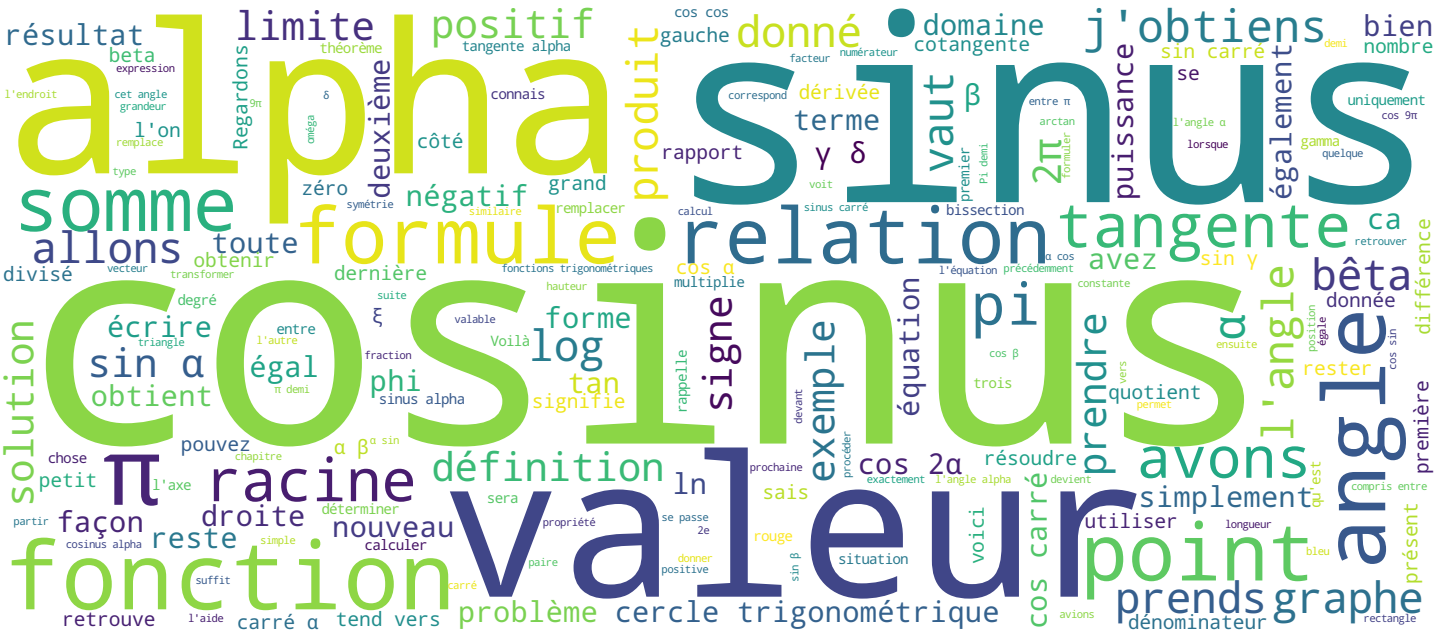
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Formules trigonométriques

4.3 Formules de bissection, transformation de sommes en produit

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Formules de bissection

On cherche à exprimer les fonctions trigonométriques de l'angle $\frac{\alpha}{2}$ en fonction de celles de l'angle α.

A partir des expressions du cosinus de l'angle double

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha, \end{aligned}$$

Bonjour. La dernière fois, je vous avais présenté une 1re partie des formules trigonométriques. C'était des formules qui avaient trait à la somme d'angles. Nous avions parlé de théorèmes d'addition ainsi que de la duplication d'angles. Aujourd'hui, je vais vous présenter le 2e volet de ces formules trigonométriques. Ce sont là des formules qui ont trait à la bissection. Nous allons parlé de formules qui permettent de transformer des sommes en produits et des produits en sommes. Commençons par les formules dites de bissection. Le problème est le suivant, on cherche à exprimer une fonction trigonométrique de l'angle α/2 à l'aide de fonctions trigonométriques qui contiennent uniquement l'angle α. Pour résoudre ce problème, le mieux c'est de partir de π et la relation pour cos(2α) que nous avons appris à connaître la dernière fois. C'est là une duplication d'angles. Je les glisse dans la première version, c'est-à-dire que j'ai le cos (2α). Il peut être exprimé sous différentes formes : à la forme la plus symétrique, c'était de dire que c'était cos carré moins sin carré, mais on peut aussi utiliser une des deux formes que j'ai ici (2 cos carré α -1 ou 1 - sin carré α).

Notes

Summary

0m 04s

Formules de bissection

On cherche à exprimer les fonctions trigonométriques de l'angle $\frac{\alpha}{2}$ en fonction de celles de l'angle α.

A partir des expressions du cosinus de l'angle double

$$\begin{aligned}\cos(2\,\alpha) &= 2\cos^2\alpha - 1\\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\,,\end{aligned}$$

on a immédiatement les relations suivantes :

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\,\alpha)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\,\alpha)}{2}\,.$$

Si je prends par exemple la 1re relation, je peux tout à fait la résoudre par rapport à cos carré alpha. Pour la deuxième ligne, je peux la résoudre par rapport à sin carré α. Pour la 1re ligne, j'obtiens donc le cos carré α, qui est donné par (1 + cos (2α)) / 2). Pour le sin carré, j'obtiens (1 - cos (2α)) /2. On peut procéder avec le même problème pour tangente.

Notes

Summary

1m 18s

Tangente en fonction du cosinus de l'angle double

A partir des deux expressions précédentes, on obtient l'expression de $\tan^2\alpha$ en fonction de $\cos(2\alpha)$:

$$\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \cdot \frac{2}{1+\cos(2\alpha)} = \frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}.$$

Cette relation n'est définie que si $\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}$.

On remarque que si $\tan\alpha$ est bien défini, alors $\cos(2\alpha) \neq -1$.

Donc, on va essayer d'exprimer tangente carré α à l'aide de notre connaissance de l'angle double. Je dis tan carré α est simplement le (sin carré α) / (cos carré α). Alors, on vient de développer des formules pour sinus carré et cos carré en fonction d'un angle double (deux α). Pour le sinus carré, nous avions obtenu (1 - cos (2α)) / 2; le voilà. Pour le cosinus, on avait obtenu 1 + cos (2α) / 2. Ici, je divise par le cos sin carré α. Là, je multiplie par la fraction renversée. Je vois que les deux vont se compenser. Il va rester (1 - cos (2α)) / (1+cos (2α)). Cette relation est valable tant qu'on ne met pas une division par zéro. L'unique problème est qu'il faut être sûr qu'ici on ne divise pas par zéro. Ça signifie qu'il suffit de demander que α est bien dans le domaine de définition de tangente. Vous pouvez, sur le cercle trigonométrique, réfléchir au fait que, dans ce cas-là, le cos (2α) ne sera jamais égal à -1. Vous n'aurez pas de problème sur cette division. Ici aussi, faites-le. C'est certainement enrichissant de le faire.

Notes

Summary

1m 46s

Formules de bissection (version 2)

Proposition

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad (\alpha \neq \pi \mod 2\pi)$$

$$\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} \qquad (\alpha \neq 0 \mod 2\pi).$$

Retenons l'ensemble des résultats obtenus : je peux exprimer le sin carré α par (1- cos (2α)) / 2; pour le cos carré α, j'obtiens une formule similaire mais avec un autre singne, donc (1 + cos (2α)) / 2. Ces deux formes sont valables pour toutes valeurs α. Pour tan et cotan, j'obtiens des formules qui se déduisent depuis les deux premières lignes. Pour tan, je prends le quotient de la 1re par la 2e. Pour cotan, je prends le quotient de la 2e par la 1re. Et j'obtiens les formules que vous découvrez ici, donc (1 - cos (2α)) / (1 + cos (2α)), respectivement, (1 + cos (2α)) / (1 - cos (2α)). Ces deux dernières lignes sont valables, la première pour α dans tan, le domaine de définition de tan. La deuxième pour α dans le domaine de définition de cotan. Alors ça, c'est une 1re version des formules de bissection. Comme la dernière fois, nous pouvons passer à une 2e version, simplement en remplaçant partout le 2α par α et les α en α / 2. Vous obtenez la version 2 que voici. Il suffit de retenir 1 des 2 versions et on peut passer de l'une à l'autre par cette substitution. Remarquez qu'il faut toujours adapter le domaine de validité en conséquence.

Notes

Summary

2m 59s

Remarque

Il est important de constater que les formules de bissection donnent la valeur des fonctions trigonométriques élevées au carré.

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \quad \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Ici, une remarque importante va s'imposer. C'est que toutes ces formules que nous avons données, regardons-les encore une fois, revenons en arrière.

Notes

Summary

4m 22s

Formules de bissection (version 2)

Proposition

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad (\alpha \neq \pi \mod 2\pi)$$

$$\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} \qquad (\alpha \neq 0 \mod 2\pi).$$

Par exemple, cette gamme de formule permet toujours de calculer non pas un sin mais un sin carré, non pas un cos, mais un cos carré, etc.

Notes

Summary

4m 30s

Remarque

Il est important de constater que les formules de bissection donnent la valeur des fonctions trigonométriques élevées au carré.

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \quad \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Donc, vous les avez ici, je vous les ai rapellées. Elles ne donnent pas la valeur des fonctions trigonométriques du demi-angle ici, mais uniquement du demi-angle carré.

Notes

Summary

4m 38s

Remarque

Il est important de constater que les formules de bissection donnent la valeur des fonctions trigonométriques élevées au carré.

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \quad \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Si on veut en déduire la valeur des fonctions trigonométriques elles-mêmes, il faut connaître leur signe.

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Il faut donc être capable de localiser le point $P(\frac{\alpha}{2})$ sur le cercle trigonométrique.

Si on veut déduire la valeur de la fonction trigonométrique elle-même, il faut connaître le sin. Par exemple, pour le sin (α / 2), je sais que ça sera une des 2 valeurs, le plus ou le moins, de la racine de cette valeur ((1 -(cos α) / 2), de même pous le cos et la tan, j'aurai toujours un signe + ou -. Il n'est pas question de dire que les deux sont possibles pour un même angle. Il faut être capable de localiser le point p α/2 sur le cercle trigonométrique. À partir de cette localisation, on peut déduire le signe du sin α/2, du cos α/2 et de tan α/2. Et selon ce signe, il faut choisir le bon signe devant ces racines. Ça c'est une remarque importante.

Notes

Summary

4m 49s

Exemple 4

Exemple

Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right)$ sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Alors, appliquons ce que nous venons de faire pour calculer la valeur exacte de cos 9π/16 en sachant que cos π/8, ça nous l'avons fait la semaine dernière, et nous avions trouvé la √ de la somme (2 + √2) / 2. Alors, on aimerait cette fois-ci avoir cos 9π/16.

Notes

Summary

5m 34s

Exemple 4 : solution

On a $\cos^2 \frac{9\pi}{16} = \cos^2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{9\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\frac{9\pi}{8}}{2} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2}$

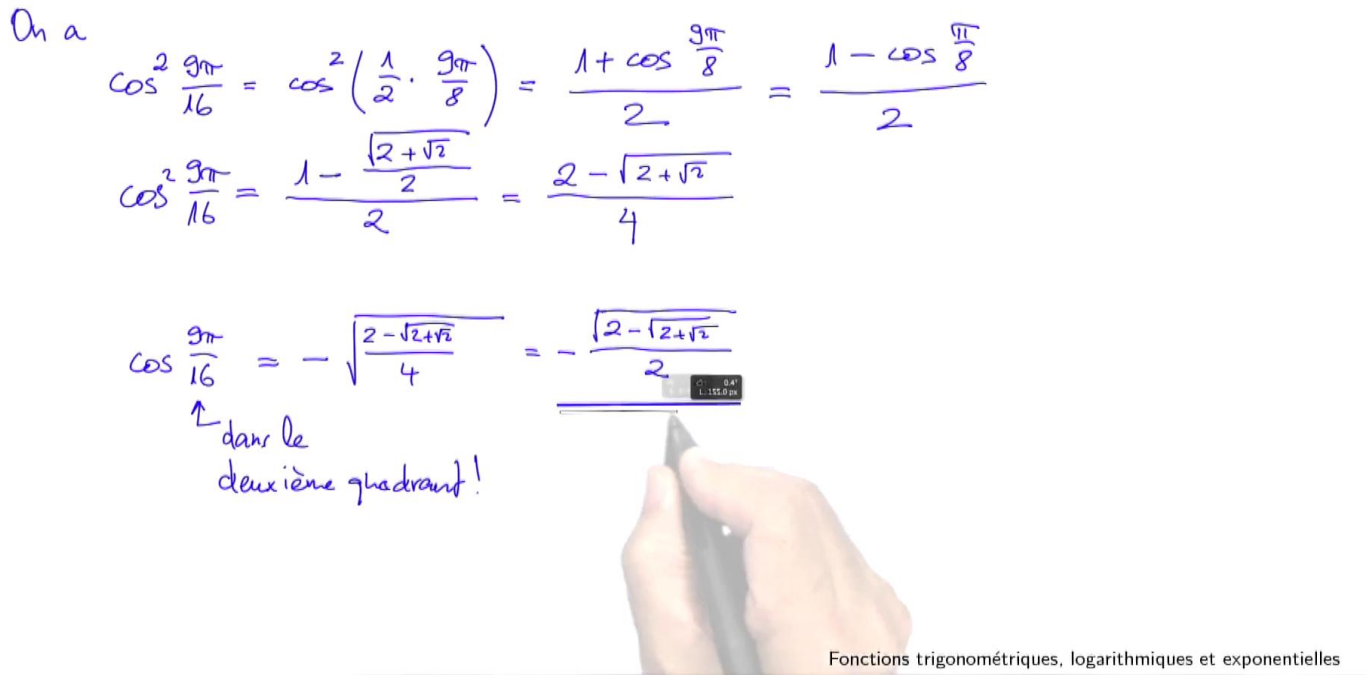
On peut écrire la chose suivante : on a... j'aimerais connaître cos 9π/16. Je vais dire que 9π/16 est la moitié de 9π/8. Je vais utiliser donc une formule de bissection. Mais je sais que dans ce cas, si je veux utiliser une formule de bissection, je vais nécessairement obtenir uniquement une relation pour le carré. Écrivons tout de suite ce carré. Je peux dire que j'aimerais calculer le cos carré de la moitié de mon angle 9π/8. Là, j'ai une formule et je sais que je peux dire que c'est 1 + cos 9π / 8, là sans la demie, le tout divisé par 2. Alors, 9π/8 est un angle qui est situé dans le 3e quadrant. Ça, ça vaut 8π/8 + 1π/8. C'est donc un peu plus grand que π. C'est-à-dire que ce cos va être négatif. On peut faire un peu mieux si je change la valeur de l'angle ici, 9π/8 de π, pas de 2π, uniquement de π. Je sais que le signe du cosinus change. Je vais écrire ici : 1, je vais mettre un moins et je vais changer l'angle qui est dans cos, je vais modifier cet angle de π. Je vais enlever π. Si j'enlève π, il va me rester ici, 1 π/8. Ça, c'est correct. Et j'ai encore π/2. Alors, le cos π/8, je le connais. Donc, je peux utiliser la donnée obtenue pour cos π/8.

Notes

Summary

5m 56s

Exemple 4 : solution



Donc, j'ai (cos carré) de 9π/16 égale à, et si j'introduis la valeur obtenue ou la valeur donnée dans l'énoncé de cet exemple; le cos π/8 était donné par une fraction. Au dénominateur, j'avais un 2. Au numérateur, j'avais une racine qui contenait la somme de 2 +√2. Et le tout, je dois encore le diviser par deux. On peut amplifier cette fraction avec 2. Alors là j'obtiens 2 - √ (2+√2). Et au dénominateur, après amplification, j'obtiens 4. Ça, ce n'est pas le cos de 9π/16, la valeur recherchée, Mais, c'est le carré de cette valeur recherchée. Alors, si je veux passer au cos 9π/16, je sais que ce sera une des 2 valeurs obtenues en prenant la √ de ce nombre ici. (en pointant vers 2 - √(2+√2) / 4) Mais, il me faudrait connaître le signe à choisir devant cette racine. Où est-ce qu'est situé cet angle de 9π/16 ? Il est situé dans le deuxième quadrant. S'il est dans le 2e quadrant, mon cos va être négatif. Donc, je prends =, là le choix délibéré du -. Je prends la √ du nombre que j'ai obtenu là, soit 2 - la racine de cette somme, divisé par 4. Je peux évidemment extraire les racines au numérateur et au dénominateur séparément, j'obtiens 1 - une fraction au dénominateur le 2, qui est la racine de 4. Et au numérateur, il va me rester une grande fraction qui contient 2 - une √ d'une somme de 2 + √ de 2. Et ça, c'est le résultat.

Notes

Summary

7m 53s

Transformations "somme - produit"

On cherche à écrire des relations permettant de transformer les sommes

$$\sin\alpha + \sin\beta\,, \quad \sin\alpha - \sin\beta\,, \quad \cos\alpha + \cos\beta\,, \quad \cos\alpha - \cos\beta$$

en produits de sinus et de cosinus.

Pour cela, on se sert des formules d'addition :

$$\begin{cases} \sin(\gamma+\delta) &= \sin\gamma\cdot\cos\delta + \cos\gamma\cdot\sin\delta \\ \sin(\gamma-\delta) &= \sin\gamma\cdot\cos\delta - \cos\gamma\cdot\sin\delta \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \cos(\gamma+\delta) &= \cos\gamma\cdot\cos\delta - \sin\gamma\cdot\sin\delta \\ \cos(\gamma-\delta) &= \cos\gamma\cdot\cos\delta + \sin\gamma\cdot\sin\delta. \end{cases}$$

Venons-en à la 2e partie de cette présentation. Nous venons de développer des formules de bissection. On a encore la transformation de sommes en produits et de produits en sommes. On aimerait, dans une première étape, remplacer la somme des angles sin α + sin β, par un produit. Par exemple, cos α - cos β par un produit. Le point de départ pour résoudre ce problème, ce sont les formules d'addition pour le sin et le cos. Je vous les ai rappelées ici. Pour le sin, γ + δ; γ - δ. Pour le cos, γ + δ; γ - δ. Alors pour le sin, je vous rappelle qu'on obtient sin cos + cos sin. Et que pour le cos, on obtient cos cos - sin sin. Nous allons devoir les écrire un peu différemment ces relations.

Notes

Summary

10m 06s

Remarque

En vue de transformer la somme $\sin\alpha + \sin\beta$ en un produit, à l'aide des formules

$$\begin{cases} \sin(\gamma+\delta) &= \sin\gamma\cdot\cos\delta + \cos\gamma\cdot\sin\delta \\ \sin(\gamma-\delta) &= \sin\gamma\cdot\cos\delta - \cos\gamma\cdot\sin\delta \end{cases},$$

on pose $\alpha := \gamma+\delta$ et $\beta := \gamma-\delta$ et on en déduit que $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $\delta = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

En effet,

$$\begin{cases} \gamma+\delta = \alpha \\ \gamma-\delta = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma+\delta = \alpha \\ 2\gamma = \alpha+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \delta = \frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}.$$

C'est pour ça, qu'une petite remarque va s'imposer. On va remplacer ce γ + δ par un α et le γ - δ par un β. Ça se fait facilement. En revanche, dans ces deux relations ici sur la droite, j'ai plus de peine. J'ai un γ et un δ tous seuls et il faudra maintenant exprimer évidemment γ et δ en fonction de α et de β. Je vous ai donné ici le résultat. Il suffit de dire que γ va être la demi-somme et δ la demi-différence. Cela se fait aisément si vous dites que γ + δ est α et le γ - δ est β pour résolver ce système en disant les grandeurs α et β sont données, je cherche à déterminer γ et δ. Vous pouvez, par exemple, conserver la 1re équation, remplacer la 2e équation par la somme. Il va rester 2 γ = α + β, ce qui permet de dire que γ est donné par la demi-somme, c'est la 2e équation, et une fois que vous avez ce γ, vous l'introduisez dans la 1re équation et vous trouvez pour δ la demi-différence. Cela va être utile dans l'écriture des relations qui suivent.

Notes

Summary

11m 02s

Somme de sinus

En additionnant et en soustrayant les deux équations définissant les formules d'addition du sinus, on obtient :

$$\begin{array}{lll|ll}
\sin(\gamma+\delta) & = \sin\gamma\cos\delta + \cos\gamma\sin\delta & \cdot 1 & \cdot 1 \\
\sin(\gamma-\delta) & = \sin\gamma\cos\delta - \cos\gamma\sin\delta & \cdot 1 & \cdot(-1) \\
\hline
\sin\underbrace{(\gamma+\delta)}_{=:\alpha} + \sin\underbrace{(\gamma-\delta)}_{=:\beta} & = 2\sin\gamma\cos\delta & & \\
\sin\alpha + \sin\beta & = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) & & \\
\hline
\sin\underbrace{(\gamma+\delta)}_{=:\alpha} - \sin\underbrace{(\gamma-\delta)}_{=:\beta} & = 2\cos\gamma\sin\delta & & \\
\sin\alpha - \sin\beta & = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) & &
\end{array}$$

Revenons au théorème d'addition, ici pour le sin. J'ai le théorème d'addition pour le sin. Une fois pour γ + δ, une fois pour γ - δ. Je laisse encore la notation γ et δ; je passerai à la notation en α et β juste dans un instant. On peut additionner. C'est ce que je symbolise ici. Je prends une fois la 1re équation, une fois la 2e, et j'additionne. J'obtiens donc le sin γ + δ. C'est en fait sin α. Et ici, sin γ - δ qui sera alors sin β. Si je procède par addition, qu'est-ce qui se passe ? Par addition, je vois tout de suite que les termes, ici sur la droite, vont se neutraliser. Les premiers sont égaux; donc, il reste : 2 sin γ cos δ. Et là, je remplace γ par la demi-somme et δ par la demi-différence. J'obtiens donc une relation, qu'on a ici en rouge, qui me dit que sin α + sin β, c'est une somme qui peut être remplacée par un produit qui est 2 sin ((α+β) / 2) cos ((α-β) / 2). On peut, au lieu d'additionner ces 2 relations, prendre une fois la 1re et -1 fois la 2e. C'est-à-dire qu'on soustrait ces relations. Si vous procédez par soustraction, vous allez simplement obtenir ici sin γ + δ -, donc α, moins la 2e ligne, il va rester sin β.

Notes

Summary

12m 18s

Somme de cosinus

En additionnant et en soustrayant les deux équations définissant les formules d'addition du cosinus, on obtient :

$$\begin{array}{lll|ll}
\cos(\gamma+\delta) & = \cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta & \cdot 1 & \cdot 1 \\
\cos(\gamma-\delta) & = \cos\gamma\cos\delta + \sin\gamma\sin\delta & \cdot 1 & \cdot(-1) \\
\hline
\cos\underbrace{(\gamma+\delta)}_{=:\alpha} + \cos\underbrace{(\gamma-\delta)}_{=:\beta} & = 2\cos\gamma\cos\delta & & \\
\cos\alpha + \cos\beta & = 2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) & & \\
\hline
\cos\underbrace{(\gamma+\delta)}_{=:\alpha} - \cos\underbrace{(\gamma-\delta)}_{=:\beta} & = -2\sin\gamma\sin\delta & & \\
\cos\alpha - \cos\beta & = -2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) & &
\end{array}$$

Par soustraction, cette fois-ci, ce sont les premiers termes ici qui se neutralisent et les derniers vont être les mêmes. On va obtenir 2 cos γ sin δ, c'est-à-dire 2 cos ((α+β) / 2) sin ((α-β) / 2). Ici, j'ai une relation qui permet de remplacer une différence sin α - sin β par un produit qui est 2 cos (α+β) / 2) sin ((α-β) / 2). Une petite remarque, je vais revenir sur cette relation, que l'on voit ici, dans un instant pour l'utiliser à d'autres fins. Lorsque je ferai référence à l'équation, je ferai référence exactement à cette ligne. On peut procéder de façon tout à fait similaire pour les théorèmes d'addition qui concernent le cos. Ici, je vous ai écrit, la formule pour cos : cos cos - sin, sin; cos cos + sin sin. On fait encore la même chose : on additionne et on soustrait. Donc, on va obtenir ici une formule pour cos α + cos β; ici, par addition, qu'est-ce qui se passe ? Les termes ici vont disparaître, il restera 2 cos cos. Si vous soutrayez, vous aurez cos α - cos β et ce qui va rester : par soutraction, alors, il restera.

Notes

Summary

13m 46s

Transformations "somme - produit"

Proposition

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

- 2 sin ((α+β) / 2) sin ((α-β) / 2) On peut résumer l'ensemble de ces résultats dans une proposition. Nous avons établi une relation pour sin α + sin α, là voici; une pour sin α - sin β; pour cos α + cos β et pour cos α - cos β. Des relations qui sont valables pour toutes les valeurs de α et de β.

Notes

Summary

15m 13s

Transformations "produit - somme"

Il est parfois utile de transformer un produit en une somme. Pour cela on utilise les formules suivantes obtenues dans les développements précédents :

$$2 \sin\gamma \cdot \cos\delta = \sin(\gamma+\delta) + \sin(\gamma-\delta),$$

$$2 \cos\gamma \cdot \cos\delta = \cos(\gamma+\delta) + \cos(\gamma-\delta),$$

$$-2 \sin\gamma \cdot \sin\delta = \cos(\gamma+\delta) - \cos(\gamma-\delta).$$

Il est parfois utile d'aller dans l'autre sens. Ça peut surpendre. Mais, il est utile de transformer des produits en une somme. Pour cela, on va partir de ces formules que j'ai mentionnées précédemment, où j'ai dit que j'allais revenir dessus. Je les ai recopiées ici, c'était les formules que j'avais, par exemple, obtenues en additionnant le théorème d'addition pour le sin γ+δ et pour le sin γ-δ. J'avais obtenu ce produit. Si vous lisez cette ligne; évidemment, elle permet de transformer un produit (sin γ cos δ) en une somme. Vous pouvez faire la même chose avec les autres formules intermédiaires que vous obtenez. Je les ai reprises ici. Donc, pour 2 cos γ cos δ, vous obtenez cos de la somme + cos de la différence pour - 2 sin γ sin δ, vous obtenez cos de la somme - cos de la différence. Sous cette forme, on aime pas tellement les écrire, on préfère avoir des α et des β. Ici, on va formuler la version définitive pour cette transformation d'un produit en une somme en remplaçant les γ en α et les δ en β. En passant, les deux sur la droite.

Notes

Summary

15m 45s

Transformations "produit - somme"

Proposition

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}\qquad(\alpha,\,\beta\in\mathbb{R}).$$

Ce qu'on obtient c'est sin α cos β est donné par le sin de la somme + le sin de la différence / 2. Pour cos a cos β, on obtient le cos de la somme + le cos de la différence / 2. Et pour sin α sin β, on obtient, on préfère avoir ce moins devant parce qu'on préfère avoir une fonction trigonométrique d'une somme; donc, le cos de la somme - le cos de la différence / 2. Des formules qui sont, comme je l'ai dit, valables pour toutes les valeurs α et β dans R.

Notes

Summary

16m 59s

Formules trigonométriques (suite)

Ce que nous avons appris :

- les formules de bissection ;
- les transformations "somme - produit" ;
- les transformations "produit - somme".

Prochaine étape :

- deux exemples.

Voilà, on arrive à la fin. Donc, bilan de ce que nous avons fait : la dernière fois, nous avions présenté le 1er volet des formules trigonométriques. Aujourd'hui, nous avons présenté le 2e, ce sera le dernière volet. Ça fait quand même beaucoup de formules présentées. Les formules que nous avons présentées sont, d'une part, des formules de bissection, et nous avons ensuite encore montré comment transformer une somme en un produit, respectivement, et un produit en une somme. Alors, qu'est-ce qui nous reste à faire dans ce chapitre ? Je vais clore ce chapitre la prochaine fois avec deux exemples qui sont assez typiques et qui font intervenir ces formules que j'ai présentées lors de ces dernières séances pour montrer comment on peut les mettre en oeuvre. Je vous remercie. Au plaisir de vous retrouver la prochaine fois.

Notes

Summary

17m 31s