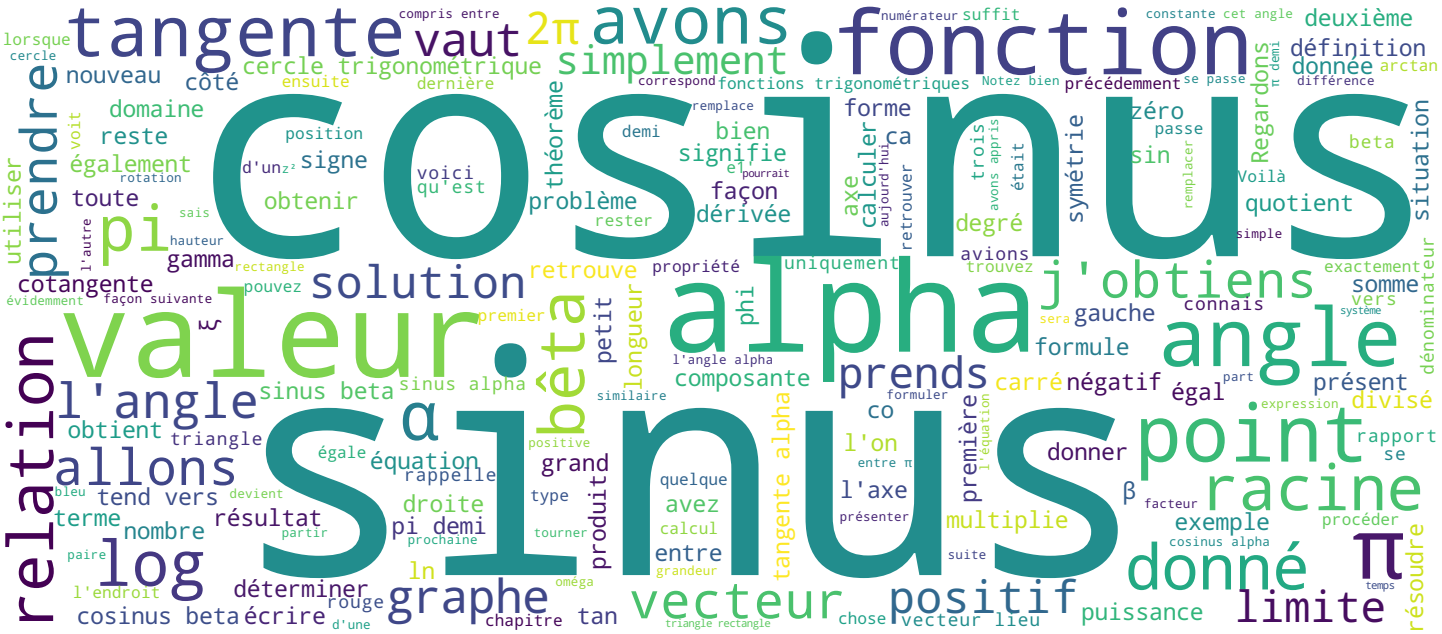


ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Formules trigonométriques

## 4.1 La rotation d'un vecteur

**Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles**

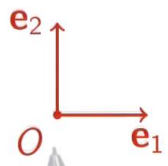
Prof Hans-Jörg Ruppen

**Search MOOC**

**Video**

# Repère et système d'axes dans le plan

Soit $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ un repère orthonormé du plan.




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Bonjour, soyez le bienvenue au cours fonctions trigonométriques, logarithmes et exponentielles. Au chapitre 4, qui va présenter les formules trigonométriques. Dans les séquences précédentes, je vous ai présenté des relations, pour les fonctions trigonométriques, des relations qui étaient basées sur des considérations sur le cercle trigonométrique. Des considérations qui faisaient intervenir des symétries, comme la symétrie le long de l'axe des x, de l'axe des y. Nous avions parlé d'angles complémentaires, d'angles supplémentaires etc. Dans le présent chapitre, je vais vous présenter une 2ème gamme de relation. Une gamme usuellement regroupée sous le terme « formule trigonométrique ». Alors cette 2ème gamme de relation, elle repose sur la superposition de rotation, c.à.d. de la rotation d'un angle alpha suivi d'une rotation d'un angle beta. Dès lors, il n'est pas surprenant qu'aujourd'hui je commence par étudier la rotation d'un vecteur. Commençons par considérer un repère et un système d'axes dans le plan. Nous allons nous donner un point O et un repère orthonormé c.à.d. un vecteur e1 de longueur 1, un vecteur e2 de longueur 1 également et ces vecteurs sont orthogonaux.

Notes

Summary

0m 04s

# Composantes d'un vecteur lieu

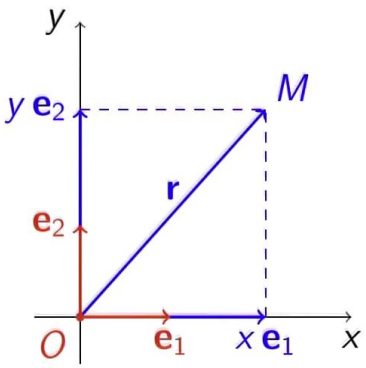
Soit $M$ un point quelconque du plan.

On repère ce point $M$ à partir de l'origine $O$ du repère, à l'aide du vecteur lieu $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$.

On décompose ce vecteur lieu selon les deux vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ :

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2\,, \qquad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

$x$ et $y$ sont les composantes du vecteur $\mathbf{r}$.






On peut définir de la façon suivante maintenant un système d'axes x y. On va simplement dire que l'axe des x est l'axe O, e1. Donc il passe par le point O et il est en direction de e1 et l'axe des y est O, e2 donc il passe par O en direction de e2. Considérons à présent un point quelconque du plan. On va l'appeler *M*. Si on veut repérer ce point, on peut procéder à l'aide d'un vecteur lieu. Vecteur lieu que je vais appeler *r*, (c'est une dénomination usuelle pour les vecteurs lieux). Et qui est le vecteur qui part depuis le point O vers M (donc qui part depuis O vers M). Un vecteur lieu, contrairement à un vecteur libre, est lié. Il est lié par le fait qu'il part depuis l'origine vers un second point. Alors ce vecteur r peut évidemment se décomposer selon les 2 vecteurs e1 et e2. Nous allons obtenir le vecteur r, ici comme une somme. Nous allons prendre x fois le vecteur e1 plus y fois le vecteur e2, et avec le choix judicieux des x et y nous allons obtenir le bon point M. Nous écrivons cela en plus court en écrivant: r égale, on écrit ces valeurs x et y l'une au dessus de l'autre et on l'entoure de crochet (si vous préférez l'entourer de parenthèses rondes, faites le ça ne dérangera pas). On va dire que x et y sont les composantes du vecteur r.

Notes

Summary

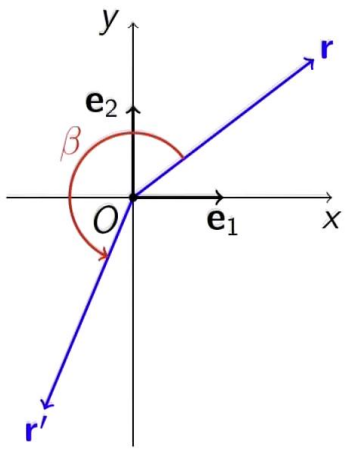
1m 20s

# Problème

On considère un vecteur lieu $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et un angle $\beta$ quelconque.

On fait tourner le vecteur lieu $\mathbf{r}$ de l'angle $\beta$ autour de l'origine $O$, on obtient ainsi un nouveau vecteur lieu $\mathbf{r}'$.

On cherche à déterminer les composantes du vecteur $\mathbf{r}'$.






Alors, nous allons considérer le problème suivant: pour ce vecteur lieu r qu'on vient de définir (qui est ici avec ces composantes x et y) on va procéder comme suit. On va prendre un angle Beta quelconque. On va prendre ce vecteur r et on va faire tourner ce vecteur r autour de l'origine O d'un angle de Beta. On aboutit ainsi à un nouveau vecteur que j'appelle r prime (r'). Et ce que j'aimerais faire c'est déterminer les composantes du vecteur r'. J'aimerais le faire à partir des composantes x et y du vecteur r ainsi qu'à partir de l'angle Beta.

Notes

Summary

2m 53s

# Méthode

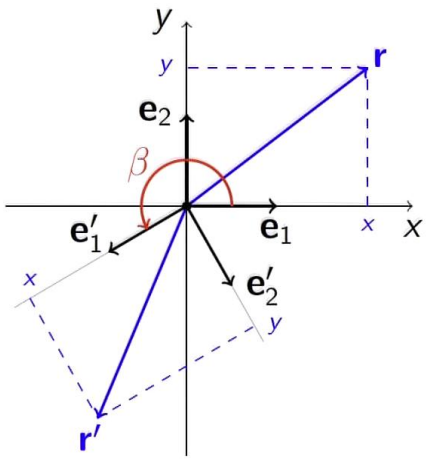
Le vecteur $\mathbf{r}$ s'écrit : $\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$.

En faisant tourner d'un angle $\beta$ le vecteur $\mathbf{r}$ ainsi que les deux vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$, on a

$$\mathbf{r}' = x\,\mathbf{e}'_1 + y\,\mathbf{e}'_2\,,$$

avec les mêmes composantes $x$ et $y$.

Il suffit donc de déterminer les composantes des vecteurs $\mathbf{e}'_1$ et $\mathbf{e}'_2$.






Alors, je vous rappelle, le vecteur r je peux aussi l'écrire comme x fois e1 + y fois e2. Vous retrouvez ici les valeur x et y qu'il faut choisir pour obtenir cette somme. A présent je fais tourner ce vecteur r. Je vais faire tourner en même temps les vecteurs e1 et e2. Voilà qui est chose faite, on remarquera immédiatement que le vecteur r' peut s'écrire comme x fois le vecteur e1 prime + y fois le vecteur e2 prime. Donc les x et y sont resté les mêmes que précédemment. Ce qui a changé, c'est que j'ai changé les vecteurs e1en e1 prime (e1') et e2 en e2 prime (e2'). Cela vient du fait qu'une rotation conserve les longueurs et les angles. Donc on conserve, par exemple, l'allure de ce triangle ici, que l'on retrouve ici. Donc pour résoudre mon problème, c.à.d. pour retrouver les composantes de r', il suffit de connaître les composantes de e1' et de e2' et alors je pourrais calculer les composantes de r'.

Notes

Summary

3m 37s

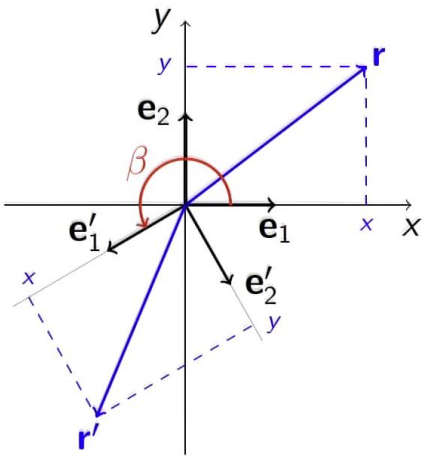
# Solution

Par définition des fonctions sinus et cosinus, on a

$$\mathbf{e}_1' = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{e}_2' = \begin{bmatrix} \cos(\beta + \pi/2) \\ \sin(\beta + \pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{bmatrix}.$$






Pour e1', on va procéder de la façon suivante. On peut tout à fait s'imaginer ici un cercle trigonométrique unitaire, alors on retrouve à l'aide des définitions des fonctions sinus et cosinus que e1' à les composantes cosinus beta sinus beta. alors pour e2', je dois augmenter l'angle de rotation beta de pi demi (90°) Donc ces composantes seraient (c'est la même formule) le cosinus de beta + pi demi et le sinus de beta + pi demi. Alors on va utiliser un peu des relations connues et cela signifie que le cosinus de beta + pi demi, c'est moins sinus beta et le sinus de beta + pi demi, c'est cosinus beta. On peut du reste observer ça tout à fait dans la figure. Si je regarde, par exemple, la 1ère composante de e1', on me dit que c'est cosinus beta et ce cosinus beta je le retrouve ici comme 2ème composante de e2'. Si je prends la 2ème composante de e1' c'est le sinus (qui est ici). Ce sinus je peux le retrouver ici, mais il sera de signe contraire. Remarquons que, si on connaît un peu la géométrie, on sait transformer tout de suite le cosinus beta sinus beta en moins sinus beta cosinus beta si on veut obtenir un vecteur qui est tourné de + pi demi, il suffit d'inter changer les composantes et de changer de signe sur la 1ère composante. Cela est un résultat connu en géométrie.

Notes

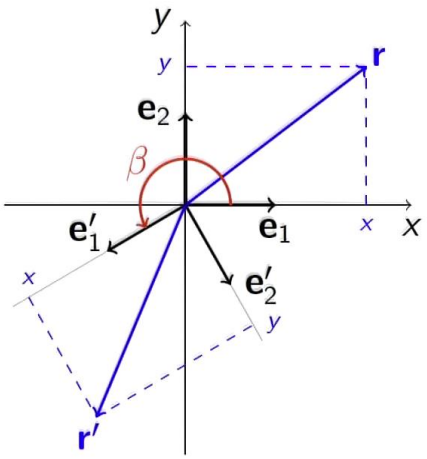
Summary

4m 51s

# Solution

On en déduit les composantes du vecteur $\mathbf{r}'$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= x\,\mathbf{e}'_1 + y\,\mathbf{e}'_2 \\ &= x\begin{bmatrix}\cos\beta \\ \sin\beta\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-\sin\beta \\ \cos\beta\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta\end{bmatrix}\end{aligned}$$






Dès lors on peut revenir à cette relation que nous avions pour r' c.à.d. nous avons ce x et y ici, qui proviennent du vecteur r et j'ai ici e1' et e2' que je viens de déterminer. e1' est donné par cosinus beta sinus beta, e2' est donné par moins sinus beta cosinus beta. J'obtiens donc x fois un premier vecteur + y fois un deuxième vecteur et le calcul vectoriel permet de dire que si j'additionne ici, donc je vais multiplier par x chaque composante du premier vecteur, par y chaque deuxième, j'additionne les composantes une à une. Donc j'obtiens x fois cosinus beta moins y fois sinus beta comme 1ère composante et x fois sinus beta + y fois cosinus beta comme 2ème composante du vecteur r'.

Notes

Summary

6m 32s

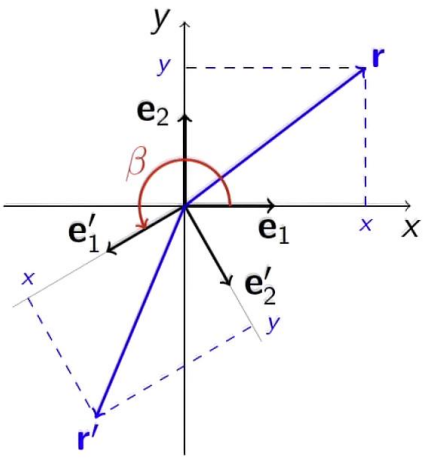
## Proposition

*En faisant tourner un vecteur lieu*

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

*d'un angle* $\beta$ *autour de l'origine* $O$*, on obtient le vecteur lieu*

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \end{bmatrix}.$$






Je peux donc formuler le résultat suivant. Je vais le formuler sous la forme d'une proposition : en faisant tourner un vecteur lieu r (donné par x y) d'un angle beta autour de l'origine O, vous retrouvez ici la figure que nous venons d'utiliser. On obtient le vecteur lieu r' et ici vous trouvez le résultat que nous avons développé c.à.d. x fois cosinus beta moins y sinus beta et x fois sinus beta + y fois cosinus beta.

Notes

Summary

7m 15s

# Proposition

## Proposition

*En faisant tourner un vecteur lieu*

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

*d'un angle $\beta$ autour de l'origine $O$, on obtient le vecteur lieu*

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \end{bmatrix}.$$

Sous forme matricielle, le vecteur $\mathbf{r}'$ peut s'écrire

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Le produit matriciel s'effectue "ligne par colonne".

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \end{bmatrix}$$



Notez bien que ce résultat peut s'écrire de façon un peu plus élégante si on utilise une écriture matricielle. Sous forme matricielle on va pouvoir dire que r' est donné, alors là, vous trouvez une matrice avec 4 nombres, dans la première colonne vous trouvez les composantes du vecteur e1', dans la seconde colonnes vous trouvez les composantes du vecteur e2' et ici vous trouvez les composantes du vecteur r. Si on veut multiplier cette matrice par ce vecteur, on procède comme suit. On va effecteur des produits (on pourrait dire ligne par colonne). Alors je m'explique, pour obtenir la première composante (celle-ci) je vais prendre la première ligne fois la colonne et je procède comme suit: je multiplie le cosinus par x, je multiplie moins sinus beta par y et j'additionne. Ce qui me donne bel et bien la 1ère composante. Ensuite je passe à la 2ème ligne et je fais, en quelque sorte la même chose. J'obtiens donc le sinus beta qui multiplie x et le cosinus beta qui multiplie y. Ce qui me donne: x fois sinus beta + y fois cosinus beta qui est bien le résultat souhaité.

Notes

Summary

7m 45s

# La rotation d'un vecteur

Ce que nous avons appris ou revu :

- la notion de vecteur lieu ;
- les composantes d'un vecteur ;
- la rotation d'un vecteur.

Prochaine étape :

- le théorème d'addition ;
- les formules de duplication.



Résumons ce que nous venons d'apprendre. Nous avons appris ce qu'est un vecteur lieu c.à.d. un vecteur r qui part depuis l'origine vers un point M. Nous avons clairement établi ce qu'étaient les composantes d'un tel vecteur. C'était les x et y du vecteur r. et nous avons appris à tourner un tel vecteur autour de l'origine. Alors dans une prochaine étape, on va rentrer vraiment dans le vif de ce chapitre. On va représenter, ce qu'on appelle le théorème d'addition et les formules de duplication pour le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente. Je vous remercie, et à la prochaine fois.

Notes

Summary

9m 13s