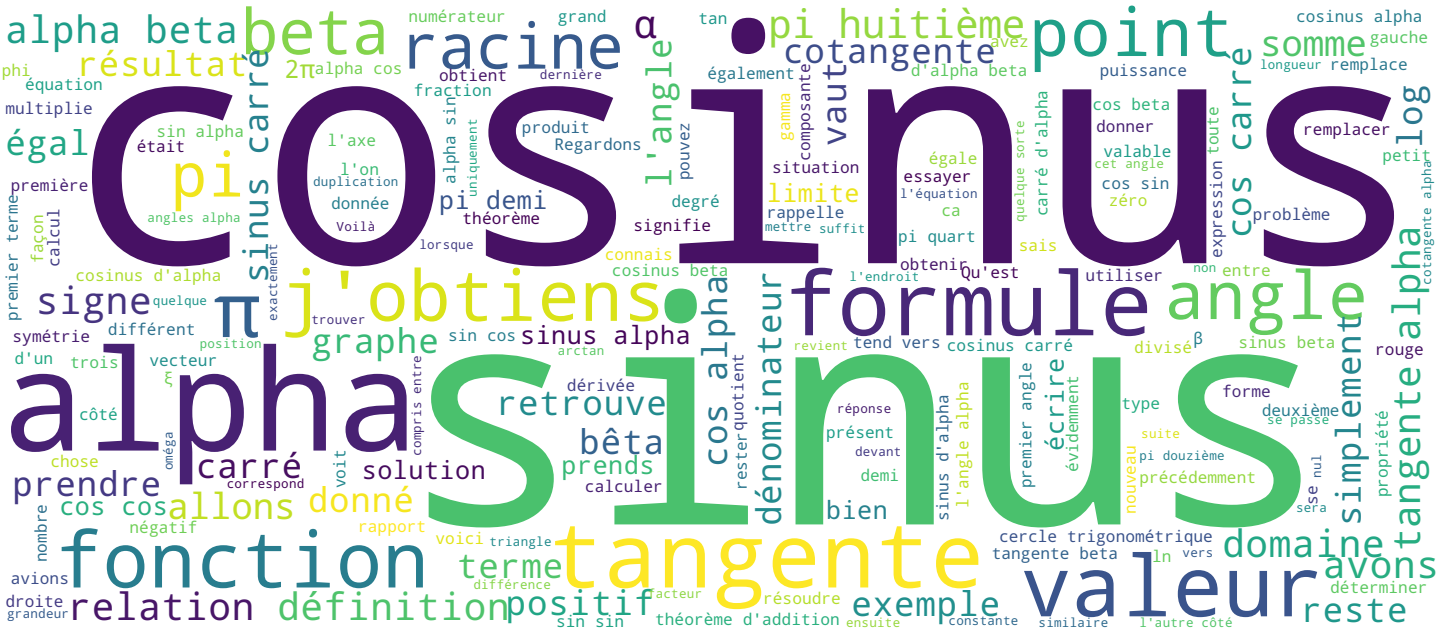
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Formules trigonométriques

4.2 Théorème d'addition, formules pour angles doubles

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

Video

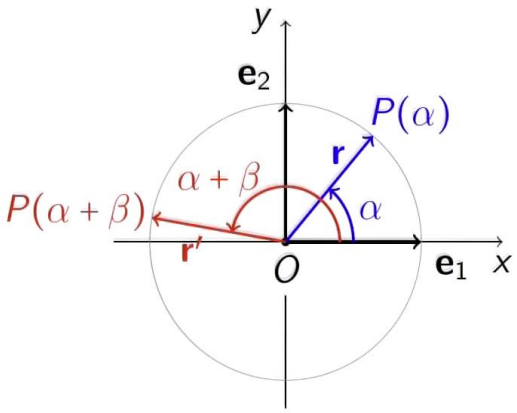
EPFL

Composantes du vecteur lieu $\mathbf{r}'$

En faisant tourner ce vecteur $\mathbf{r}$ d'un angle β autour de l'origine O, on obtient le vecteur lieu $\mathbf{r}'$ qui correspond au point $P(\alpha+\beta)$ sur le cercle trigonométrique.

Ses composantes sont données par

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}.$$



Bonjour, Comme promis la dernière fois, je vais vous présenter aujourd'hui, des formules trigonométriques. Je vais vous présenter des formules que l'on regroupe sous le terme de théorème d'addition. Ce sont quatre formules et je présente également des formules pour angles doubles. Là encore, ce sont quatre formules mais chacune en deux versions. Donc ça va faire quand même pas mal de formules aujourd'hui. Commençons par considérer un vecteur unitaire Pour le fixer, nous allons considérer sur le cercle trigonométrique qui est ici, l'axe des x, y, le cercle unitaire, on va considérer un point P de alpha qui correspond à l'angle alpha. Ce point P de alpha, je peux le repérer avec un vecteur lieu que j'appelle r. Et je sais comment trouver les composantes de ce vecteur. Elles sont données par cosinus alpha et sinus alpha. Comme précédemment, nous allons faire tourner ce vecteur r d'un angle beta autour de l'origine. Je prends ce vecteur r et je le fais tourner. Cela signifie que le point P alpha est maintenant remplacé par un point P qui correspond à l'angle alpha + beta. Le vecteur lieu je l'appelle, comme précédemment r prime. Là, je peux redire, je peux retrouver les composantes de r prime. C'est simplement le cosinus de l'angle alpha + beta, l'angle en rouge, et le sinus de ce même angle alpha + beta.

Notes

Summary

0m 04s

Rotation du vecteur r

Le vecteur lieu $\mathbf{r}'$ est obtenu par rotation du vecteur $\mathbf{r}$ d'un angle β.

En appliquant la proposition du paragraphe précédent, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \end{bmatrix}.$$

Appliquons à présent la proposition que nous avons développée lors de la dernière séance. C'est-à-dire que r prime, qui est ici, est le cosinus de alpha + beta, le sinus de alpha + beta, est donné par la matrice de rotation fois le vecteur r, cos alpha, sin alpha. Je vous rappelle que la matrice de rotation avait dans sa première colonne les composantes de e1 prime et dans la deuxième colonne, on retrouve les composantes du vecteur e2 prime. Effectuons ces produits: ligne fois colonne. J'obtiens cosinus beta cosinus alpha, qui est ici, moins sinus beta sinus alpha qui est là, donc ça me donne cette première ligne : cos alpha + cos beta moins sin alpha fois sin beta. Pour la deuxième composante, le résultat, je multiplie la deuxième ligne par cette colonne, donc ça va me donner le sinus beta fois cos alpha et le cos beta fois sin alpha. On retrouve cela ici sur la deuxième ligne. Je retrouve donc une relation qui me donne un vecteur égal à un vecteur. L'égalité de vecteurs est uniquement possible si les composantes sont égales, c'est-à-dire que je peux lire maintenant des relations, je peux par exemple dire que le cosinus de alpha + beta doit être la même chose que cosinus alpha cosinus beta moins sin alpha sin beta.

Notes

Summary

1m 33s

Rotation du vecteur r

Le vecteur lieu $\mathbf{r}'$ est obtenu par rotation du vecteur $\mathbf{r}$ d'un angle β.

En appliquant la proposition du paragraphe précédent, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \end{bmatrix}.$$

Je vais retenir ça : le cosinus de alpha + beta est le cosinus d'alpha fois le cosinus beta moins sinus alpha sinus beta. Ce raisonnement est valable pour tous les angles alpha et beta. Si je regarde ici la deuxième composante, je vais avoir le sinus d'alpha + beta qui est égal au sinus alpha cos beta + cos alpha sin beta.

Notes

Summary

2m 54s

Formules d'addition

On en déduit les expressions de $\cos(\alpha+\beta)$ et de $\sin(\alpha+\beta)$ en fonction du cosinus et du sinus des angles α et β :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta,\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta, \qquad (\alpha,\,\beta\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

C'est ce que j'ai écrit ici. Le sinus, là, cette fois-ci on a sin cos et cos sin. Précédemment c'était cos cos moins sin sin. Il faut mémoriser ces formules, on les utilisera très souvent. Je sais, il y a toujours des signes différents, ici, par exemple un moins, un plus, il faut le mémoriser, je n'ai pas d'autre solution à ce problème. Dans ces relations, on peut jouer encore un peu, on peut par exemple dire que je remplace ici le beta par un moins beta, donc je vais avoir alpha + un moins beta, c'est-à-dire un alpha moins beta. Cela signifie qu'à l'endroit ici où j'ai beta, je dois écrire des moins beta. Je fais la même chose sur la deuxième ligne.

Notes

Summary

3m 16s

Formules pour la différence

En remplaçant β par $-\beta$ dans les relations précédentes et en utilisant la parité des fonctions sinus et cosinus, on obtient des relations pour la différence d'angles :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\left[\alpha+(-\beta)\right] = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\left[\alpha+(-\beta)\right] = \sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)\\ &= \sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.\end{aligned}$$

Qu'est-ce que j'obtiens ? Je vais obtenir le cosinus d'alpha moins beta en disant que ce moins est simplement un plus moins beta. J'écris la formule obtenue mais je remplace les beta par moins beta. Je vous rappelle que le cosinus est une fonction paire, c'est-à-dire que le cosinus de ce moins beta, en fait, est simplement un cosinus beta. En revanche, le sinus est impair, c'est-à-dire que le sinus de moins beta donne un moins sinus beta, donc je peux écrire ici sinus beta mais j'ai un changement de signe. Donc, cette fois-ci, pour le cosinus de la différence, j'ai cos cos + sin sin, non pas moins. Si je fais la même chose pour le sinus, j'ai donc le sinus d'alpha moins beta. Je vais dire que c'est alpha + moins beta. Dans la formule pour le sinus que nous avions, je remplace le beta par moins beta, j'avais donc sin cos + cos sin. De nouveau, j'utilise les parités du cosinus, du sinus. Le cosinus moins beta devient cosinus beta, le sinus moins beta devient moins sinus beta. Cette fois-ci, j'obtiens sinus alpha cosinus beta moins cos alpha sin beta.

Notes

Summary

3m 58s

Théorème d'addition

Proposition

Pour tout angle $\alpha \in \mathbb{R}$ *et pour tout angle* $\beta \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta, \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta. \end{aligned}$$

Retenons l'ensemble de ces formules que l'on appelle les formules d'addition dans une proposition qui porte le nom de théorème d'addition. Pour tous les angles alpha et beta, je n'ai pas besoin de mettre des contraintes particulières dessus, les raisonnements étaient valables pour tous les angles alpha et beta. J'ai une formule pour cosinus alpha + beta: elle est du type cos cos moins sin sin, et pour le sinus d'alpha + beta, elle est de la structure sin cos + cos sin. Si je remplace le signe + dans alpha + beta par un moins, j'obtiens des formules similaires. Je peux déduire ces deux dernières formules depuis les précédentes en utilisant la parité des fonctions cosinus et sinus pour l'argument ici beta et j'obtiens cette fois-ci cos cos + sin sin et sin cos moins cos sin. Nous avons des résultats pour le sinus et le cosinus.

Notes

Summary

5m 02s

Tangente de la somme

On en déduit l'expression de $\tan(\alpha+\beta)$ en fonction de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Regardons si nous pouvons développer un résultat pour tangente, par exemple. Nous aimerions exprimer tangente d'alpha + beta. Rien de plus simple puisque la tangente d'un angle s'exprime à l'aide du sinus et du cosinus. C'est simplement le sinus divisé par le cosinus. Nous avons des formules pour sinus d'alpha + beta, nous avons une formule pour cosinus d'alpha + beta, utilisons ces formules. Voici qui est chose faite. Donc, pour le numérateur, j'ai sin cos + cos sin, au dénominateur, j'ai cos cos moins sin sin. On pourrait se contenter de ce résultat sous cette forme-là, il y a, en quelque sorte, un petit défaut. C'est, si je veux calculer la tangente d'alpha + beta, je dois connaître le sinus et le cosinus de ces angles. On va essayer de remplacer ce résultat par une expression qui contient uniquement tangente d'alpha et tangente de beta. Cela est possible. Pour le faire, il faut essayer de faire apparaître non pas, par exemple, un sinus alpha, mais un tangente alpha. Non pas un sinus beta, mais un tangente beta. Cela signifie que, ici, il me manque une division par cos alpha, il me manque une division par cos beta. Allons-y, divisons numérateur et dénominateur par ce produit qui me manque, qui est le cosinus alpha cosinus beta.

Notes

Summary

5m 57s

Tangente de la somme

On en déduit l'expression de $\tan(\alpha+\beta)$ en fonction de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\cdot\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}.$$

En rouge, vous avez ce même facteur par lequel je divise et le numérateur et le dénominateur. Pour en revenir sur la question : est-ce qu'il y a danger de diviser par 0 ? On va revenir là-dessus dans un instant, mais procédons avec les calculs. Au numérateur, je vais simplement diviser chacun des termes qui est dans la somme par le cos alpha cos beta et de même je ferai au dénominateur. Voilà ce que j'obtiens : donc j'ai ici le premier terme divisé par le terme en rouge + le deuxième terme divisé par le terme en rouge, etc. On peut tout de suite simplifier un tas de choses, par exemple, si je regarde ici au dénominateur, ce premier terme, il reste uniquement 1. Regardons un peu tout ce que l'on peut simplifier, on peut également simplifier ici les cos beta, les cos alpha... Là, c'est parfait. Qu'est-ce qu'il me reste ? Il me reste un sinus alpha sur cos alpha, un sin beta sur cos beta, un 1 moins, ça c'est le 1 d'ici, moins et le terme de derrière, alors là j'ai un produit divisé par un produit, je vais prendre ça comme une fraction fois fraction. Toutes les fractions qui apparaissent sont à présent des tangentes. J'obtiens ici tangente alpha + tangente beta, divisé par 1 moins tangente alpha fois tangente beta.

Notes

Summary

7m 20s

Tangente de la somme

On en déduit l'expression de $\tan(\alpha+\beta)$ en fonction de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\cdot\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}.$$

Il faut qu'on revienne encore au problème de la validité de nos calculs. Ici, si je regarde le point de départ, je pense qu'il nous faut développer une formule, quand même, valable. Il faut que tangente alpha + beta ait un sens, c'est-à-dire, on va devoir imposer que le cosinus d'alpha + beta n'est pas nul, c'est-à-dire qu'il faut imposer que alpha + beta est dans le domaine de définition de tangente. Si je regarde la suite des calculs, j'ai ici une division par cos alpha fois cos beta, donc il faut s'assurer que ni cos alpha ni cos beta ne soit nul, cela revient à dire qu'aussi bien alpha que beta doivent être dans le domaine de définition de tangente, puisque ce domaine-là empêche le cosinus de s'annuler. Et évidemment ici j'ai des tangentes alpha beta donc je retrouve cette même condition que alpha et beta doivent être dans le domaine de définition de tangente.

Notes

Summary

8m 40s

Remarque

La relation

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

n'est valable que si

$$\begin{cases}\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\in\mathbf{D}_{\tan}\\ \text{et}\quad \tan\alpha\cdot\tan\beta\neq 1.\end{cases}$$

En d'autres termes,

$$\begin{cases}\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \text{et}\quad \tan\alpha\cdot\tan\beta\neq 1.\end{cases}$$

Or si $\alpha,\ \beta\in\mathbf{D}_{\tan}$, on a

$$\begin{aligned}\alpha+\beta=\tfrac{\pi}{2}+k\,\pi &\Leftrightarrow \alpha=\tfrac{\pi}{2}-\beta+k\,\pi\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha=\tan\left(\tfrac{\pi}{2}-\beta\right)\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha=\cot\beta\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha\cdot\tan\beta=1.\end{aligned}$$

Si je résume, j'ai une relation qui est valable si alpha, beta sont dans le domaine de définition de tangente, ainsi que la somme alpha + beta. Peut-être que l'on peut être encore un peu hyper prudent en se disant qu'il faudrait peut-être quand même que le dénominateur ne s'annule pas non plus. Mettons cette condition, rajoutons encore que le produit tangente alpha fois tangente beta ne soit pas égal à 1. Mais si vous regardez ça d'un peu plus près, vous allez dire alpha beta dans le domaine de définition de tangente, c'est-à-dire ils sont différents de pi demi + k fois pi ainsi qu'alpha + beta également différents de pi demi + k fois pi et cette deuxième condition que nous avons rajoutée peut-être par souci de ne rien faire faux, peut-être qu'on est un peu trop prudent effectivement, nous sommes certainement un peu trop prudents parce que vous voyez, si vous dites qu'alpha et beta sont dans le domaine de définition de tangente, qu'est-ce qu'il se passe si alpha + beta étaient égales à pi demi + k fois pi ? Ça revient à dire que alpha serait: - vous passez le beta de l'autre côté, pi demi moins beta modulo pi - Ça revient à dire que la tangente alpha et la tangente de pi demi moins beta soient la même chose.

Notes

Summary

9m 31s

Remarque

La relation

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

n'est valable que si

$$\begin{cases}\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\in \mathbf{D}_{\tan}\\ \text{et}\quad \tan\alpha\cdot\tan\beta\neq 1.\end{cases}$$

En d'autres termes,

$$\begin{cases}\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \text{et}\quad \tan\alpha\cdot\tan\beta\neq 1.\end{cases}$$

Or si $\alpha,\ \beta\in \mathbf{D}_{\tan}$, on a

$$\begin{aligned}\alpha+\beta=\tfrac{\pi}{2}+k\,\pi &\Leftrightarrow \alpha=\tfrac{\pi}{2}-\beta+k\,\pi\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha=\tan\left(\tfrac{\pi}{2}-\beta\right)\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha=\cot\beta\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha\cdot\tan\beta=1.\end{aligned}$$

En résumé, la relation ci-dessus est valable si et seulement si

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\neq\tfrac{\pi}{2}+k\,\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Là, on utilise des relations que nous avions précédemment développées et on peut exprimer cette tangente par cotangente beta. Nous passons cette cotangente beta de l'autre côté et nous obtenons bel et bien que tangente alpha et tangente beta seraient égales à 1. Donc si je blesse cette première condition alpha + beta dans le domaine de définition tangente alpha, je blesse en même temps le fait que tangente alpha et tangente beta est différent de 1. Donc je peux supprimer, en quelque sorte, cette dernière condition. L'unique chose qu'il faut retenir est qu'il faut qu'alpha, beta et la somme alpha + beta sont dans le domaine de définition de tangente, c'est-à-dire différents de pi demi modulo pi.

Notes

Summary

10m 48s

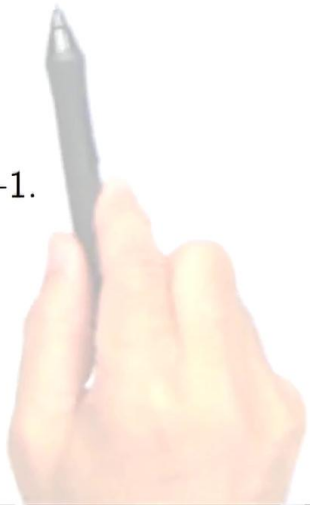
Remarque

La relation

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

n'est valable que si

$$\begin{cases} \alpha,\ \beta,\ \alpha - \beta \in \mathbf{D}_{\tan} \\ \text{et} \quad \tan\alpha \cdot \tan\beta \neq -1. \end{cases}$$



De nouveau, nous remplaçons beta par moins beta dans cette relation. C'est-à-dire que l'on va dire que j'aimerais calculer tangente d'alpha moins beta, donc je remplace simplement le beta par moins beta dans les formules précédentes. J'ai tangente alpha + tangente, cette fois-ci, moins beta. Ici, j'ai 1 + tangente alpha fois tangente de moins beta. Rappelons-nous que tangente, qui est le quotient d'un sinus et d'un cosinus, un sinus qui est impair, un cosinus qui est pair, donc une tangente qui est impaire, c'est-à-dire que tangente de moins beta, c'est moins tangente beta, les deux fois, donc ce qu'il résulte cette fois-ci, c'est tangente alpha moins tangente beta et un + tangente alpha fois tangente beta. On peut de nouveau s'interroger sur la validité de cette relation. Comme précédemment, il faut que alpha, beta, ici la différence, soient dans le domaine de définition. Si on est très très prudent, on exige encore que le produit tangente alpha tangente beta est différent de moins 1, mais comme précédemment, nous allons voir que cette dernière condition est remplie d'elle-même.

Notes

Summary

11m 35s

Remarque

La relation

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

n'est valable que si

$$\begin{cases}\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta\in\mathbf{D}_{\tan}\\ \text{et}\quad \tan\alpha\cdot\tan\beta\neq -1.\end{cases}$$

En d'autres termes,

$$\begin{cases}\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \text{et}\quad \tan\alpha\cdot\tan\beta\neq -1.\end{cases}$$

Or si $\alpha,\ \beta\in\mathbf{D}_{\tan}$, on a

$$\begin{aligned}\alpha-\beta=\tfrac{\pi}{2}+k\,\pi &\Leftrightarrow \alpha=\tfrac{\pi}{2}+\beta+k\,\pi\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha=\tan\left(\tfrac{\pi}{2}+\beta\right)\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha=-\cot\beta\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha\cdot\tan\beta=-1.\end{aligned}$$

En résumé, la relation ci-dessus est valable si et seulement si

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta\neq\tfrac{\pi}{2}+k\,\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Vous pouvez refaire les calculs comme précédemment, si alpha moins beta n'était pas dans le domaine de définition de tangente, donc de la forme pi demi + k fois pi, on peut de nouveau conclure comme précédemment... - passez le beta de l'autre côté, vous obtenez ici un tangente pi demi + beta qui est moins cotangente beta et ça signifie que le produit serait égal à moins 1. L'unique condition qu'il reste est que cette formule, pour tangente d'alpha moins beta, elle est valable si alpha est dans le domaine de définition de tangente, beta également, et alpha moins beta également. C'est-à-dire que les 3 angles sont différents de pi demi + k fois pi avec k dans Z.

Notes

Summary

12m 39s

Cotangente de la somme et de la différence

D'une façon analogue on montre les deux relations suivantes :

$$\cot(\alpha+\beta) = -\frac{1-\cot\alpha\cdot\cot\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}, \qquad \alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta \in \mathbf{D}_{\cot}$$

et

$$\cot(\alpha-\beta) = -\frac{1+\cot\alpha\cdot\cot\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}, \qquad \alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta \in \mathbf{D}_{\cot}.$$

On peut procéder de façon tout à fait analogue avec cotangente. - Cotangente qui est le quotient de cosinus par sinus - Nous n'allons pas refaire ces calculs ici, les résultats, les voici. On retrouve ici ces contraintes : alpha, beta et la somme doivent être dans le domaine de définition de cotangente, cette fois-ci, et alors, pour cotangente d'alpha + beta, j'obtiens une formule. Regardez bien la structure de cette formule. En quelque sorte, il y a numérateur et dénominateur qui sont renversés par rapport à la formule que j'avais pour tangente, et j'ai mis ici un signe moins. Donc, il faut ajouter un signe moins si on veut préserver cette symétrie. Pour cotangente alpha moins beta, on ne rend pas simplement le beta dans la formule ici par moins beta, on utilise le fait que cotangente est impaire, donc on obtient ici un +, on obtient un moins ici, le moins dans la fraction, en revanche, on le conserve.

Notes

Summary

13m 20s

Théorème d'addition

Proposition

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta} \qquad (\alpha, \beta, \alpha \pm \beta \in \mathbf{D}_{\tan})$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = -\frac{1 \mp \cot\alpha \cdot \cot\beta}{\cot\alpha \pm \cot\beta} \qquad (\alpha, \beta, \alpha \pm \beta \in \mathbf{D}_{\cot}).$$

Formulons, cette fois-ci, l'ensemble des propriétés que l'on connaît sous le terme de théorème d'addition. On a une formule pour le cosinus, une pour le sinus, une pour tangente et une pour cotangente. Donc, pour le cosinus... L'écriture de ces formules est la suivante : on va condenser l'écriture, la formule que nous avons développée pour alpha + beta et alpha moins beta, on va l'écrire sur une seule ligne mais il faut donc choisir toujours ou bien les deux fois le signe supérieur, ou ici deux fois le signe inférieur. Donc si j'ai alpha moins beta ici, j'aurai un + ici. J'ai fait la même chose pour le sinus, ce sont les formules que nous avions précédemment, donc pour le cosinus, c'est cos cos moins sin sin, si c'est le signe + pour le sinus, si c'est le signe + c'est sin cos + cos sin, pour tangente avec le signe + c'est la somme des tangentes divisée par 1 moins le produit. Et pour cotangente, vous avez cette formule, en quelque sorte, symétrique par rapport à tangente, si vous mettez ici un signe moins devant la fraction. Les contraintes sur les angles alpha beta, vous les voyez ici sur la droite. Pour les 2 premières formules, il n'y a pas de contrainte, alpha et beta peuvent être des nombres réels quelconques. Pour les 2 dernières formules, vous retrouvez les contraintes que nous avons développé.

Notes

Summary

14m 17s

Exemple 1

Exemple

Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Nous allons appliquer à présent ces formules, il y en avait quand même pas mal de ces formules, on va les appliquer à un premier exemple, on va essayer de calculer la valeur exacte du sinus de 5 pi douzièmes.

Notes

Summary

15m 36s

Exemple 1 : solution

On a $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

Donc

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{6}$$

Ecrivons ce que nous avons. Nous voulons calculer le sinus de 5 pi douzième. On a 5 pi douzièmes. C'est peut-être un peu plus facile si on exprime les 5 pi douzièmes en degrés. 5 pi douzièmes en fait, ce sont 75 degrés. Pour les 75 degrés, je peux les écrire comme 30 et 45 degrés, deux angles qui sont remarquables. On peut effectivement essayer, je prends cet angle de 45 degrés, j'ajoute l'angle de 30 degrés... Effectivement, si on mettait ici au même dénominateur, vous allez obtenir des douzièmes et vous allez avoir 3 pi + 2 pi qui sont égaux à 5 pi. Donc, j'ai un théorème d'addition que je vais pouvoir utiliser si je veux calculer le sinus de 5 pi douzièmes. Je peux remplacer cela par le sinus de pi quart + pi sixième. Appliquons la formule pour le sinus, je vous rappelle que pour le sinus d'alpha + beta, la formule donne sin cos + cos sin, donc j'écris égal. J'ai le sinus du premier angle qui est à multiplier par le cosinus du second angle, pi sixième, j'ai un + et maintenant j'ai cos sin, donc j'ai le cosinus du premier angle qui multiplie le sinus du second. Nous sommes en présence d'angles remarquables, pi quart et pi sixième, donc je connais, par exemple le sinus de pi quart, c'est cette valeur, elle vaut racine 2 demis.

Notes

Summary

15m 52s

Exemple 1 : solution

On a $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

Donc

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{=\sqrt{2}/2} \cdot \underbrace{\cos\frac{\pi}{6}}_{=\sqrt{3}/2} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{=\sqrt{2}/2} \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{=1/2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

Pour le cosinus de pi quart, je sais que j'ai également racine de 2 demis. Pour pi sixième, qu'est-ce que je sais ? Je connais son sinus : son sinus vaut 1 demi. Quant au cosinus, il vaut racine de 3 demis. Il suffit de remplacer maintenant ces valeurs. Je m'aperçois, cela dit en passant, je vais le marquer ici en couleur, je m'aperçois que j'ai ici un racine de 2 demis, je peux donc peut-être mettre en évidence ce racine de 2 demis et ce qu'il va rester sur le premier terme, il me reste un racine de 3 demis et sur le deuxième terme il me reste 1 demi. Si je regarde bien, là j'ai un même dénominateur 2 donc je peux mettre ça facilement au même dénominateur 2. J'obtiendrai donc en tout un dénominateur de 4, je laisse ce racine de 2 et il va me rester une racine de 3 + 1. Voilà. Et ça, c'est la valeur exacte du sinus de 75 degrés ou de 5 pi douzièmes.

Notes

Summary

17m 36s

Exemple 2

Exemple

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Considérons un deuxième exemple. Nous voulons calculer la valeur exacte du cosinus de pi huitième.

Notes

Summary

18m 54s

Exemple 2 : solution

Remarquons que

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{8}$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$$

Remarquons que pour le cosinus... J'aimerais pi huitième. Si je pars avec le double, c'est-à-dire pi quart, ça, c'est un angle remarquable. Cela signifie que je peux dire que les pi quarts, c'est 1 pi huitième + pi huitième. Donc, si le départ est quelque part... si on se renversait, je connais cosinus pi quart, c'est racine 2 demi et je remplace ce pi quart par pi huitième + pi huitième et c'est à ce moment-là que j'utilise un théorème d'addition. Donc je vais pouvoir procéder comme suit : J'ai un cosinus d'alpha + beta, donc j'obtiens cos cos moins sin sin. Il faut faire un peu attention, j'ai le cosinus du premier angle, c'est pi huitième fois le cosinus du deuxième angle. Ensuite, j'ai un moins, j'ai le sinus du premier angle qui multiplie le sinus du deuxième angle. Donc, le premier angle va là et le deuxième angle va là. Par exemple, pour le premier produit, et de façon similaire pour le deuxième. On peut écrire donc qu'on obtient le cosinus carré de pi huitième moins le sinus au carré de pi huitième. Quel est notre objectif ? Nous voulons en fait calculer le cosinus de pi huitième. Alors le cosinus de pi huitième, je le vois apparaître ici, bon il est au carré mais là j'ai une une grandeur que j'aimerais, je pense, déterminer.

Notes

Summary

19m 03s

Exemple 2 : solution

Remarquons que

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{8}$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos^2\frac{\pi}{8} - \left[1 - \cos^2\frac{\pi}{8}\right] = 2\cdot\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$$

$$2\cdot\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$$

Le cosinus pi quart, je connais. En revanche, j'ai ici un sinus carré encore de pi huitième qui m'embête un peu plus, mais en fait, je peux certainement remplacer ce sinus au carré par 1 moins cosinus carré. Alors, faisons-le et remplaçons les éléments connus. Le cosinus de pi quart, je peux dire que c'est racine 2 demis, cela va être la même chose que le cosinus carré de pi huitième. C'est la grandeur recherchée au carré. J'ai un signe moins et le sinus, je préfère l'écrire comme un 1 moins cos carré, donc le sinus carré de pi huitième, c'est 1 moins cos carré de pi huitième. Donc réapparaît ici une deuxième fois ce terme recherché au carré. Si j'additionne ces deux termes, il va me rester en tout 2 fois le cosinus au carré de pi huitième moins 1. On peut isoler cette grandeur 2 fois cos carré pi huitième, ce que nous allons faire, 2 fois le cosinus au carré de pi huitième, c'est ce terme. Il est égal à la racine de 2 divisée par 2 et le moins 1, s'il passe de l'autre côté devient + 1, c'est-à-dire que si je mets au même dénominateur 2, j'ai une racine de 2 + 2 et finalement, je peux encore diviser cette relation par 2 et j'obtiens 1 cosinus au carré de pi huitième est égal à la racine de 2 + 2 divisé par 4.

Notes

Summary

20m 49s

Exemple 2 : solution (suite et fin)

Nous savons que $\cos\frac{\pi}{8} > 0$

↑ dans le 1er quadrant !

Donc $\cos\frac{\pi}{8} = +\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Remarque : $\cos^2\frac{7\pi}{8}$

Alors on peut essayer de trouver maintenant le cosinus de pi huitième, je connais son carré. Une remarque s'impose : La remarque que nous faisons va nous aider à déterminer le cosinus de pi huitième à partir du carré du cosinus de pi huitième. Si je connais un carré d'un nombre, je connais ce nombre uniquement au signe près mais pour le cosinus, la valeur recherchée cosinus de pi huitième, je sais que ce cosinus doit être positif. Pourquoi ? Simplement parce que le pi huitième est dans le premier quadrant. Sur le premier quadrant, je sais que le cosinus est positif. Je connais le carré de cosinus pi huitième, je peux donc en déduire que le cosinus de pi huitième est égal... Ici, je fais délibérément le choix du + devant la racine du résultat obtenu précédemment, qui était un 2 + racine de 2 divisé par 4 et je peux écrire ce résultat comme une racine qui contient la somme 2 + racine de 2 et je tire la racine du 4 pour obtenir 2. Voilà le résultat. Faisons quand même une remarque. Si je regarde le cosinus de 7 pi huitième, Alors, le cosinus de 7 pi huitième, c'est pi de plus que pi huitième, donc je retrouve le même cosinus mais avec un signe différent.

Notes

Summary

22m 27s

Exemple 2 : solution (suite et fin)

Nous savons que $\cos\frac{\pi}{8} > 0$
↑ dans le 1er quadrant !

Donc $\cos\frac{\pi}{8} = +\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Remarque : $\cos^2\frac{7\pi}{8} = \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\cos\frac{7\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
↑ dans le deuxième quadrant !

Mais si j'élève au carré, cela signifie que là, des calculs similaires m'auraient amené à la même réponse pour le cosinus carré, donc j'aurais également obtenu 2 + racine de 2 divisé par 4. Si, dans ce cas-là, je décide de calculer le cosinus de 7 pi huitième, là, cette fois-ci, je dois faire le raisonnement suivant : Les 7 pi huitième, cette fois-ci, sont dans le deuxième cadran. Si je suis dans le deuxième cadran. la réponse doit être négative. Donc, je vais prendre moins la racine du résultat précédemment obtenu pour le carré de ce nombre et j'obtiens donc moins au numérateur, la racine de la somme 2 + racine de 2 et au dénominateur 2. Donc j'obtiens le même résultat que précédemment mais au signe près. Là, on voit à quel point il faut être prudent, à quel point il faut avoir du doigté si on passe de pi une équation du type cosinus carré un nombre connu au cosinus de la valeur correspondante.

Notes

Summary

24m 14s

Sinus de l'angle double

En posant $\beta = \alpha$ dans le théorème d'addition, on obtient l'expression des fonctions trigonométriques de l'angle 2α, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Voici donc l'expression du sinus de l'angle double :

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= \sin(\alpha + \alpha) \\ &= \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ &= 2\ \sin\alpha \cdot \cos\alpha. \end{aligned}$$

Nous avons parlé jusqu'à présent du théorème d'addition, c'est-à-dire du sinus, cosinus, tangente ou cotangente d'une somme ou d'une différence d'angles alpha + beta ou alpha moins beta. On obtient des relations tout à fait intéressantes si on remplace dans ces formules, l'angle beta par alpha, c'est-à-dire qu'alors, par exemple, alpha + beta devient simplement 2 fois alpha. Faisons-le une fois pour le sinus. Si je dois calculer le sinus de 2 alpha, c'est-à-dire, je vais dire que c'est simplement le sinus de alpha + alpha et j'applique ici le théorème d'addition, c'est-à-dire pour le sinus, j'obtiens sin cos + cos sin, donc j'obtiens sinus alpha cos alpha + cos alpha sin alpha. Je m'aperçois tout de suite que j'ai deux fois le même terme donc j'obtiens 2 fois sin alpha fois cos alpha.

Notes

Summary

25m 28s

Cosinus de l'angle double

De façon analogue, on obtient l'expression du cosinus de l'angle double :

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,.$$

Expression que l'on peut écrire en fonction de $\cos\alpha$ uniquement :

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \left[1 - \cos^2\alpha\right] = 2\cos^2(\alpha) - 1\,,$$

ou en fonction de $\sin\alpha$ uniquement :

$$\cos(2\alpha) = \left[1 - \sin^2\alpha\right] - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\,.$$

La même chose pour le cosinus, le cosinus de 2 alpha, je dis simplement que le 2 alpha, c'est alpha + alpha, j'applique le théorème d'addition pour le cosinus, ça c'est cos cos moins sin sin, donc j'ai cos alpha cos alpha moins sin alpha sin alpha, j'obtiens donc la différence cos carré moins sin carré. Notons en passant que cos sinus carré d'alpha + sinus carré d'alpha aurait donné 1. Ici, j'ai un signe moins et si j'ai un signe moins, j'obtiens le cosinus de 2 alpha. On peut ici formuler ce résultat sous des formes différentes et là il importe de retenir toutes les formes possibles pour ce cosinus de 2 alpha, parce que tantôt l'une tantôt l'autre est plus pratique, mais elles découlent l'une de l'autre assez facilement. On peut par exemple exprimer ce sinus carré par 1 moins cos carré. Faisons-le ! J'ai ce cosinus de 2 alpha, j'ai ce cosinus carré alpha moins... et je remplace le sinus carré par 1 moins cos carré. Je m'aperçois qu'en tout j'ai deux cos carré de alpha moins 1. Je peux aussi aller dans l'autre sens, c'est--à-dire je conserve le sinus carré et je remplace le cos carré par son sinus. Le premier terme ici, le cos carré alpha, est remplacé par 1 moins sinus carré alpha Le deuxième terme, je le laisse. En tout, je vais obtenir 1 moins 2 fois le sinus carré d'alpha.

Notes

Summary

26m 14s

Cotangente de l'angle double

D'une façon analogue, on établit l'expression de la cotangente de l'angle double :

$$\cot(2\alpha) = -\frac{1 - \cot\alpha \cdot \cot\alpha}{\cot\alpha + \cot\alpha} = -\frac{1 - \cot^2\alpha}{2\cot\alpha} = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot\alpha},$$

pour tout α réel tel que $\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}$ et $2\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}$,

c'est-à-dire si et seulement si $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pour tangente, le même jeu peut être fait donc si j'ai tangente de 2 alpha j'écris ces 2 alpha comme alpha + alpha, j'applique le théorème, donc tangente + tangente divisé par 1 moins tangente fois tangente, je condense les deux termes, c'est deux fois le même, c'est deux fois tangente alpha, ici le produit est le produit de deux fois le même terme, donc c'est 1 moins tangente carré. Il suffit de prendre maintenant les domaines de validité que nous avions. Nous savons qu'il faut qu'alpha et beta soient dans le domaine de définition de tangente, ainsi que la somme, donc ici, vu qu'alpha est égal à beta, il reste uniquement que alpha doit être dans le domaine de définition de tangente, et ce qui était la somme, c'est 2 fois alpha, également. Donc il faut uniquement imposer la contrainte qu'alpha est différent de pi demi modulo pi et différent de pi quart modulo pi demi, cette fois-ci. Quant au dénominateur, il ne sera pas nul, ça c'est le raisonnement que nous avions fait précédemment pour le théorème d'addition de tangente. D'une façon tout à fait similaire, vous pouvez refaire ces calculs si vous le désirez de façon plus détaillée.

Notes

Summary

27m 35s

Cotangente de l'angle double

D'une façon analogue, on établit l'expression de la cotangente de l'angle double :

$$\cot(2\alpha) = -\frac{1 - \cot\alpha \cdot \cot\alpha}{\cot\alpha + \cot\alpha} = -\frac{1 - \cot^2\alpha}{2\cot\alpha} = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot\alpha},$$

pour tout α réel tel que $\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}$ et $2\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}$,

c'est-à-dire si et seulement si $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pour cotangente 2 alpha, je remplace simplement le 2 alpha par alpha + alpha, j'ai ici les formules avec ce signe moins que je n'oublie pas, avec cette symétrie par rapport à tangente J'obtiens ici cette formule. Souvent, on préfère supprimer ce moins, le prix est que simplement on perd un peu la symétrie dont j'ai parlé précédemment par rapport à la formule pour tangente 2 alpha, mais on a cotangente carré moins 1 sur 2 fois cotangente alpha. De nouveau, il faut que les angles alpha et 2 alpha soient dans le domaine de définition de cotangente et vous pouvez réfléchir que cela revient à dire que l'angle alpha est différent de k fois pi demi, k dans Z.

Notes

Summary

28m 39s

Formules de dupplication (version 1)

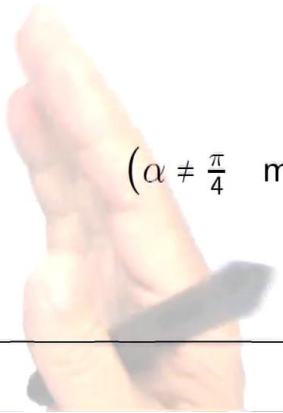
Proposition

$$\sin(2\alpha) = 2\ \sin\alpha \cdot \cos\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \left(\alpha \neq \tfrac{\pi}{4} \mod \tfrac{\pi}{2},\ \alpha \neq \tfrac{\pi}{2} \mod \pi\right)$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \qquad \left(\alpha \neq 0 \mod \tfrac{\pi}{2}\right).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Condensons tous ces résultats. J'ai ici une formule pour le sinus de 2 alpha, c'est 2 fois sinus alpha cos alpha, Encore une fois, il faut retenir ces formules, il faut vraiment les mémoriser. Le cosinus de 2 alpha, j'ai trois formules différentes : j'ai cos carré moins sin carré et j'obtiens deux autres formules pour ce cosinus de 2 alpha, si je remplace le sinus carré par 1 moins cos carré et respectivement, le cos sinus carré par 1 moins sinus carré Voici ces deux formules. Pour tangente 2 alpha, nous avons obtenu la formule 2 fois tangente alpha divisé par 1 moins tangente carré et ici vous avez le domaine de validité que nous avons établi pour cotangente de 2 alpha. Ici, j'ai pris l'écriture sans le signe moins devant la barre de fraction. Ici, ce sont les formules de duplication, des formules pour les angles doubles, je peux exprimer le sinus de 2 alpha à l'aide de ma connaissance du sinus et du cosinus d'alpha. Je dis que ce sont des formules en version 1. C'est qu'en fait, on peut réécrire ces formules d'une façon assez simple, on va simplement remplacer le 2 alpha par alpha et ici les alpha par la moitié d'alpha. On réécrit exactement ces formules, simplement avec un changement de notation et alors on obtient une version 2.

Notes

Summary

29m 19s

Formules de dupplication (version 2)

Proposition

$$\sin(\alpha) = 2\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (\alpha \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} \mod \pi,\ \alpha \neq \pi \mod 2\pi\right)$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1}{2\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad (\alpha \neq 0 \mod \pi).$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

La voici. On obtient, pour le sinus d'alpha, que c'est 2 fois le sinus d'alpha demi et le cosinus d'alpha demi. J'ai simplement remplacé 2 alpha par alpha et alpha par alpha demi. Et vous pouvez le faire pour toutes les formules de duplication en adaptant les domaines de validité. Encore une fois, il faut mémoriser ces formules, l'une peut s'obtenir... Une, la version 2 par exemple, peut s'obtenir depuis la version 1 assez facilement. On peut, certes, ne retenir qu'une seule version, mais il faut savoir que l'on peut écrire sous 2 versions différentes ce résultat.

Notes

Summary

30m 43s

Exemple 3

Exemple

Déterminer une formule pour $\cos(3\alpha)$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Appliquons ces formules pour des angles doubles, ces formules de duplication. On va les appliquer pour calculer le cosinus de 3 alpha. Donc, au lieu de doubler un angle, on va le multiplier par 3.

Notes

Summary

31m 22s

Exemple 3 : solution

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha$$

$$= \left[2\cos^2\alpha - 1\right] \cdot \cos\alpha -$$

Le cosinus de 3 alpha. Qu'est-ce que je peux dire ? On va dire que 3 alpha, c'est la somme de 2 alpha et d'alpha. J'écris ça sous la forme d'une somme de 2 angles. Le premier angle est 2 alpha, le deuxième est alpha. Et j'utilise le théorème d'addition pour le cosinus, donc je vais obtenir cos cos moins sin sin ici. Donc j'obtiens le cosinus du premier angle qui est 2 alpha qui multiplie le cosinus du deuxième angle qui est alpha, j'ai un moins, j'ai le sinus du premier angle qui multiplie le sinus du deuxième angle. On peut évidemment faire mieux encore parce qu'ici, je découvre un cosinus de 2 alpha, donc un angle double, alors je peux écrire ce cosinus de 2 alpha comme cos carré d'alpha moins sin carré, il y a d'autres variantes possibles, je vais utiliser la variante 2 fois cos carré moins 1. Donc, je vais obtenir... égal, donc là je vais prendre 2 fois cosinus carré d'alpha moins 1 qui multiplie le cos alpha. Donc, ça, c'était pour le premier terme. J'ai le signe moins, ensuite ici, j'ai un sinus de 2 alpha que je découvre. Là, je peux aussi utiliser une formule de duplication. Qu'est-ce que j'obtiens ? J'obtiens 2 fois le sinus d'alpha fois le cosinus d'alpha qui multiplie sinus alpha.

Notes

Summary

31m 38s

Exemple 3 : solution

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha$$

$$= \left[2\cos^2\alpha - 1\right] \cdot \cos\alpha - \left[2 \sin\alpha \cos\alpha\right] \cdot \sin\alpha$$

$$= \cos\alpha \left[2\cos^2\alpha - 1 - 2\underbrace{\sin^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha}\right]$$

On va effectuer les produits. Je m'aperçois que j'ai ici un cosinus alpha que je retrouve ici également. Je vais pouvoir le mettre en évidence. Je mets en évidence donc un cosinus alpha, je pourrais aller un peu plus vite. Qu'est-ce qu'il me reste ? Dans le premier terme, il me reste le crochet lui-même, c'est-à-dire que j'ai 2 fois le cosinus carré alpha moins 1 et sur le deuxième terme qui est 2 fois sinus alpha cos alpha sin alpha, il me reste simplement 2 fois le sinus carré d'alpha. A strictement parler, on pourrait s'arrêter ici, on voulait simplement écrire une formule, une relation pour cosinus de 3 alpha. On peut faire un peu mieux quand même ici, j'ai une réponse qui fait intervenir le cosinus alpha, son carré, ça c'est très bien, mais également le sinus carré d'alpha. On pourrait donc dire, au fond, ce sinus carré d'alpha, on pourrait essayer de l'exprimer également avec un cosinus carré d'alpha. Alors, ça c'est facile à faire. Je pourrais remplacer ce sinus carré par 1 moins cos carré. Si je fais le tout, j'ai ce cosinus alpha qui est en évidence.

Notes

Summary

33m 27s

Exemple 3 : solution

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha$$

$$= [2\cos^2\alpha - 1] \cdot \cos\alpha - [2 \sin\alpha \cos\alpha] \cdot \sin\alpha$$

$$= \cos\alpha \left[2\cos^2\alpha - 1 - 2 \underbrace{\sin^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha} \right]$$

$$= \cos\alpha \left[4\cos^2\alpha - 3 \right]$$

$$= \underline{\underline{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}}$$

Si je regarde bien, j'ai ici un 2 fois cos carré et je vais avoir ici moins moins qui donne un plus et également 2 fois cos carré, donc je vais obtenir en tout 4 fois cosinus carré de alpha et je vais obtenir ici un moins 1 et moins 2 fois 1, donc j'obtiens en tout un moins 3 et là j'ai une expression qui contient uniquement un cosinus. Si vous préférez, vous pouvez écrire ce résultat sous la forme que c'est 4 fois le cosinus d'alpha au cube moins 3 fois le cosinus alpha. C'est peut-être la forme que je vais choisir dans ma réponse finale.

Notes

Summary

34m 47s

Théorème d'addition

Ce que nous avons appris :

- le théorème d'addition ;
- les formules de dupplication.

Prochaine étape :

- les formules de bissection ;
- les transformations "somme - produit" ;
- les transformations "produit - somme".

Faisons le bilan ! Qu'est-ce que nous avons appris dans la séance d'aujourd'hui ? Nous avons fait connaissance du théorème d'addition, une formule pour le sinus, cosinus, tangente et cotangente, toujours pour un angle alpha + beta respectivement alpha moins beta. La deuxième variante avec des signes moins, on peut l'obtenir depuis la variante avec les plus simplement en utilisant la parité du sinus, du cosinus, tangente et cotangente. Ensuite, nous avons développé les formules de duplication en prenant simplement le théorème d'addition pour alpha + beta et en remplaçant le beta par alpha, donc on obtenait des formules pour le sinus, cosinus, tangente et cotangente de 2 alpha. Cela nous a donné ce que nous avons appelé la première variante des formules de duplication. On peut écrire ces formules de duplication dans une deuxième variante en remplaçant le 2 alpha par alpha, et donc alpha par alpha demi. Dans la prochaine étape, nous allons parler des formules de bissection, donc nous allons nous intéresser, par exemple, au sinus de alpha demi à partir du sinus ou du cosinus d'alpha.

Notes

Summary

35m 34s

Théorème d'addition

Ce que nous avons appris :

- le théorème d'addition ;
- les formules de dupplication.

Prochaine étape :

- les formules de bissection ;
- les transformations "somme - produit" ;
- les transformations "produit - somme".

Nous allons parler de comment transformer des sommes faites de sinus et de cosinus en produits, ça c'est toujours une opération intéressante parce qu'un produit est plus riche qu'une somme, mais on peut également transformer dans le sens inverse, c'est-à-dire transformer des produits en des sommes. Là aussi ce sont des formules qui sont tout à fait utiles. Voilà, ce sera tout pour aujourd'hui. Je vous remercie et à la prochaine fois.

Notes

Summary

36m 43s