ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Formules trigonométriques

4.1 La rotation d'un vecteur

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

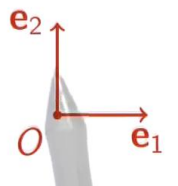
Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

EPFL

Repère et système d'axes dans le plan

Soit $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ un repère orthonormé du plan.



Guten Tag, seien Sie herzlich willkommen zum Kurs zu trigonometrischen, logarithmischen und exponentiellen Funktionen. Im Kapitel 4 werden trigonometrische Funktionen präsentiert. In den vorhergehenden Einheiten habe ich Ihnen Beziehungen für trigonometrische Funktionen präsentiert, die auf Betrachtungen zu Beziehungen des trigonometrischen Einheitskreises basieren. Diese Betrachtungen, bei denen Symmetrien betrachtet wurden, wie die Symmetrie der Länge der x-Achse und der y-Achse. Wir haben über Nebenwinkel und Komplementwinkel gesprochen etc. In diesem Kapitel werde ich Ihnen eine zweite Gruppe von Beziehungen vorstellen. Eine Gruppe, die üblicherweise als „trigonometrische Formel“ bezeichnet wird. Also diese zweite Gruppe von Beziehungen basiert auf der Superposition der Rotation, das heißt, Rotation eines Winkels Alpha, gefolgt von der Rotation eines Winkels Beta. Deshalb ist es nicht überraschend, wenn ich heute mit dem Studium der Rotation eines Vektors beginne. Beginnen wir mit der Betrachtung eines Systems von Achsen in der Ebene. Wir erhalten einen Punkt O und ein Orthonormalsystem, d. h. einen Vektor e1 der Länge 1, auch einen Vektor e2 der Länge 1 und diese Vektoren sind orthogonal.

Notes

Summary

0m 04s

Composantes d'un vecteur lieu

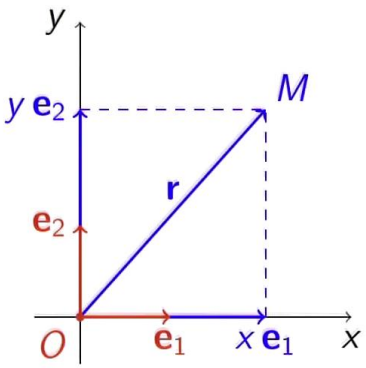
Soit M un point quelconque du plan.

On repère ce point M à partir de l'origine O du repère, à l'aide du vecteur lieu $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$.

On décompose ce vecteur lieu selon les deux vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2\,, \qquad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

x et y sont les composantes du vecteur $\mathbf{r}$.



Man kann auf die folgende Art ein System von x- und y-Achsen definieren. Man kann einfach sagen, dass die x-Achse die Achse O, e1, ist. Diese geht durch den Punkt O in Richtung e1 und die y-Achse ist O, e2, die durch O in Richtung e2 verläuft. Betrachten wir jetzt einen Punkt irgendwo auf der Ebene. Wir nennen diesen *M*. Wenn dies unser Ausgangspunkt ist, können wir mithilfe eines Vektorfeldes fortfahren. Das Vektorfeld werde ich *r* nennen (das ist eine übliche Bezeichnung für Vektorfelder). Und das ist der Vektor, der von O nach M verläuft (der also ab O in Richtung M verläuft). Ein Vektorfeld ist im Gegensatz zu einem freien Vektor gebunden. Es ist gebunden, weil es vom Ursprung zu einem zweiten Punkt verläuft. Demnach kann sich dieser Vektor r eindeutig aufteilen in die Vektoren e1 und e2. Wir erhalten hier den Vektor r wie eine Summe. Wir nehmen also x mal den Vektor e1 plus y mal den Vektor e2 und mit der sinnvollen Aufteilung von x und y erhalten wir den richtigen Punkt M. Kurz schreiben wir dies so: r gleich, man schreibt die Werte x und y einen über den anderen und umgibt diese mit einer eckigen Klammer (wenn Sie möchten, können Sie auch runde Klammern verwenden, das stört nicht). Man sagt, dass x und y die Komponenten des Vektors r sind.

Notes

Summary

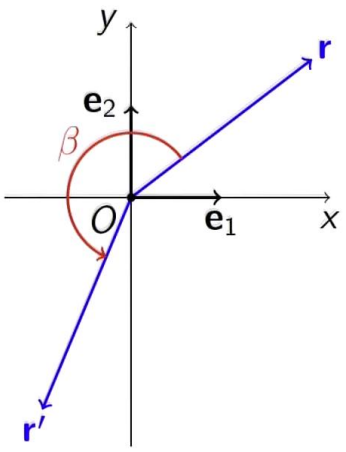
1m 20s

Problème

On considère un vecteur lieu $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et un angle β quelconque.

On fait tourner le vecteur lieu $\mathbf{r}$ de l'angle β autour de l'origine O, on obtient ainsi un nouveau vecteur lieu $\mathbf{r}'$.

On cherche à déterminer les composantes du vecteur $\mathbf{r}'$.



Also betrachten wir das folgende Problem: für dieses Vektorfeld r, das wir definiert haben (das hier mit den Komponenten x und y vorliegt) fahren wir wie folgt fort. Man nimmt einen beliebigen Winkel Beta. Man nimmt den Vektor r und dreht diesen Vektor r um den Ursprung O einen Winkels von Beta. Man beendet dies folglich mit einem neuen Vektor, den ich r prime (r') nenne. Und ich möchte die Komponenten des Vektors r' bestimmen. Das möchte ich ausgehend von den Komponenten x und y des Vektors r tun, daher ab dem Winkel Beta.

Notes

Summary

2m 53s

Méthode

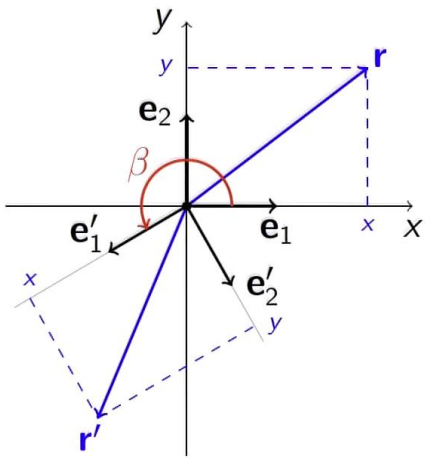
Le vecteur $\mathbf{r}$ s'écrit : $\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$.

En faisant tourner d'un angle β le vecteur $\mathbf{r}$ ainsi que les deux vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$, on a

$$\mathbf{r}' = x\,\mathbf{e}'_1 + y\,\mathbf{e}'_2\,,$$

avec les mêmes composantes x et y.

Il suffit donc de déterminer les composantes des vecteurs $\mathbf{e}'_1$ et $\mathbf{e}'_2$.



Also, ich erinnere Sie daran, dass man den Vektor r auch schreiben kann als x mal e1 + y mal e2. Sie finden hier die Werte x und y wieder, die man wählen muss, um die Summe zu erhalten. Jetzt drehe ich diesen Vektor r. Ich drehe gleichzeitig die Vektoren e1 und e2. Das ist jetzt erledigt, man wird sofort feststellen, dass der Vektor r' kann geschrieben werden als x mal Vektor e1 prime + y mal Vektor e2 prime. Dabei bleiben x und y die gleichen wie vorher. Was sich geändert hat, was ich geändert habe, sind die Vektoren e1 in e1 prime (e1') und e2 in e2 prime (e2'). Das resultiert daraus, dass eine Rotation die Längen und die Winkel konserviert. So konserviert man beispielsweise auch den Weg dieses Winkels hier, den man hier findet. Um also mein Problem zu lösen, d. h., die Komponenten von r' wiederzufinden, reicht es, die Komponenten von e1' und von e2' zu kennen, dann kann ich die Komponenten von r' berechnen.

Notes

Summary

3m 37s

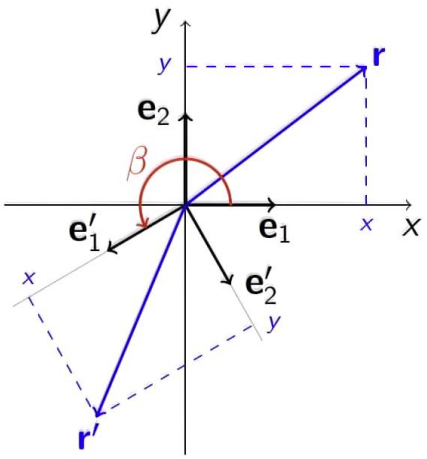
Solution

Par définition des fonctions sinus et cosinus, on a

$$\mathbf{e}_1' = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{e}_2' = \begin{bmatrix} \cos(\beta + \pi/2) \\ \sin(\beta + \pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{bmatrix}.$$



Für e1' geht es wie folgt weiter. Man kann sich hier den trigonometrischen Einheitskreis vorstellen, dann findet man mithilfe der Definitionen für Sinus- und Kosinusfunktionen, dass e1' die Komponenten Kosinus Beta Sinus Beta. hat. Für e2' muss ich demnach den Rotationswinkel Beta um Pi halbe (90°) vergrößern. Die Komponenten wären (das ist dieselbe Formel) der Kosinus von Beta + Pi halbe und der Sinus von Beta + Pi halbe. Also nutzt man die in etwa bekannten Beziehungen, was bedeutet, dass der Kosinus von Beta + Pi halbe, gleich minus Sinus Beta ist und der Sinus von Beta + Pi halbe Kosinus Beta ist. Man kann den Rest vollständig in der Figur beobachten. Wenn ich jetzt beispielsweise die erste Komponente von e1' betrachte, sagt mir das, dass dies Kosinus Beta ist und dass ich diesen Kosinus Beta hier finde, wie die zweite Komponente von e2'. Wenn ich die zweite Komponente von e1' nehme, ist das der Sinus (der hier ist). Den Sinus kann ich hier wiederfinden, aber mit einem gegensätzlichen Zeichen. Beachten wir hier, wenn man sich mit Geometrie etwas auskennt, weiß man sofort wie man den Kosinus Beta Sinus Beta in minus Sinus Beta Kosinus Beta umformen kann, wenn man einen Vektor erhalten will, der von + Pi halbe gedreht wird. Es reicht dann, die Komponenten auszutauschen und das Vorzeichen auf der ersten Komponente zu ändern. Das ist ein in der Geometrie bekanntes Ergebnis.

Notes

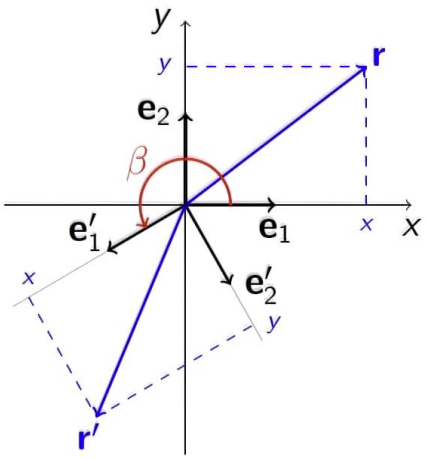
Summary

4m 51s

Solution

On en déduit les composantes du vecteur $\mathbf{r}'$:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= x\,\mathbf{e}'_1 + y\,\mathbf{e}'_2 \\ &= x\begin{bmatrix}\cos\beta \\ \sin\beta\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-\sin\beta \\ \cos\beta\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta\end{bmatrix}\end{aligned}$$



Dann können wir zu dieser Beziehung zurückkehren, die wir für r' hatten, das heißt wir haben hier x und dort y, die vom Vektor r stammen und ich habe hier e1' und e2', die ich bestimmen werde. e1' wird gegeben durch Kosinus Beta Sinus Beta, e2' wird gegeben durch minus Sinus Beta Kosinus Beta. Ich erhalte demnach x mal einen ersten Vektor + y mal einen zweiten Vektor und die vektorielle Kalkulation erlaubt mir, zu sagen, dass ich hier addiere, indem ich jede Komponente des ersten Vektors mit x multipliziere, mit y für jeden zweiten, so addiere ich die Komponenten eine nach der anderen. Also erhalte ich x mal Kosinus Beta minus y mal Sinus Beta als erste Komponente und x mal Sinus Beta + y mal Kosinus Beta als zweite Komponente des Vektors r'.

Notes

Summary

6m 32s

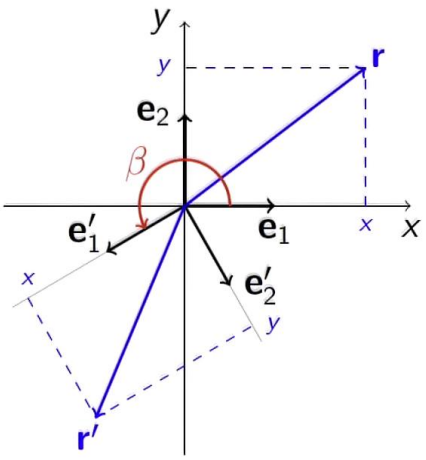
Proposition

En faisant tourner un vecteur lieu

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

d'un angle β *autour de l'origine* O, *on obtient le vecteur lieu*

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \end{bmatrix}.$$



Also kann ich das folgende Ergebnis formulieren. Ich werde in Form eines Satzes formulieren: Indem ich das Vektorfeld r (gegeben als x y) eines Winkels Beta um den Ursprung O drehe, werden Sie hier die Figur finden, die wir nutzen wollen. Man erhält ein Vektorfeld r' und Sie finden das Ergebnis, das wir entwickelt haben, das heißt x mal Kosinus Beta minus y Sinus Beta und x mal Sinus Beta + y mal Kosinus Beta.

Notes

Summary

7m 15s

Proposition

Proposition

En faisant tourner un vecteur lieu

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

d'un angle β autour de l'origine O, on obtient le vecteur lieu

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \end{bmatrix}.$$

Sous forme matricielle, le vecteur $\mathbf{r}'$ peut s'écrire

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Le produit matriciel s'effectue "ligne par colonne".

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \end{bmatrix}$$

Bitte beachten Sie, dass man dieses Ergebnis etwas eleganter schreiben kann, wenn man eine Matrixschreibweise benutzt. Für eine Matrixform kann man auch sagen, dass r' gegeben ist, also finden Sie eine Matrix mit 4 Zahlen, in der ersten Spalte finden Sie die Komponenten des Vektors e1', in der zweiten Spalte finden Sie die Komponenten des Vektors e2' und hier finden Sie die Komponenten von Vektor r. Wenn man diese Matrix mit diesem Vektor multiplizieren will, geht man wie folgt vor. Man bildet Produkte (man könnte sagen Linie für Spalte). Dann drücke ich es so aus: Um die erste Komponente zu erhalten (diese hier) nehme ich die erste Linie mal der Spalte und fahre so fort: Ich multipliziere den Kosinus mit x, ich multipliziere minus Sinus Beta Kosinus mit y und ich addiere. Das gibt mir gut und gern die erste Komponente. Dann gehe ich zur zweiten Linie und mache in etwa das Gleiche. Ich erhalte dann Sinus Beta der x multipliziert und den Kosinus Beta, der y multipliziert. Das ergibt: x mal Sinus Beta + y mal Kosinus Beta. Das ist das gewünschte Resultat.

Notes

Summary

7m 45s

La rotation d'un vecteur

Ce que nous avons appris ou revu :

- la notion de vecteur lieu ;
- les composantes d'un vecteur ;
- la rotation d'un vecteur.

Prochaine étape :

- le théorème d'addition ;
- les formules de duplication.

Resümieren wir, was wir daraus lernen. Wir haben gelernt, was ein Vektorfeld, das heißt ein Vektor r ist, der von einem Ursprung in Richtung eines Punktes M gerichtet ist. Wir haben eindeutig festgelegt, was die Komponenten eines solchen Vektors sind. Das sind x und y eines Vektors r. Und wir haben gelernt, einen solchen Vektor um den Ursprung zu drehen. In einem weiteren Schritt werden wir dann zum Wesentlichen des Kapitels zurückkehren. Wir werden vorstellen, was man als Additionstheoreme und als Duplikationsformeln für den Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens bezeichnet. Ich danke Ihnen, bis zum nächsten Mal.

Notes

Summary

9m 13s