vais prendre moins la racine de ces 4/5 ce qui m'amène à -2 sur racine de 5. Je vais laisser cette expression sous cette forme Je ne vais pas amplifier par la racine de 5 puisque ce qui va m'intéresser ce n'est pas le cosinus d'alpha mais 1 sur cosinus d'alpha. Comment obtenir maintenant une information sur le sinus ? Je vous propose la relation suivante : c'est que le sinus peut être écrit sous la forme de cette tangente alpha qui multiplie cosinus alpha. En effet, tangente alpha c'est le quotient du sinus par cosinus. Si je multiplie par cosinus, il me reste le sinus.

Notes

Summary

18m 40s

Exemple 4 (solution)

On a $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 5\pi$ càd $\left[4+\frac{1}{2}\right]\pi \leq \alpha \leq 5\pi$

Donc $\sin\alpha > 0$ et $\cos\alpha < 0$

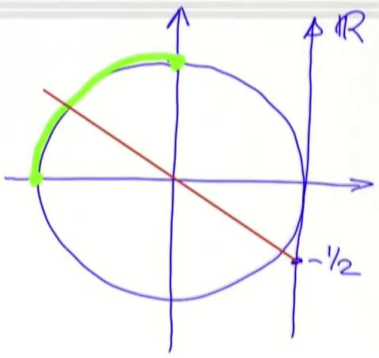
Mais

- $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+(-1/2)^2} = \frac{1}{1+1/4} = \frac{4}{5}$

  $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

- $\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Donc $\sin\alpha - \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}+5\sqrt{5}}{10} = \frac{7\sqrt{5}}{10}$



Et là je connais les deux éléments : je connais tangente qui vaut -1/2 et qui multiplie le cosinus que nous venons de déterminer comme -2 sur racine de 5. Donc si j'effectue ici les calculs, il va me rester une valeur positive de 1 sur racine de 5. Là, je peux amplifier par racine de 5 et j'obtiens racine de 5 cinquième Donc si je regarde maintenant l'expression que je recherche, l'expression qui est sinus alpha -1 sur cosinus alpha Je m'aperçois que le sinus je le connais. C'est racine de 5 cinquièmes. Je vois que cosinus alpha, je le connais, c'est une valeur négative, donc si je soustrais je vais avoir ici un plus et je vais avoir ici racine de 5, demi. Je mets ça au même dénominateur : 10 donc j'obtiens 2 fois la racine de 5 plus 5 fois la racine de 5 en tout cela va m'amener 7 fois la racine de 5 divisé par 10.

Notes

Summary

20m 16s

Les fonctions tangente et cotangente et leur inverse

Un grand merci d'avoir suivi ce troisième chapitre.

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.

Voilà ! Je vous remercie d'avoir suivi ce troisième chapitre. Je vous félicite pour la discipline que vous avez, pour l'intérêt que vous portez à ces chapitres. Je profite de l'occasion, à la fin de ce chapitre pour adresser également mes remerciements à mes collaborateurs qui me soutiennent Merci à Guido Burmeister, à Roger Sauser et à Olivier Woringer. A la prochaine.

Notes

Summary

21m 26s