ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Formules trigonométriques

4.2 Théorème d'addition, formules pour angles doubles

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

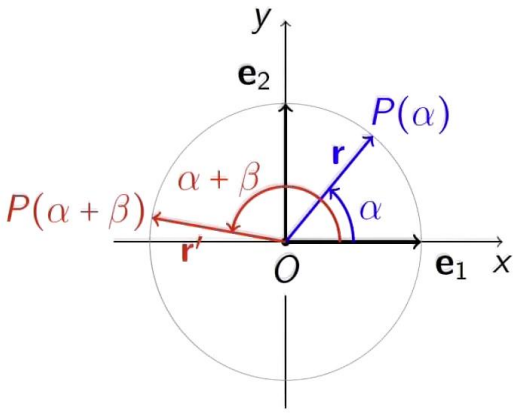
EPFL

Composantes du vecteur lieu $\mathbf{r}'$

En faisant tourner ce vecteur $\mathbf{r}$ d'un angle β autour de l'origine O, on obtient le vecteur lieu $\mathbf{r}'$ qui correspond au point $P(\alpha+\beta)$ sur le cercle trigonométrique.

Ses composantes sont données par

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}.$$



Guten Tag, wie beim letzten Mal versprochen, stelle ich Ihnen heute trigonometrische Formeln vor. Ich stelle Ihnen Formeln vor, die man unter dem Begriff Additionslehrsatz zusammenfasst. Es sind vier Formeln, und ich stelle Ihnen ebenfalls Formeln für doppelte Winkel vor. Auch da gibt es vier Formeln, aber jede in zwei Versionen. Das macht für heute eine ganze Menge Formeln. Schauen wir uns zuerst einen Einheitsvektor an. Um ihn festzulegen, betrachten wir auf dem trigonometrischen Kreis hier die Achse der x, y, der trigonometrische Kreis, einen Punkt P von Alpha, der dem Winkel Alpha entspricht. Dieser Punkt von Alpha, den kann ich wiederholen, mit einem Ortsvektor, den ich r nenne. Und ich weiß, wie ich die Komponenten dieses Vektors finde. Sie sind gegeben durch Kosinus Alpha und Sinus Alpha. Wie schon vorangehend, werden wir diesen Vektor r mit einem Winkel Beta um den Ursprung herum drehen. Ich nehme diesen Vektor r und ich drehe ihn. Das bedeutet, dass der Punkt P Alpha jetzt durch einen Punkt P ersetzt ist, der dem Winkel Alpha + Beta entspricht. Der Ortsvektor nenne ich wie vorangehend r Strich. Da, das sage ich noch einmal, kann ich die Komponenten von r Strich finden. Es ist einfach Kosinus vom Winkel Alpha + Beta, der Winkel in rot, und Sinus von ebendiesem Winkel Alpha + Beta.

Notes

Summary

0m 04s

Rotation du vecteur r

Le vecteur lieu $\mathbf{r}'$ est obtenu par rotation du vecteur $\mathbf{r}$ d'un angle β.

En appliquant la proposition du paragraphe précédent, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \end{bmatrix}.$$

Wenden wir jetzt den Satz an, den wir während der letzten Vorstellung entwickelt haben. Das bedeutet, dass r Strich, der hier ist, Sinus von Alpha + Beta ist, Sinus von Alpha + Beta ist gegeben durch die Rotationsmatrix mal Vektor r, Kosinus Alpha, Sinus Alpha. Ich erinnere Sie daran, dass in der ersten Spalte der Rotationsmatrix die Komponenten von e1 Strich waren und in der zweiten Spalte finden wir die Komponenten vom Vektor e2 Strich. Lassen Sie uns diese Produkte erstellen: Zeile mal Spalte. Ich erhalte Kosinus Beta Kosinus Alpha, der hier ist, minus Sinus Beta Sinus Alpha, der da ist, also ergibt diese erste Zeile: Kosinus Alpha + Kosinus Beta minus Sinus Alpha mal Sinus Beta. Für die zweite Komponente, das Ergebnis, multipliziere ich die zweite Zeile mal diese Spalte, also ergibt das Sinus Beta mal Kosinus Alpha und Kosinus Beta mal Sinus Alpha. Man findet das heir in der zweiten Zeile. Ich finde also eine Relation wieder, die mir einen Vektor gibt, der gleich einem Vektor ist. Die Gleichheit der Vektoren ist nur möglich, wenn die Komponenten gleich sind, das bedeutet, dass ich jetzt Relationen lesen kann, ich kann zum Beispiel sagen, dass Kosinus von Alpha + Beta gleich sein muss wie Kosinus Alpha Kosinus Beta minus Sinus Alpha Sinus Beta.

Notes

Summary

1m 33s

Rotation du vecteur r

Le vecteur lieu $\mathbf{r}'$ est obtenu par rotation du vecteur $\mathbf{r}$ d'un angle β.

En appliquant la proposition du paragraphe précédent, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \end{bmatrix}.$$

Das werde ich mir merken: Kosinus von Alpha + Beta ist Kosinus von Alpha mal Kosinus Beta minus Sinus Alpha Sinus Beta. Diese Argumentation ist gültig für alle Winkel Alpha und Beta. Wenn ich mir hier die zweite Komponente anschaue, werde ich Sinus von Alpha + Beta haben, was gleich Sinus Alpha Kosinus Beta + Kosinus Alpha Sinus Beta ist.

Notes

Summary

2m 54s

Formules d'addition

On en déduit les expressions de $\cos(\alpha+\beta)$ et de $\sin(\alpha+\beta)$ en fonction du cosinus et du sinus des angles α et β :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta,\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta, \qquad (\alpha,\,\beta\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

Das habe ich hier geschrieben. Sinus, dort, diesmal haben wir Sinus Kosinus und Kosinus Sinus. Vorher hatten wir Kosinus Kosinus minus Sinus Sinus. Diese Formeln muss man sich merken, man wird sie sehr häufig verwenden. Ich weiß, es gibt immer verschiedene Vorzeichen, hier zum Beispiel ein Minus, ein Plus, das muss man sich merken, ich kabe keine andere Lösung für dieses Problem. Innerhalb dieser Relationen kann man noch ein wenig spielen, man kann zum Beispiel sagen, dass ich hier Beta ersetze durch ein minus Beta, also erhalte ich Alpha + minus Beta, dass heißt Alpha minus Beta. Das bedeutet an der Stelle hier, wo ich Beta habe, muss ich minus Beta schreiben. Ich mache das gleiche in der zweiten Zeile.

Notes

Summary

3m 16s

Formules pour la différence

En remplaçant β par $-\beta$ dans les relations précédentes et en utilisant la parité des fonctions sinus et cosinus, on obtient des relations pour la différence d'angles :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\left[\alpha+(-\beta)\right] = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\left[\alpha+(-\beta)\right] = \sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)\\ &= \sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.\end{aligned}$$

Was erhalte ich? Ich erhalte Kosinus von Alpha minus Beta, indem ich sage, dass dieses Minus einfach ein plus minus Beta ist. Ich schreibe die erhaltene Formel, aber ich ersetze die Beta durch minus Beta. Ich erinnere Sie daran, dass Kosinus eine gerade Funktion ist, das bedeutet, dass Kosinus von diesem minus Beta eigentlich einfach Kosinus Beta ist. Dagegen ist Sinus ungerade, das bedeutet, dass Sinus von minus Beta minus Sinus Beta ergibt, also kann ich hier Sinus Beta schreiben, aber ich habe einen Vorzeichenwechsel. Also diesmal habe ich für den Kosinus von der Differenz Kosinus Kosinus + Sinus Sinus, und nicht minus. Wenn ich das gleiche für Sinus mache, habe ich Sinus von Alpha minus Beta. Ich werde sagen, dass es Alpha + minus Beta ist. In der Formel für Sinus, die wir hatten, ersetze ich Beta durch minus Beta, ich hatte also Sinus Kosinus + Cosinus Sinus. Ich verwende erneut die Paritäten von Kosinus, von Sinus. Kosinus minus Beta wird Kosinus Beta, Sinus minus Beta wird minus Sinus Beta. Diesmal erhalte ich Sinus Alpha Cosinus Beta minus Kosinus Alpha Sinus Beta.

Notes

Summary

3m 58s

Théorème d'addition

Proposition

Pour tout angle $\alpha \in \mathbb{R}$ *et pour tout angle* $\beta \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta, \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta. \end{aligned}$$

Merken wir uns die Gesamtheit dieser Formeln, die man Additionsformeln nenne in einem Satz, der den Namen Additionslehrsatz trägt. Für alle Winkel Alpha und Beta, muss ich keine besondere Zwänge einfügen, die Argumentationen waren für alle Winkel Alpha und Beta gültig. Ich habe eine Formel für Kosinus Alpha + Beta: Sie ist vom Typ Kosinus Kosinus minus Sinus Sinus, und für Sinus von Alpha + Beta ist sie von der Struktur Sinus Kosinus + Kosinus Sinus. Wenn ich das Vorzeichen + in Alpha + Beta durch ein Minus ersetze, erhalte ich ähnliche Formeln. ich kann diese zwei letzten Formeln von den vorangehenden ableiten, indem ich die Parität der Funktionen Kosinus und Sinus nutze für das Argument hier Beta und ich erhalte diesmal Kosinus Kosinus + Sinus Sinus und Sinus Kosinus minus Kosinus Sinus. Wir haben Ergebnisse für Sinus und Kosinus.

Notes

Summary

5m 02s

Tangente de la somme

On en déduit l'expression de $\tan(\alpha+\beta)$ en fonction de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Schauen wir einmal, ob wir ein Ergebnis für Tangens, zum Beispiel, entwickeln können. Wir würden gern Tangens von Alpha + Beta ausdrücken. Nichts einfacher als das, denn Tangens von einem Winkel drückt sich mithilfe von Sinus und Kosinus aus. Es ist ganz einfach Sinus geteilt durch Kosinus. Wir haben die Formeln für Sinus von Alpha + Beta, wir haben eine Formel für Kosinus von Alpha + Beta, nutzen wir diese Formeln. Fertig. Also habe ich für den Zähler Kosinus + Kosinus Sinus, im Zähler habe ich Kosinus Kosinus minus Sinus Sinus. Man könnte sich mit diesem Resultat in dieser Form zufrieden geben, es gibt, irgendwie, einen kleinen Fehler. Das ist, wenn ich Tangens von Alpha + Beta berechnen möchte, muss ich Sinus und Kosinus von diesen Winkeln kennen. Wir werden versuchen, dieses Resultat mit einem Term zu ersetzen, der nur Tangens von Alpha und Tangens von Beta enthält. Das ist möglich. Um dies zu tun, muss man versuchen, zum Beispiel nicht Sinus Alpha erscheinen zu lassen, sondern Tangens Alpha. Nicht Sinus Beta, sondern Tangens Beta. Das bedeutet, dass mir hier eine Teilung durch Kosinus Alpha fehlt, mir fehlt eine Teilung durch Kosinus Beta.

Notes

Summary

5m 57s

Tangente de la somme

On en déduit l'expression de $\tan(\alpha+\beta)$ en fonction de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\cdot\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

Also los, lassen Sie uns den Zähler und den Nenner durch dieses Produkt, das mir fehlt, teilen, und das Kosinus Alpha Kosinus Beta ist. In rot haben Sie diesen gleichen Faktor, durch den ich sowohl den Zähler als auch den Nenner teile. Um auf die Frage zurückzukommen: Gibt es eine Gefahr, wenn man durch 0 teilt? Wir kommen gleich darauf zurück, aber fahren wir mit den Berechnungen fort. Im Zähler werde ich einfach jedes Element, das in der Summe ist, durch Kosinus Alpha Kosinus Beta teilen und das gleiche mache ich im Nenner. Das erhalte ich als Ergebnis: Also, ich habe hier das erste Element geteilt durch das Element in rot + das zweite Element geteilt durch das Element in rot, etc. Man kann sofort ein paar Dinge vereinfachen, zum Beispiel, wenn ich hier den Nenner anschaue, dieses erste Element, bleibt nur 1. Schauen wir einmal, was alles vereinfacht werden kann, man kann hier auch Kosinus Beta, Kosinus Alpha... vereinfachen. Da, das ist perfekt. Was bleibt mir? Mir bleibt Sinus Alpha auf Kosinus Alpha, Sinus Beta auf Kosinus Beta, 1 minus, das hier ist die 1 von hier, minus und das Element von dahinter, also da habe ich ein Produkt geteilt durch ein Produkt, ich nehme das hier wie einen Bruch mal einen Bruch.

Notes

Summary

7m 12s

Tangente de la somme

On en déduit l'expression de $\tan(\alpha+\beta)$ en fonction de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\cdot\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}.$$

Alle auftretenden Brüche sind jetzt Tangens. Ich erhalte hier Tangens Alpha + Tangens Beta, Geteilt durch 1 minus Tangens Alpha mal Tangens Beta. Wir müssen noch auf das Problem der Gültigkeit unserer Berechnungen zurückkommen. Hier, wenn ich den Startpunkt anschaue, denke ich, dass wir trotzdem eine gültige Formel entwickeln müssen. Alpha + Beta muss einen Sinn ergeben, dass heißt, wir müssen erzwingen, dass Kosinus von Alpha + Beta nicht gleich Null ist, das bedeutet, dass wir erzwingen müssen, dass Alpha + Beta im Definitionsbereich von Tangens ist. Wenn ich mir den Fortgang der Berechnungen anschaue, habe ich hier eine Teilung durch Kosinus Alpha mal Kosinus Beta, also müssen wir gewährleisten, dass weder Kosinus Alpha noch Kosinus Beta nicht gleich Null ist, das ist, als wenn man sagte, dass sowohl Alpha als auch Beta im Definitionsbereich von Tangens sein müssen, da dieser Bereich Kosinus daran hindert, sich aufzulösen. Und offensichtlich habe ich hier Tangens Alpha Beta, also finde ich diese gleiche Bedingung wieder, dass Alpha und Beta im Definitionsbereich von Tangens liegen müssen.

Notes

Summary

8m 27s

Remarque

La relation

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

n'est valable que si

$$\begin{cases}\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\in\mathbf{D}_{\tan}\\ \text{et}\quad \tan\alpha\cdot\tan\beta\neq 1.\end{cases}$$

En d'autres termes,

$$\begin{cases}\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \text{et}\quad \tan\alpha\cdot\tan\beta\neq 1.\end{cases}$$

Or si $\alpha,\ \beta\in\mathbf{D}_{\tan}$, on a

$$\begin{aligned}\alpha+\beta=\tfrac{\pi}{2}+k\,\pi &\Leftrightarrow \alpha=\tfrac{\pi}{2}-\beta+k\,\pi\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha=\tan\left(\tfrac{\pi}{2}-\beta\right)\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha=\cot\beta\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha\cdot\tan\beta=1.\end{aligned}$$

Wenn ich zusammenfasse, dann habe ich eine Relation, die gültig ist, wenn Alpha, Beta im Definitionsbereich von Tangens sind, sowie die Summe von Alpha + Beta. Vielleicht können wir noch etwas übervorsichtig sein, wenn wir sagen, dass auch der Nenner sich nicht auflösen darf. Nehmen wir diese Bedingung an, fügen wir hinzu, dass das Produkt von Tangens Alpha mal Tangens Beta nicht gleich 1 sein soll. Aber wenn Sie sich das noch ein wenig genauer anschauen, werden Sie sagen Alpha Beta im Definitionsbereich von Tangens, das heißt, sie unterscheiden sich um ein halbes Pi + k mal pi, sowie dass Alpha + Beta sich auch unterscheiden um ein halbes pi + k mal pi, und diese zweite Bedingung, die wir vielleicht hinzugefügt haben, um nichts falsch zu machen, vielleicht sind wir da ein wenig zu vorsichtig, in der Tat sind wir ganz bestimmt ein wenig zu vorsichtig, weil Sie sehen, wenn Sie sagen, dass Alpha und Beta im Definitionsbereich von Tangens sind, was passiert, wenn Alpha + Beta gleich ein halb pi + k mal pi wären? Das würde bedeuten, dass Alpha wäre: - sie nehmen Beta von der anderen Seite, ein halb pi minus Beta modulo pi - Das ist, als wenn man sagen würde, dass Tangens Alpha und Tangens von ein halb pi minus Beta das gleiche sind.

Notes

Summary

9m 31s

Remarque

La relation

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

n'est valable que si

$$\begin{cases}\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\in \mathbf{D}_{\tan}\\ \text{et}\quad \tan\alpha\cdot\tan\beta\neq 1.\end{cases}$$

En d'autres termes,

$$\begin{cases}\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \text{et}\quad \tan\alpha\cdot\tan\beta\neq 1.\end{cases}$$

Or si $\alpha,\ \beta\in \mathbf{D}_{\tan}$, on a

$$\begin{aligned}\alpha+\beta=\tfrac{\pi}{2}+k\,\pi &\Leftrightarrow \alpha=\tfrac{\pi}{2}-\beta+k\,\pi\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha=\tan\left(\tfrac{\pi}{2}-\beta\right)\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha=\cot\beta\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha\cdot\tan\beta=1.\end{aligned}$$

En résumé, la relation ci-dessus est valable si et seulement si

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\neq\tfrac{\pi}{2}+k\,\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Da nutzen wir Relationen, die wir vor Kurzem entwickelt haben und wir können dieses Tangens mit Kotangens Beta ausdrücken. Wir nehmen Kotangens Beta auf die andere Seite und erhalten nämlich, dass Tangens Alpha und Tangens Beta gleich 1 sind. Wenn ich also diese erste Bedingung Alpha + Beta im Definitionsbereich von Tangens Alpha verletze, verletze ich gleichzeitig die Tatsache, dass Tangens Alpha und Tangens Beta ungleich 1 ist. Ich kann also sozusagen diese letzte Bedingung löschen. Das einzige, was man sich merken muss, ist, dass Alpha, Beta und die Summe Alpha + Beta im Definitionsbereich von Tangens sind, das heißt, unterschiedlich von ein halb pi modulo pi.

Notes

Summary

10m 48s

Remarque

La relation

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

n'est valable que si

$$\begin{cases}\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta\in\mathbf{D}_{\tan}\\ \text{et}\quad \tan\alpha\cdot\tan\beta\neq -1.\end{cases}$$

En d'autres termes,

$$\begin{cases}\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \text{et}\quad \tan\alpha\cdot\tan\beta\neq -1.\end{cases}$$

Or si $\alpha,\ \beta\in\mathbf{D}_{\tan}$, on a

$$\begin{aligned}\alpha-\beta=\tfrac{\pi}{2}+k\,\pi &\Leftrightarrow \alpha=\tfrac{\pi}{2}+\beta+k\,\pi\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha=\tan\left(\tfrac{\pi}{2}+\beta\right)\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha=-\cot\beta\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha\cdot\tan\beta=-1.\end{aligned}$$

Wir ersetzen wieder Beta durch minus Beta in dieser Relation. Das heißt, dass wir sagen werden, dass ich gern Tangens von Alpha minus Beta berechnen würde, also ersetze ich einfach Beta durch minus Beta in den vorangehenden Formeln. Ich habe Tangens Alpha + Tangens, diesmal minus Beta. Hier habe ich 1 + Tangens Alpha mal Tangens von minus Beta. Erinnern wir uns daran, dass Tangens der Quotient von Sinus und Kosinus ist, einem ungeraden Sinus und einem geraden Kosinus, also ein ungerader Tangens, das heißt, dass Tangens minus Beta minus Tangens Beta ist, beide Male, also ist das Ergebnis diesmal Tangens Alpha minus Tangens Beta und + Tangens Alpha mal Tangens Beta. Man kann sich wiederum die Frage nach der Gültigkeit dieser Relation stellen. Wie im vorhergehenden Fall müssen Alpha, Beta, hier die Differenz im Definitionsbereich sein. Wenn wir sehr, sehr vorsichtig sind, verlangen wir noch, dass das Produkt Tangens Alpha Tangens Beta ungleich minus 1 ist, aber wie auch vorhin werden wir sehen, dass diese letzte Bedingung sich von selbst erfüllt. Sie können die Berechnungen wie vorhin durchführen, wenn Alpha minus Beta nicht im Definitionsbereich von Tangens wäre, also in der Form ein halb pi + k mal pi, man kann erneut darauf schließen, wie vorhin...

Notes

Summary

11m 35s

Remarque

La relation

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

n'est valable que si

$$\begin{cases}\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta\in\mathbf{D}_{\tan}\\ \text{et}\quad \tan\alpha\cdot\tan\beta\neq -1.\end{cases}$$

En d'autres termes,

$$\begin{cases}\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \text{et}\quad \tan\alpha\cdot\tan\beta\neq -1.\end{cases}$$

Or si $\alpha,\ \beta\in\mathbf{D}_{\tan}$, on a

$$\begin{aligned}\alpha-\beta=\tfrac{\pi}{2}+k\,\pi &\Leftrightarrow \alpha=\tfrac{\pi}{2}+\beta+k\,\pi\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha=\tan\left(\tfrac{\pi}{2}+\beta\right)\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha=-\cot\beta\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha\cdot\tan\beta=-1.\end{aligned}$$

En résumé, la relation ci-dessus est valable si et seulement si

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta\neq\tfrac{\pi}{2}+k\,\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

- nehmen Sie Beta auf die andere Seite, Sie erhalten hier Tangens ein halb pi + Beta, was minus Kotangens Beta ist und das bedeutet, dass das Produkt gleich minus 1 wäre. Die einzige Bedingung, die bleibt, ist dass diese Formel für Tangens von Alpha minus Beta gültig ist, wenn Alpha im Definitionsbereich von Tangens ist, Beta ebenso, und Alpha minus Beta ebenso. Das heißt, dass die 3 Winkel sich unterscheiden von ein halb pi + k mal pi mit k in Z.

Notes

Summary

12m 52s

Cotangente de la somme et de la différence

D'une façon analogue on montre les deux relations suivantes :

$$\cot(\alpha+\beta) = -\frac{1-\cot\alpha\cdot\cot\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}, \qquad \alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta \in \mathbf{D}_{\cot}$$

et

$$\cot(\alpha-\beta) = -\frac{1+\cot\alpha\cdot\cot\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}, \qquad \alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta \in \mathbf{D}_{\cot}.$$

Man kann ganz analog mit Kotangens verfahren. - Kotangens ist der Quotient von Kosinus mal Sinus - Wir werden die Berechnungen hier nicht noch einmal machen, die Resultate stehen hier. Wir finden hier diese Zwänge: Alpha, Beta und die Summe müssen diesmal im Definitionsbereich von Kotangens sein, und dann erhalte ich für Kotangens von Alpha + Beta, eine Formel. Schauen Sie sich die Struktur dieser Formel genau an. Irgendwie gibt es einen Zähler und einen Nenner, die umgekehrt sind im Vergleich zu der Formel, die ich für Tangens hatte, und ich habe hier ein Minus-Vorzeichen eingesetzt. Also muss man ein Minus-Vorzeichen hinzufügen, wenn man diese Symmetrie erhalten möchte. Für Kotangens Alpha minus Beta verwandeln wir nicht einfach Beta in der Formel hier in minus Beta, wir nutzen den Umstand, dass Kotangens ungerade ist, also erhalten wir hier ein +, wir erhalten ein Minus hier, das Minus im Bruch jedoch behalten wir.

Notes

Summary

13m 20s

Théorème d'addition

Proposition

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta} \qquad (\alpha, \beta, \alpha \pm \beta \in \mathbf{D}_{\tan})$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = -\frac{1 \mp \cot\alpha \cdot \cot\beta}{\cot\alpha \pm \cot\beta} \qquad (\alpha, \beta, \alpha \pm \beta \in \mathbf{D}_{\cot}).$$

Formulieren wir diesmal alle Eigenschaften, die wir kennen, unter dem Ausdruck des Additionslehrsatzes. Wir haben eine Formel für Kosinus, eine für Sinus, eine für Tangens und eine für Kotangens. Also, für den Kosinus... Die Schreibweise¨ dieser Formeln ist wie folgt: Wir verdichten die Schreibweise, die Formel, die wir bereits entwickelt haben für Alpha + Beta und Alpha minus Beta, werden wir in eine einzige Zeile schreiben, aber wir müssen dann immer entweder zweimal das höhere Vorzeichen wählen oder hier zweimal das niedrigere Vorzeichen. Wenn ich also Alpha minus Beta hier habe, habe ich hier ein +. Ich habe das gleiche für Sinus gemacht, das sind Formeln, die wir vorher hatten, also für Kosinus ist es Kosinus Kosinus minus Sinus Sinus, wenn es das Vorzeichen + ist für Sinus, wenn es das Vorzeichen + ist, ist es Sinus Kosinus + Cosinus Sinus für Tangens mit dem Vorzeichen + ist es die Summe Tangens geteilt durch 1 minus dem Produkt. Und für Kotangens haben Sie diese Formel, die irgendwie symmetrisch ist im Verhältnis zu Tangens, wenn Sie hier ein Vorzeichen Minus einsetzen vor den Bruch. Die Zwänge auf den Winkeln Alpha Beta sehen Sie hier auf der rechten Seite. Für die 2 ersten Formeln gibt es keinen Zwang, Alpha und Beta können irgendwelche reale Zahlen sein. Für die 2 letzten Formel werden Sie die Zwänge sehen, die wir entwickelt haben.

Notes

Summary

14m 17s

Exemple 1

Exemple

Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Nun werden wir diese Formel anwenden, es gab ja einige Formeln, wir werden sie an einem ersten Beispiel anwenden, wir werden versuchen, den exakten Wert von Sinus von 5 pi Zwölftel berechnen.

Notes

Summary

15m 36s

Exemple 1 : solution

On a $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

Donc $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$

$=$

Schreiben wir auf, was wir haben. Wir wollen Sinus von 5 Pi Zwölftel berechnen. Wir haben 5 Pi Zwölftel. Es ist vielleicht etwas einfacherer, wenn wir die 5 Pi Zwölftel in Grad ausdrücken. 5 Pi Zwölftel sind eigentlich 75 Grad. Die 75 Grad kann ich wie 30 und 45 Grad schreiben, zwei bemerkenswerte Winkel. Wir können in der Tat versuchen, ich nehme diesen Winkel von 45 Grad, füge den Winkel von 30 Grad hinzu... Tatsächlich, wenn wir hier in den gleichen Nenner setzten, erhalten Sie Zwölftel und Sie erhalten 3 Pi + 2 Pi, die gleich 5 Pi sind. Also habe ich einen Additionslehrsatz, den ich werde nutzen können, wenn ich Sinus von 5 pi Zwölftel berechnen möchte. Ich kann das ersetzen durch Sinus von Pi Viertel + Pi Sechstel. Wenden wir die Formel für Sinus an, ich erinnere Sie daran, dass für Sinus von Alpha + Beta die Formel Sinus Kosinus + Kosinus Sinus ergibt, also schreibe ich ist gleich. Ich habe Sinus vom ersten Winkel, der mit dem Kosinus vom zweiten Winkel multipliziert werden muss, Pi Sechstel, ich habe ein + und jetzt habe ich Kosinus Sinus, also habe ich Kosinus vom ersten Winkel, der Sinus vom zweiten Winkel multipliziert.

Notes

Summary

15m 52s

Exemple 1 : solution

On a $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

Donc

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{=\sqrt{2}/2} \cdot \underbrace{\cos\frac{\pi}{6}}_{=\sqrt{3}/2} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{=\sqrt{2}/2} \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{=1/2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

Wir haben hier bemerkenswerte Winkel Pi Viertel und Pi Sechstel, also kenne ich zum Beispiel Sinus von Pi Viertel, das ist dieser Wert hier, sie ist Wurzel 2 Halbe wert. Für Kosinus von Pi Viertel weiß ich, dass ich ebenfalls Wurzel von 2 Halben habe. Was weiß ich für Pi Sechstel? Ich kenne dessen Sinus: Sinus ist 1 halb. Was den Kosinus betrifft, der ist Wurzel 3 Halbe wert. Man muss nur jetzt diese Werte ersetzen. Ich stelle fest, dies einmal ganz beiläufig gesagt, ich werde das hier mit Farbe markieren, ich stelle fest, dass ich hier eine Wurzel von 2 Halben habe, ich kann vielleicht sogar diese Wurzel von 2 Halben hervorheben, und was bleibt auf dem Element, mir bleibt Wurzel von 3 Halben und auf dem zweiten Element bleibt 1 Halbes. Wenn ich genau hinschaue, habe ich da den gleichen Nenner 2, also kann ich das einfach in den gleichen Nenner stellen. Ich erhalte insgesamt einen Nenner von 4, ich lasse dieses Wurzel von 2 und behalte Wurzel von 3 + 1. So. Und das, das ist der genaue Wert von Sinus von 75 Grad oder von 5 Pi Zwölftel.

Notes

Summary

17m 26s

Exemple 2

Exemple

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Betrachten wir ein zweites Beispiel. Wir möchten den genauen Wert von Kosinus von Pi Achtel errechnen.

Notes

Summary

18m 54s

Exemple 2 : solution

Remarquons que

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{8}$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$$

Bemerken wir, dass für Kosinus... Ich hätte gern Pi Achtel. Wenn ich mit dem Doppelten starte, das heißt Pi Viertel, dann ist das ein bemerkenswerter Winkel. Das bedeutet, dass ich sagen kann, dass die Pi Viertel 1 Pi Achtel + Pi Achtel sind. Also, wenn der Start irgendwo ist... wenn wir uns kippen würden, ich kenne Kosinus pi Viertel, das ist Wurzel 2 Halbe und ich ersetze dieses Pi Viertel durch Pi Achtel + Pi Achtle und genau in diesem Augenblick benutze ich einen Additionslehrsatz. Also werde ich wie folgt vorgehen: Ich habe Kosinus von Alpha + Beta, also erhalte ich Kosinus Kosinus minus Sinus Sinus. Man muss ein wenig aufpassen, ich habe Kosinus vom ersten Winkel, das ist Pi Achtel mal Kosinus vom zweiten Winkel. Dann habe ich ein Minus, ich habe Sinus vom ersten Winkel, der Sinus vom zweiten Winkel multipliziert. Also geht der erste Winkel dorthin, und der zweite Winkel geht dorthin. Für das erste Produkt zum Beispiel und ähnlich für das zweite. Man kann also schreiben, dass man Kosinus² von Pi Achtel erhält minus Sinus² von Pi Achtel. Welches ist unser Ziel? Wir möchten Kosinus von Pi Achtel berechnen.

Notes

Summary

19m 03s

Exemple 2 : solution

Remarquons que

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{8}$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos^2\frac{\pi}{8} - \left[1 - \cos^2\frac{\pi}{8}\right] = 2\cdot\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$$

$$2\cdot\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$$

Also Kosinus von Pi Achtel sehe ich hier auftauchen, gut, es ist im Quadrat, aber da habe ich eine Größe, die ich, denke ich, gern festlegen würde. Kosinus Pi Viertel kenne ich. Hier jedoch habe ich Sinus² noch von Pi Achtel, das mich ein wenig mehr stört, aber eigentlich kann ich sicherlich Sinus² durch 1 minus Kosinus² ersetzen. Also machen wir das und ersetzen wir die bekannten Elemente. Von Kosinus von Pi Viertel kann ich sagen, dass es Wurzel von 2 Halbe ist, das wird das gleiche wie Kosinus² von Pi Achtel. Das ist die gesuchte Größe im Quadrat. Ich habe ein Minus-Vorzeichen und Sinus, ich ziehe es vor, zu schreiben wie 1 minus Kosinus², also Sinus² von Pi Achtel, das ist 1 minus Kosinus² von Pi Achtel. Es erscheint also hier ein zweites Mal dieses gesuchte Element im Quadrat. Wenn ich diese beiden Elemente addiere, bleibt insgesamt 2 mal Kosinus von Pi Achtel minus 1. Man kann diese Größe 2 mal Kosinus² Pi Achtel isolieren, was wir tun werden, 2 mal Kosinus² von Pi Achtel, das ist dieses Element. Er ist gleich die Wurzel von 2 geteilt durch 2 und wenn minus 1 auf die andere Seite kommt, wird sie +1, das heißt, dass wenn ich in den gleichen Nenner 2 setze, habe ich Wurzel von 2 + 2 und schließlich kann ich noch diese Relation durch 2 teilen und ich erhalte 1 Kosinus² von Pi Achtel ist gleich Wurzel von 2 +2 geteilt durch 4.

Notes

Summary

20m 40s

Exemple 2 : solution (suite et fin)

Nous savons que $\cos\frac{\pi}{8} > 0$
↑ dans le 1er quadrant !

Donc $\cos\frac{\pi}{8} = +\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Remarque : $\cos^2\frac{7\pi}{8}$

Man kann jetzt also versuchen, Kosinus von Pi Achtel zu finden, ich kenne sein Quadrat. Eine Anmerkung drängt sich auf: Die Anmerkung, dass das, was wir tun, uns helfen wird, Kosinus von Pi Achtel festzulegen ab dem Quadrat von Kosinus von Pi Achtel. Wenn ich das Quadrat einer Zahl kenne, kenne ich diese Zahl bis auf das Vorzeichen, aber für Kosinus, den gesuchten Wert Kosinus von Pi Achtel, weiß ich, dass dieser Kosinus positiv sein muss. Warum? Einfach weil Pi Achtel im ersten Quadranten ist. Im ersten Quadranten weiß ich, dass Kosinus positiv ist. Ich kenne das Quadrat von Kosinus Pi Achtel, ich kann also davon ableiten, dass Kosinus von Pi Achtel gleich... Hier, treffe ich absichtlich die Wahl vom + vor der Wurzel des vorher erhaltenen Ergebnisses, was 2 + Wurzel von 2 geteilt durch 4 war, und ich kann dieses Ergebnis wie eine Wurzel schreiben, die die Summe 2 + Wurzel von 2 enthält, und ich ziehe die Wurzel von 4, um 2 zu erhalten. Das ist das Ergebnis. Machen wir dennoch eine Anmerkung. Wenn ich Kosinus von 7 Pi Achtel anschaue. Also, Kosinus von 7 Pi Achtel ist Pi von mehr als Pi Achtel, also finde ich den gleichen Kosinus, aber mit einem anderen Vorzeichen.

Notes

Summary

22m 27s

Exemple 2 : solution (suite et fin)

Nous savons que $\cos\frac{\pi}{8} > 0$
↑ dans le 1er quadrant !

Donc $\cos\frac{\pi}{8} = +\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Remarque : $\cos^2\frac{7\pi}{8} = \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\cos\frac{7\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

↑ dans le deuxième quadrant !

Aber wenn ich ins Quadrat erhöhe, bedeutet dies, dass dort ähnliche Berechnungen mich zum gleichen Ergebnis für Kosinus² geführt hätten, also hätte ich ebenfalls erhalten 2 + Wurzel von 2 geteilt durch 4. Wenn ich in diesem Fall entscheide, Kosinus von 7 Pi Achtel zu berechnen, da, muss ich diesmal folgende Argumentation machen: 7 Pi Achtel sind diesmal im zweiten Quadranten. Wenn ich in diesem zweiten Quadranten bin, muss die Antwort negativ sein. Also nehme ich minus die Wurzel des ersten vorher erhaltenen Ergebnisses, für das Quadrat dieser Zahl, und ich erhalte minus im Zähler, die Wurzel der Summe 2 + Wurzel von 2 und im Nenner 2. Ich erhalte also das gleiche Resultat wie vorher, mit einem anderen Vorzeichen. Da sehen wir an welchem Punkt man vorsichtig sein muss, an welchem Punkt man Fingerspitzengefühl haben muss, wenn man von Pi eine Gleichung des Typs Kosinus² eine bekannte Zahl zum Kosinus des entsprechenden Wertes geht.

Notes

Summary

24m 14s

Sinus de l'angle double

En posant $\beta = \alpha$ dans le théorème d'addition, on obtient l'expression des fonctions trigonométriques de l'angle 2α, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Voici donc l'expression du sinus de l'angle double :

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= \sin(\alpha + \alpha) \\ &= \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ &= 2\ \sin\alpha \cdot \cos\alpha. \end{aligned}$$

Wir haben bisher vom Additionslehrsatz gesprochen, das heißt von Sinus, Kosinus, Tangens oder Kotangens einer Summe oder einer Winkeldifferenz Alpha + Beta oder Alpha minus Beta. Man erhält in der Tat interessante Relationen, wenn man in diesen Formeln den Winkel Beta durch Alpha ersetzt, das heißt, dass also zum Beispiel Alpha + Beta einfach 2 mal Alpha wird. Tun wir es einmal für Sinus. Wenn ich Sinus von 2 Alpha berechnen muss, das bedeutet, ich werde sagen, dass es einfach Sinus von Alpha + Alpha ist, und ich wende hier den Additionslehrsatz an, das heißt für Sinus erhalte ich Sinus Kosinus + Kosinus Sinus, also erhalte ich Sinus Alpha Kosinus Alpha + Kosinus Alpha Sinus Alpha. Ich stelle sofort fest, dass ich zwei mal das gleiche Element habe, also erhalte ich 2 mal Sinus Alpha mal Kosinus Alpha.

Notes

Summary

25m 28s

Cosinus de l'angle double

De façon analogue, on obtient l'expression du cosinus de l'angle double :

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,.$$

Expression que l'on peut écrire en fonction de $\cos\alpha$ uniquement :

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \left[1 - \cos^2\alpha\right] = 2\cos^2(\alpha) - 1\,,$$

ou en fonction de $\sin\alpha$ uniquement :

$$\cos(2\alpha) = \left[1 - \sin^2\alpha\right] - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\,.$$

Das gleiche für Kosinus, Kosinus von 2 Alpha, da sage ich einfach, dass 2 Alpha gleich Alpha + Alpha ist, ich wende den Additionslehrsatz an für Kosinus, das ist Kosinus Kosinus minus Sinus Sinus, also habe ich Kosinus Alpha Kosinus Alpha minus Sinus Alpha Sinus Alpha, somit erhalte ich die Differenz Kosinus² minus Sinus². Im Vorbeigehen sollten wir anmerken, dass Kosinus Sinus² von Alpha + Sinus² von Alpha 1 ergeben hätte. Hier habe ich ein Vorzeichen Minus, und wenn ich ein Minus-Vorzeichen habe, erhalte ich Kosinus von 2 Alpha. Man kann hier dieses Ergebnis in unterschiedlichen Formen formulieren, und dort ist es wichtig, alle möglichen Formen für Kosinus von 2 Alpha beizubehalten, weil mal die eine, mal die andere praktischer ist, aber sowohl die eine als auch die andere leiten sich einfach ab. Man kann zum Beispiel diesen Sinus² mit 1 minus Kosinus² ausdrücken. Tun wir das! Ich habe diesen Kosinus von 2 Alpha, ich habe diesen Kosinus² Alpha minus... und ich ersetze Sinus² durch 1 minus Kosinus². Ich stelle fest, dass ich insgesamt zwei Kosinus von Alpha minus 1 habe. Ich kann auch in die andere Richtung gehen, das heißt, ich behalte Sinus² bei und ersetze Kosinus² durch seinen Sinus. Das erste Element hier, Kosinus² Alpha, wird durch 1 minus Sinus² Alpha ersetzt. Das zweite Element lasse ich stehen. Alles in allem erhalte ich 1 minus 2 mal Sinus² von Alpha.

Notes

Summary

26m 14s

Cotangente de l'angle double

D'une façon analogue, on établit l'expression de la cotangente de l'angle double :

$$\cot(2\alpha) = -\frac{1 - \cot\alpha \cdot \cot\alpha}{\cot\alpha + \cot\alpha} = -\frac{1 - \cot^2\alpha}{2\cot\alpha} = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot\alpha},$$

pour tout α réel tel que $\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}$ et $2\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}$,

c'est-à-dire si et seulement si $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Für Tangens kann das gleiche Spiel gemacht werden, also wenn ich Tangens von 2 Alpha habe, schreibe ich diese 2 Alpha wie Alpha + Alpha, ich wende den Lehrsatz an, also Tangens + Tangens geteilt durch 1 minus Tangens mal Tangens, ich komprimiere die beiden Elemente, das ist zwei mal das gleiche, das ist zwei mal Tangens Alpha, hier ist das Produkt das Produkt von zwei mal das gleiche Element, also ist es 1 minus Tangens². Man muss jetzt nur die Gültigkeitsbereiche nehmen, die wir hatten. Wir wissen, dass Alpha und Beta im Definitionsbereich von Tangens sein müssen, ebenso wie die Summe, also hier bleibt, da Alpha gleich Beta ist, nur, dass Alpha im Definitionsbereich von Tangens sein muss, und was die Summe war, das ist 2 mal Alpha, auch. Man muss also lediglich den Zwang errichten, dass Alpha diesmal ungleich pi Halbe modulo Pi und ungleich Pi Viertel modulo Pi halbe ist. Was den Nenner angeht, wird dieser nicht Null sein, das ist die Argumentation, die wir vorher für den Additionslehrsatz von Tangens gemacht haben. Auf eine ähnliche Art und Weise können Sie die Berechnungen noch einmal machen, und wenn Sie es wollen, noch detaillierter.

Notes

Summary

27m 35s

Cotangente de l'angle double

D'une façon analogue, on établit l'expression de la cotangente de l'angle double :

$$\cot(2\alpha) = -\frac{1 - \cot\alpha \cdot \cot\alpha}{\cot\alpha + \cot\alpha} = -\frac{1 - \cot^2\alpha}{2\cot\alpha} = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot\alpha},$$

pour tout α réel tel que $\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}$ et $2\alpha \in \mathbf{D}_{\cot}$,

c'est-à-dire si et seulement si $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Für Kotangens 2 Alpha ersetze ich einfach 2 Alpha durch Alpha + Alpha, ich habe hier die Formeln mit dem Vorzeichen Minus, das ich nicht vergesse, mit dieser Symmetrie im Vergleich zu Tangens erhalte ich hier diese Formel. Oft möchte man dieses Minus löschen, der Preis dafür ist einfach, dass man ein wenig die Symmetrie verliert, von der ich vorher gesprochen habe, im Verhältnis zur Formel für Tangens 2 Alpha, aber man hat Kotangens² minus 1 auf 2 mal Kotangens Alpha. Erneut müssen die Winkel Alpha und 2 Alpha im Definitionsbereich von Kotangens sein und Sie können überlegen, dass dies bedeutet, dass man sagen kann, dass der Winkel Alpha ungleich k mal pi Halbe ist, k in Z.

Notes

Summary

28m 39s

Formules de dupplication (version 1)

Proposition

$$\sin(2\alpha) = 2\ \sin\alpha \cdot \cos\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \left(\alpha \neq \tfrac{\pi}{4} \mod \tfrac{\pi}{2},\ \alpha \neq \tfrac{\pi}{2} \mod \pi\right)$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \qquad \left(\alpha \neq 0 \mod \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Kondensieren wir all diese Ergebnisse. Ich habe hier eine Formel für Sinus von 2 Alpha, das ist 2 mal Sinus Alpha Kosinus Alpha. Noch einmal müssen wir uns diese Formeln merken, man muss sie sich wirklich merken. Kosinus von 2 Alpha, ich habe drei unterschiedliche Formeln: Ich habe Kosinus² minus Sinus² und ich erhalte zwei andere Formeln für dieses Kosinus von 2 Alpha, wenn ich Sinus durch 1 minus Kosinus² und entsprechend Kosinus Sinus² durch 1 minus Sinus². Hier die zwei Formeln. Für Tangens 2 Alpha haben wir die Formel 2 mal Tangens Alpha geteilt durch 1 minus Tangens² erhalten und hier haben Sie den Gültigkeitsbereich, den wir für Kotangens von 2 Alpha erstellt haben. Hier habe ich die Schriftweise ohne das Vorzeichen Minus vor dem Bruch genommen. Hier, das sind Verdopplungsformeln, Formeln für doppelte Winkel, ich kann Sinus von 2 Alpha mithilfe meiner Kenntnisse von Sinus und Kosinus von Alpha ausdrücken. Ich sage, dass das Formeln in Version 1 sind. Denn eigentlich kann man diese Formeln in einer ganz einfachen Form neu schreiben, wir ersetzen lediglich 2 Alpha durch Alpha und hier Alpha durch die Hälfte von Alpha.

Notes

Summary

29m 19s

Formules de dupplication (version 2)

Proposition

$$\sin(\alpha) = 2\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (\alpha \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} \mod \pi,\ \alpha \neq \pi \mod 2\pi\right)$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1}{2\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad (\alpha \neq 0 \mod \pi).$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir schreiben die genauen Formeln noch einmal, nur mit einer Änderung der Schreibweise und also erhält man eine Version 2. Da ist sie. Wir erhalten für Sinus von Alpha 2 mal Sinus von ein halbes Alpha und Kosinus von einem halben Alpha. Ich habe lediglich 2 Alpha durch Alpha und Alpha durch ein halb Alpha ersetzt. Und Sie können dies für alle Verdoppelungsformeln tun, indem Sie die Gültigkeitsbereiche anpassen. Noch einmal, diese Formeln müssen auswendig gelernt werden, die eine erhält man... Eine, die Version 2 zum Beispiel, kann man ganz einfach aus der Version 1 erhalten. Man kann sich natürlich auch nur eine Version merken, aber man muss wissen, dass man dieses Resultat in 2 verschiedenen Versionen schreiben kann.

Notes

Summary

30m 35s

Exemple 3

Exemple

Déterminer une formule pour $\cos(3\alpha)$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Wenden wir diese Formeln auf die doppelten Winkel an, diese Verdopplungsformeln. Wir werden sie anwenden, um Kosinus von 3 Alpha zu berechnen. Also, anstatt einen Winkel zu verdoppeln, werden wir ihn mit 3 multiplizieren.

Notes

Summary

31m 22s

Exemple 3 : solution

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha$$

$$= \left[2\cos^2\alpha - 1\right] \cdot \cos\alpha -$$

Kosinus von 3 Alpha. Was kann ich sagen? Wir sagen, dass 3 Alpha die Summe von 2 Alpha und Alpha ist. Ich schreibe dies in der Form der Summe von 2 Winkeln. Der erste Winkel ist 2 Alpha, der zweite ist Alpha. Und ich verwende den Additionslehrsatz für Kosinus, also erhalte ich Kosinus Kosinus minus Sinus Sinus hier. Also erhalte ich Kosinus vom ersten Winkel, der 2 Alpha ist, der Kosinus vom zweiten Winkel multipliziert, der Alpha ist, ich habe ein Minus, ich abe Sinus vom ersten Winkel, der den Sinus vom zweiten Winkel multipliziert. Man kann das natürlich noch besser machen, weil ich hier einen Kosinus von 2 Alpha entdecke, also einen doppelten Winkel, also kann ich diesen Kosinus von 2 Alpha schreiben wie Kosinus von Alpha minus Sinus², es gibt andere mögliche Varianten, ich werde die Variante nutzen 2 mal Kosinus² minus 1. Also erhalte ich... gleich, also dort nehme ich 2 mal Kosinus² von Alpha minus 1, das Kosinus Alpha multipliziert. So, das war für das erste Element. Ich habe das Vorzeichen Minus, dann hier entdecke ich Sinus von 2 Alpha. Da kann ich auch eine Verdoppelungsformel nutzen. Was erhalte ich? Ich erhalte 2 mal Sinus von Alpha mal Kosinus von Alpha, der Sinus Alpha multipliziert.

Notes

Summary

31m 38s

Exemple 3 : solution

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha$$

$$= \left[2\cos^2\alpha - 1\right] \cdot \cos\alpha - \left[2 \sin\alpha \cos\alpha\right] \cdot \sin\alpha$$

$$= \cos\alpha \left[2\cos^2\alpha - 1 - 2\underbrace{\sin^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha}\right]$$

Wir werden die Produkte errechnen. Ich stelle fest, dass ich hier Kosinus Alpha habe, den ich auch hier wiederfinde. Ich werde ihn hervorheben können. Ich hebe also Kosinus Alpha hervor, ich könnte ein wenig schneller sein. Was bleibt? Im ersten Element bleibt die eckige Klammer selbst, das heiß, dass ich 2 mal Kosinus² Alpha minus 1 habe und auf dem zweiten Element, 2 mal Sinus Alpha Kosinus Alpha Sinus Alpha, bleibt mir einfach 2 mal Sinus² von Alpha. Genaugenommen könnte man hier aufhören, wir wollte lediglich eine Formel schreiben, eine Relation für Kosinus von 3 Alpha. Man kann es hier trotzdem ein wenig besser machen, ich habe eine Antwort, die Kosinus und das Quadrat einbezieht, das ist sehr gut, aber auch Sinus² von Alpha. Man könnte also sagen, im Grunde genommen, dieses Sinus² von Alpha könnte man versuchen, auch mit einem Kosinus² von Alpha auszudrücken. Also das ist ganz einfach. Ich könnte Sinus² ersetzen durch 1 minus Kosinus². Wenn ich das alles mache, habe ich diesen Kosinus Alpha, der hervorgehoben ist.

Notes

Summary

33m 27s

Exemple 3 : solution

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha$$

$$= [2\cos^2\alpha - 1] \cdot \cos\alpha - [2 \sin\alpha \cos\alpha] \cdot \sin\alpha$$

$$= \cos\alpha \left[2\cos^2\alpha - 1 - 2 \underbrace{\sin^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha} \right]$$

$$= \cos\alpha \left[4\cos^2\alpha - 3 \right]$$

$$= \underline{\underline{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}}$$

Wenn ich genau hinschaue, habe ich hier ein 2 mal Kosinus² und ich erhalte hier minus minus, was plus wird und auch 2 mal Kosinus², also erhalte ich insgesamt 4 mal Kosinus² von Alpha, und ich werde hier ein minus 1 erhalten und minus 2 mal 1, also erhalte ich insgesamt minus 3 und da habe ich einen Term, der lediglich Kosinus enthält. Wenn Sie es bevorzugen, können Sie dieses Ergebnis in der Form schreiben, dass es 4 mal Kosinus von Alpha³ minus 3 mal Kosinus Alpha. Das ist vielleicht die Form, die ich in meiner finalen Antwort nutzen werde.

Notes

Summary

34m 47s

Théorème d'addition

Ce que nous avons appris :

- le théorème d'addition ;
- les formules de dupplication.

Prochaine étape :

- les formules de bissection ;
- les transformations "somme - produit" ;
- les transformations "produit - somme".

Ziehen wir die Bilanz! Was haben wir in der heutigen Sitzung gelernt? Wir haben den Additionslehrsatz kennengelernt, eine Formel für Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens, immer für einen Winkel Alpha + Beta beziehungsweise Alpha minus Beta. Die zweite Variante mit den Minus-Vorzeichen erhalten wir aus der Variante mit den Plus, indem einfach die Parität von Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens genutzt wird. Dann haben wir Verdopplungsformeln entwickelt, indem einfach der Additionslehrsatz herangezogen wurde für Alpha + Beta, und indem Beta durch Alpha ersetzt wurde, wodurch wir Formeln für Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens von 2 Alpha erhalten haben. Das gab uns, was wir die erste Variante der Verdoppelungsformeln genannt haben. Man kann diese Verdoppelungsformeln in einer zweiten Variante schreiben, indem 2 Alpha durch Alpha ersetzt wird, und somit Alpha durch ein Halbes Alpha. In der nächsten Etappe werden wir über Halbierungsformeln sprechen, wir werden uns also zum Beispiel mit Sinus von einem halben Alpha beschäftigen ab Sinus oder ab Kosinus von Alpha.

Notes

Summary

35m 34s

Théorème d'addition

Ce que nous avons appris :

- le théorème d'addition ;
- les formules de dupplication.

Prochaine étape :

- les formules de bissection ;
- les transformations "somme - produit" ;
- les transformations "produit - somme".

Wir werden darüber sprechen, wie man Summen aus Sinus und Kosinus in Produkte umwandeln kann, das ist immer eine interessante Operation, weil ein Produkt reicher ist als eine Summe, aber man kann auch in umgekehrter Richtung umwandeln, das heißt, Produkte in Summen umwandeln. Da sind es auch Formeln, die absolut nützlich sind. So, das ist alles für heute. Vielen Dank und bis zum nächsten Mal.

Notes

Summary

36m 43s