ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Formules trigonométriques

4.3 Formules de bissection, transformation de sommes en produit

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

EPFL

Formules de bissection

On cherche à exprimer les fonctions trigonométriques de l'angle $\frac{\alpha}{2}$ en fonction de celles de l'angle α.

A partir des expressions du cosinus de l'angle double

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= 2\cos^2\alpha - 1\\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\,,\end{aligned}$$

Guten Tag. das letzte Mal habe ich Ihnen den ersten Teil trigonometrischer Gleichungen vorgestellt. Diese Formeln handelten von der Winkelsumme. Wir sprachen über die Sätze der Addition sowie über die Verdopplung von Winkeln. Heute möchte ich Ihnen den zweiten Abschnitt der trigonometrischen Gleichungen vorstellen. Diese Formeln handeln von der Halbierung Wir werden über Formeln sprechen, die uns erlauben, Summen in Produkte umzuwandeln und Produkte in Summen. Beginnen wir mit den Formeln der Halbierung. Das Problem ist das folgende: Wir suchen eine trigonometrische Funktion des Winkels α/2 mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen, die nur den Winkel α enthalten. Um dieses Problem zu lösen, ist es am besten, von π und dem Verhältnis zu Cos (2α) auszugehen, was wir das letzte Mal gelernt haben. Dies ist also eine Verdopplung von Winkeln. Ich leite sie aus der ersten Version ab, das heißt, ich habe cos (2α). Dieser kann in zwei verschiedenen Formen ausgedrückt werden: in der symmetrischsten Form, das heißt cos zum Quadrat minus Sinus zum Quadrat. Man kann aber auch eine der beiden Formeln nutzen, die ich hier habe: (2 cos zum Quadrat α - 1 oder 1 - sin zum Quadrat α).

Notes

Summary

0m 04s

Formules de bissection

On cherche à exprimer les fonctions trigonométriques de l'angle $\frac{\alpha}{2}$ en fonction de celles de l'angle α.

A partir des expressions du cosinus de l'angle double

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\,, \end{aligned}$$

on a immédiatement les relations suivantes :

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}\,.$$

Wenn ich das Beispiel der ersten Gleichung nehme, kann ich es hinsichtlich cos zum Quadrat α auflösen. Die zweite Formel kann ich hinsichtlich Sinus zum Quadrat α auflösen. Für die erste erhalte ich Cos zum Quadrat α, was durch (1 + cos (2α)) / 2 gegeben ist. Für Sinus zum Quadrat erhalte ich (1 - cos (2α)) / 2. Wir können genauso für das Problem des Tangens fortfahren.

Notes

Summary

1m 18s

Tangente en fonction du cosinus de l'angle double

A partir des deux expressions précédentes, on obtient l'expression de $\tan^2\alpha$ en fonction de $\cos(2\alpha)$:

$$\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \cdot \frac{2}{1+\cos(2\alpha)} = \frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}.$$

Cette relation n'est définie que si $\alpha \in \mathbf{D}_{\tan}$.

On remarque que si $\tan\alpha$ est bien défini, alors $\cos(2\alpha) \neq -1$.

Versuchen wir also, Tangens zum Quadrat α auszudrücken, mithilfe unserer Kenntnisse vom doppelten Winkel. Ich sage tan zum Quadrat α ist einfach (sin zum Quadrat α) / (cos zum Quadrat α). Wir haben also Formeln für Sinus zum Quadrat und Cosinus zum Quadrat mit Hilfe des doppelten Winkels (2α). Für Sinus zum Quadrat haben wir erhalten: (1 - cos (2α)) / 2. Für Cosinus haben wir erhalten: 1 + cos (2α) / 2. Hier teile ich durch cos sin zum Quadrat α. Und hier multipliziere ich mit dem Kehrwert. Offensichtlich können die beiden miteinander kombiniert werden. Es bleibt also: (1 - cos (2α)) / (1 + cos (2α)). Diese Gleichung ist gültig, soweit nicht durch 0 dividiert wird. Das einzige Problem ist also, dass man sichergehen muss, nie durch Null zu teilen. Es reicht also zu fragen, ob α im Definitionsbereich des Tangens liegt. Erinnern Sie sich daran, dass cos (2α) auf dem Einheitskreis niemals -1 sein kann. Dann werden Sie bei der Division keine Probleme haben. Machen Sie das hier auch. Dies ist sicher bereichernd.

Notes

Summary

1m 46s

Formules de bissection (version 2)

Proposition

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad (\alpha \neq \pi \mod 2\pi)$$

$$\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} \qquad (\alpha \neq 0 \mod 2\pi).$$

Lassen Sie uns die erarbeiteten Ergebnisse festhalten: Ich kann sin zum Quadrat α durch (1 - cos (2α)) / 2 ausdrücken. Für cos zum Quadrat α, erhalte ich eine ähnliche Formel, aber mit einem anderen Vorzeichen, nämlich (1 + cos (2α)) / 2.. Diese beiden Formeln gelten für alle Wert von α. Für Tan und Cotan erhalte ich Formeln, die sich aus den ersten beiden Zeilen ableiten. Für Tan nehme ich den Quotienten der ersten und zweiten Zeile. Für Conan nehme ich den Quotienten aus der zweiten und der ersten Zeile. Und erhalte sodann folgende Formeln: (1 - cos (2α)) / (1 + cos (2α)) bzw. 1 + cos (2α)) / (1 - cos (2α)). Die letzten beiden Zeilen gelten wenn für die erste Zeile α innerhalb des Definitionsbereichs des tan liegt und die zweite gilt, wenn α im Definitionsbereich des cotan liegt. Dies ist also eine erste Version der Halbierungsformeln. Wie beim letzten Mal kommen wir nun zu einer zweiten Version, indem wir überall das 2α durch α und α durch α/2 ersetzen. Sie erhalten die zweite Version dann wie folgt. Es reicht aus, eine der zwei Versionen zu behalten und dann durch Austauschen von einer zur anderen zu wechseln. Beachten Sie, dass Sie aber immer den Gültigkeitsbereich anpassen müssen.

Notes

Summary

2m 59s

Remarque

Il est important de constater que les formules de bissection donnent la valeur des fonctions trigonométriques élevées au carré.

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \quad \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Hier drängt sich ein wichtiger Hinweis auf. Lassen Sie uns alle Formeln noch einmal ansehen, beginnend mit der letzten.

Notes

Summary

4m 22s

Formules de bissection (version 2)

Proposition

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad (\alpha \neq \pi \mod 2\pi)$$

$$\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} \qquad (\alpha \neq 0 \mod 2\pi).$$

Diese Palette an Formeln ermöglicht uns beispielsweise nicht nur Sin zu berechnen, sondern Sinus zum Quadrat, nicht nur cos, sondern Kosinus zum Quadrat, usw.

Notes

Summary

4m 30s

Remarque

Il est important de constater que les formules de bissection donnent la valeur des fonctions trigonométriques élevées au carré.

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \quad \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Hier haben Sie sie, ich wiederhole sie nochmal. Sie geben uns nicht den Wert der trigonometrischen Funktionen des Halbwinkels, sondern nur des Halbwinkels zum Quadrat.

Notes

Summary

4m 38s

Remarque

Il est important de constater que les formules de bissection donnent la valeur des fonctions trigonométriques élevées au carré.

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \quad \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Si on veut en déduire la valeur des fonctions trigonométriques elles-mêmes, il faut connaître leur signe.

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Il faut donc être capable de localiser le point $P(\frac{\alpha}{2})$ sur le cercle trigonométrique.

Will man also den Wert der trigonometrischen Funktion selbst herleiten, muss der sin bekannt sein. Zum Beispiel weiß ich für sin (α / 2), dass dies einer der zwei Werte, der größere oder der kleinere, der Wurzel dieses Wertes sein wird ((1 - (cos α) / 2). Das gleiche gilt für cos und tan, ich habe immer das Vorzeichen + oder -. Es ist unzweifelhaft, dass die beiden möglich sind für denselben Winkel. Es muss möglich sein, den Punkt P α/2 auf dem Einheitskreis auszumachen. Mithilfe dieser Lokalisierung könnte man dann das Vorzeichen von sin α/2, cos α/2 und tan α/2 ableiten. Und gemäß diesem Vorzeichen müsste dann dass richtige Vorzeichen vor den Wurzeln gewählt werden. Das ist ein wichtiger Hinweis.

Notes

Summary

4m 49s

Exemple 4

Exemple

Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right)$ sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Also wenden wir dies an, um den exakten Wert für cos 9π/16 zu berechnen, unter Berücksichtigung, dass wir cos π/8 letzte Woche besprochen haben und dort √ der Summe aus (2 + √2) / 2 gefunden haben. Dieses Mal wollen wir also cos 9π/16 bestimmen.

Notes

Summary

5m 34s

Exemple 4 : solution

On a

$$\cos^2\frac{9\pi}{16} = \cos^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{9\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\frac{9\pi}{8}}{2} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2}$$

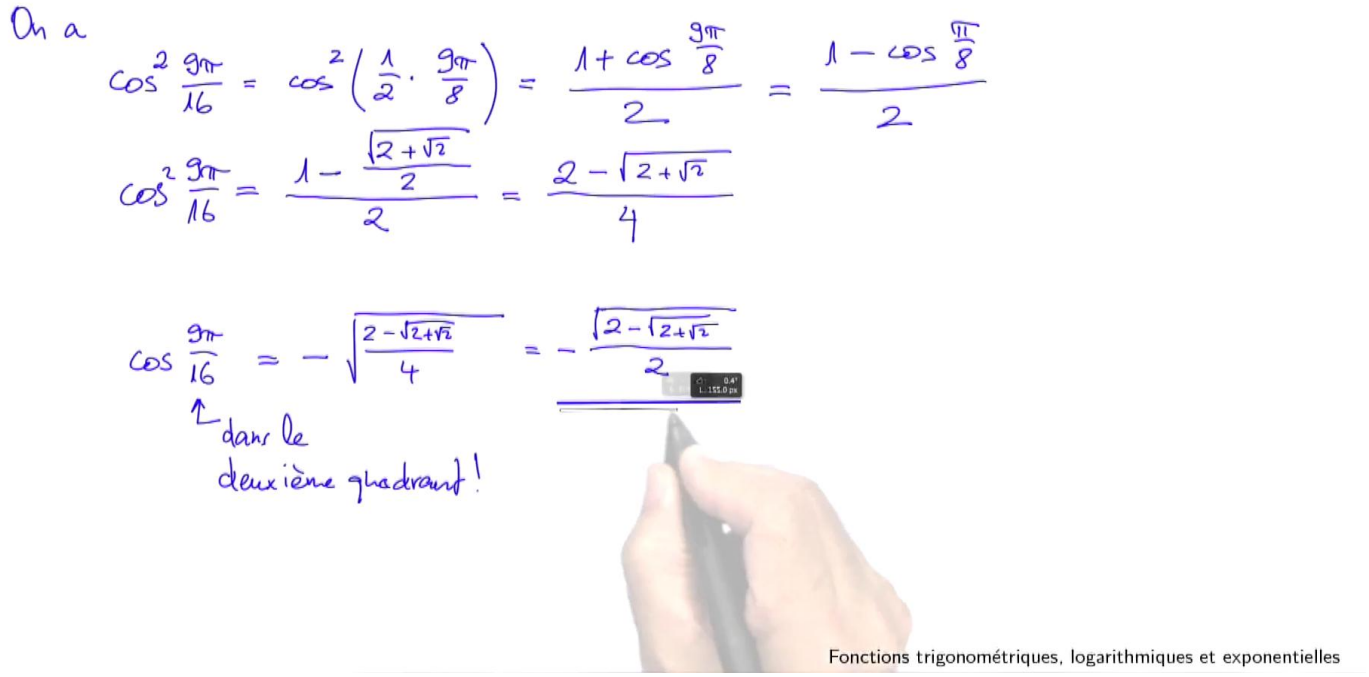
Dies kann man wie folgt notieren: Wir haben..., und wollen cos 9π/16 ermitteln. Ich sage, 9π/16 ist gleich die Hälfte von 9π/18. Ich verwende nun also eine der Halbierungsformeln. Allerdings weiß ich, wenn ich eine der Halbierungsformeln benutze, werde ich nur ein Ergebnis für das Quadrat erhalten. Beschreiben wir dieses Quadrat. Ich könnte sagen, ich möchte cos zum Quadrat der Hälfte meiner Winkels 9π/18 berechnen. Hier habe ich eine Formel und ich weiß, dass ich sagen kann 1 + cos 9π/8 ist die Hälfte, also das Ganze durch 2. Folglich ist 9π/18 ein Winkel, der sich im dritten Quadranten befindet. Das bedeutet 8π/8 + 1π/8. Es ist also ein bisschen größer als π. Das bedeutet der co wird negativ sein. Es ist etwas besser, wenn wir den Wert des Winkels verändern. 9π/8 von π, nicht von 2π, sondern nur von π. Ich weiß, dass das Vorzeichen von Cosinus sich verändert. Ich schreibe also: 1, ich schreibe ein Minuszeichen und ändere den Winkel, der in cos ist, ich ändere diesen Winkel von π. Ich nehme π weg. Wenn ich π wegnehme, bleibt nur noch 1 π/8. Dies ist korrekt. Und ich habe noch π/2. Also kenne ich cos π/8. Ich kann nun diesen ermittelten Wert nutzen für cos π/8.

Notes

Summary

5m 56s

Exemple 4 : solution



Ich habe also cos zum Quadrat von 9π/16 ist gleich - und wenn ich den ermittelten Wert einsetze oder den in der Aufgabe angegeben Wert, ist der cos π/8 bestimmt durch einen Bruch. Im Nenner habe ich eine 2. Im Zähler eine Wurzel, aus der Summe von 2+ √2. Und das Ganze muss ich noch durch zwei teilen Ich erweitere diesen Bruch jetzt mit 2. Also erhalte ich 2 -√ (2 +√2). Und im Nenner habe ich nach der Erweiterung eine 4. Dies ist nicht cos von 9π/16, also der gesuchte Wert, sondern das Quadrat des gesuchten Wertes. Wenn ich also zu cos 9π/16 gehe, weiß ich dass dies einer der beiden Werte ist, die man erhält, wenn man √ dieser Zahl (2 - √ (2+ √2) / 4) rechnet. Allerdings muss ich das Vorzeichen vor dieser Wurzel kennen. Wo befindet sich der Winkel 9π/16? Er befindet sich im zweiten Quadrant. Wenn er im zweiten Quadranten ist, wird der cos negativ sein. Folglich nehme ich die √ der Zahl, die ich zuvor erhalten habe, sei es 2, und die Wurzel dieser Summe geteilt durch 4. Ich kann die Wurzel aus dem Zähler und Nenner getrennt ziehen und erhalte 1 - ein Bruch, im Nenner die 2, was die Wurzel aus 4 ist. Und im Zähler bleibt mir ein großer Bruch, der 2 enthält- also die Wurzel aus der Summe von 2 + √2. Und das ist das Ergebnis.

Notes

Summary

7m 53s

Transformations "somme - produit"

On cherche à écrire des relations permettant de transformer les sommes

$$\sin\alpha + \sin\beta\,, \quad \sin\alpha - \sin\beta\,, \quad \cos\alpha + \cos\beta\,, \quad \cos\alpha - \cos\beta$$

en produits de sinus et de cosinus.

Pour cela, on se sert des formules d'addition :

$$\begin{cases} \sin(\gamma+\delta) &= \sin\gamma\cdot\cos\delta + \cos\gamma\cdot\sin\delta \\ \sin(\gamma-\delta) &= \sin\gamma\cdot\cos\delta - \cos\gamma\cdot\sin\delta \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \cos(\gamma+\delta) &= \cos\gamma\cdot\cos\delta - \sin\gamma\cdot\sin\delta \\ \cos(\gamma-\delta) &= \cos\gamma\cdot\cos\delta + \sin\gamma\cdot\sin\delta. \end{cases}$$

Gehen wir zum zweiten Teil dieser Präsentation über. Wir werden die Formeln der Halbierung entwickeln. Wir haben bereits die Umformung der Summen in Produkte und der Produkte in Summen erörtert. In einem ersten Schritt, wollen wir die Summe der Winkel sin α + sin β ersetzen durch ein Produkt. Zum Beispiel cos α - cos β durch ein Produkt. Der Ausgangspunkt für das Lösen dieses Problems sind die Additionsformeln für sin und cos. Ich wiederhole diese hier nochmal. Für sin: γ + δ; γ - δ. Für cos: γ + δ; γ - δ. Für den sin heißt das, dass man sin cos + cos sin erhält. Und für den cos erhält man cos cos - sin sin. Wir werden diese Verhältnisse jedoch etwas anders aufschreiben müssen.

Notes

Summary

10m 06s

Remarque

En vue de transformer la somme $\sin\alpha + \sin\beta$ en un produit, à l'aide des formules

$$\begin{cases} \sin(\gamma+\delta) &= \sin\gamma\cdot\cos\delta + \cos\gamma\cdot\sin\delta \\ \sin(\gamma-\delta) &= \sin\gamma\cdot\cos\delta - \cos\gamma\cdot\sin\delta \end{cases},$$

on pose $\alpha := \gamma+\delta$ et $\beta := \gamma-\delta$ et on en déduit que $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $\delta = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

En effet,

$$\begin{cases} \gamma+\delta=\alpha \\ \gamma-\delta=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma+\delta=\alpha \\ 2\gamma=\alpha+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \delta=\frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}.$$

In diesem Zusammenhang möchte ich etwas anmerken: Wir werden γ + δ durch α und γ - δ durch β ersetzen. Dies geht ganz einfach. Im Gegensatz zu den Verhältnissen auf der rechten Seite, bei denen größere Schwierigkeiten bestehen. Ich habe ein γ und ein δ allein und muss nun γ und δ in Abhängigkeit von α und β ausdrücken. Ich habe Ihnen das Ergebnis hier gegeben. Es reicht aus zu sagen, dass γ die Halbsumme und δ die Halbdifferenz sind. Dies erfolgt mühelos wenn Sie sagen, γ + δ sei gleich α und γ - δ sei gleich β, um dieses System aufzulösen, indem Sie sagen, die Größen α und β sind bekannt, γ und δ sin dazu bestimmen. Sie können beispielsweise die erste Gleichung beibehalten und die zweite Gleichung durch die Summe ersetzen. Es bleibt dann 2 γ = α + β, was Ihnen erlaubt zu sagen, γ ist bestimmt durch die Halbsumme, also die zweite Gleichung und sobald Sie γ haben, setzen Sie es in die erste Summe ein und finden für δ die Hälfte der Differenz. Dies wird für die Niederschrift der folgenden Gleichungen hilfreich sein.

Notes

Summary

11m 02s

Somme de sinus

En additionnant et en soustrayant les deux équations définissant les formules d'addition du sinus, on obtient :

$$\begin{array}{lll|ll}
\sin(\gamma+\delta) & = \sin\gamma\cos\delta + \cos\gamma\sin\delta & \cdot 1 & \cdot 1 \\
\sin(\gamma-\delta) & = \sin\gamma\cos\delta - \cos\gamma\sin\delta & \cdot 1 & \cdot(-1) \\
\hline
\sin\underbrace{(\gamma+\delta)}_{=:\alpha} + \sin\underbrace{(\gamma-\delta)}_{=:\beta} & = 2\sin\gamma\cos\delta & & \\
\sin\alpha + \sin\beta & = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) & & \\
\hline
\sin\underbrace{(\gamma+\delta)}_{=:\alpha} - \sin\underbrace{(\gamma-\delta)}_{=:\beta} & = 2\cos\gamma\sin\delta & & \\
\sin\alpha - \sin\beta & = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) & &
\end{array}$$

Kommen wir zurück zum Additionssatz für den sin. Ich habe den Additionssatz für den sin. Einmal für γ + δ, einmal für γ - δ. Ich lasse die Notation γ und δ und gehe im nächsten Moment zur Notation von α und β. Man kann dann addieren. Das stelle ich hier dar. Ich nehme einmal die erste Gleichung, einmal die zweite und addiere die beiden. Und erhalte sin γ + δ. Das heißt sin α. Und hier: sin γ - δ, was sin β entspricht. Wenn ich die Addition fortsetze, was passiert dann? Mit der Addition sehe ich sofort, dass die Terme auf der rechten Seite sich ausgleichen. Die ersten sind gleich, es bleibt also 2 sin γ cos δ. Und hier ersetze ich γ durch die Halbsumme und δ durch die Hälfte der Differenz. Daraus erhalte ich eine Gleichung - hier in Rot zu sehen - die mir sagt, dass sin α + sin β eine Summe ist, die durch das Produkt 2 sin ((α+β) / 2) cos ((α-β) / 2) ersetzt werden kann. Man kann, statt die zwei Verhältnisse zu addieren, auch die erste Gleichung minus die zweite rechnen. Das heißt, man subtrahiert die zweite von der ersten. Wenn Sie die Subtraktion fortführen, erhalten Sie einfach sin γ + δ -, also α minus die zweite Gleichung und und es bleibt sin β übrig.

Notes

Summary

12m 18s

Somme de cosinus

En additionnant et en soustrayant les deux équations définissant les formules d'addition du cosinus, on obtient :

$$\begin{array}{lll|ll}
\cos(\gamma+\delta) & = \cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta & \cdot 1 & \cdot 1 \\
\cos(\gamma-\delta) & = \cos\gamma\cos\delta + \sin\gamma\sin\delta & \cdot 1 & \cdot(-1) \\
\hline
\cos\underbrace{(\gamma+\delta)}_{=:\alpha} + \cos\underbrace{(\gamma-\delta)}_{=:\beta} & = 2\cos\gamma\cos\delta & & \\
\cos\alpha + \cos\beta & = 2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) & & \\
\hline
\cos\underbrace{(\gamma+\delta)}_{=:\alpha} - \cos\underbrace{(\gamma-\delta)}_{=:\beta} & = -2\sin\gamma\sin\delta & & \\
\cos\alpha - \cos\beta & = -2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) & &
\end{array}$$

Durch Subtrahieren, heben sich nun die ersten Terme gegeneinander auf und die letzten bleiben die gleichen. Man erhält 2 cos γ sin δ, das heißt: 2 cos ((α+β) / 2) sin ((α-β) / 2). Hier habe ich eine Gleichung, die es ermöglicht, die Differenz von sin α - sin β durch ein Produkt von 2 cos (α+β) / 2) sin ((α-β) / 2) zu ersetzen. Ein kleiner Hinweis: Ich werde in einem kleinen Augenblick auf die Gleichung, die Sie hier sehen, zurückkommen, um sie noch zu anderen Zwecken einzusetzen. Wenn ich Bezug nehme auf die Gleichung, mache ich exakt das gleiche in dieser Zeile. Man kann in dieser Weise für alle Additionssätze, die den cos betreffen, verfahren. Hier habe ich Ihnen die Formel für den cos beschrieben: cos cos - sin, sin; cos cos + sin sin. Wir machen also nochmal das gleiche: Wir addieren und subtrahieren. Daraus folgt eine Formel für cos α + cos β. Was er passiert, wenn wir hier addieren? Die Terme werden verschwinden und es bleibt 2 cos cos. Wenn Sie subtrahieren, erhalten Sie cos α - cos β, und was bei der Subtraktion übrig bleibt: - 2 sin ((α+β) / 2) sin ((α-β) / 2).

Notes

Summary

13m 46s

Transformations "somme - produit"

Proposition

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}).$$

Wir können diese Ergebnisse in einem Satz zusammenfassen. Wir haben ein Verhältnis aufgestellt für sin α + sin α, hier, und für sin α sin β, für cos α + cos β und für cos α - cos β. Diese Verhältnisse sind für alle Werte von α und β richtig.

Notes

Summary

15m 19s

Transformations "produit - somme"

Il est parfois utile de transformer un produit en une somme. Pour cela on utilise les formules suivantes obtenues dans les développements précédents :

$$2\sin\gamma\cdot\cos\delta = \sin(\gamma+\delta)+\sin(\gamma-\delta),$$

$$2\cos\gamma\cdot\cos\delta = \cos(\gamma+\delta)+\cos(\gamma-\delta),$$

$$-2\sin\gamma\cdot\sin\delta = \cos(\gamma+\delta)-\cos(\gamma-\delta).$$

Manchmal ist es sinnvoll, anders vorzugehen; dies mag überraschen. Aber es ist hilfreich, die Produkte in eine Summe umzuwandeln. Hierfür werden wir die Formeln nutzen, die ich bereits zuvor erwähnt habe und von denen ich sagte, dass sie noch einmal eine Rolle spielen. Ich habe sie hier hier nochmals eingefügt, das waren die Formeln, die wir beispielsweise erhalten haben, indem wir den Additionssatz auf sin γ+δ und sin γ-δ anwenden. Ich habe das Produkt erhalten. Wenn Sie diese Zeile lesen, erlaubt es Ihnen ein Produkt (sin γ cos δ) in eine Summe umzuwandeln, Sie können das gleiche mit den anderen Zwischenformeln machen, die wir erarbeitet haben. Auch diese habe ich hier noch einmal aufgeführt. Für 2 cos γ cos δ erhalten wir also cos der Summe + cos der Differenz; für -2 sin γ sin δ erhalten wir cos der Summe - cos der Differenz. In dieser Form ist es aber nicht gut zu notieren, wir schreiben es daher bevorzugt mit α und β. Daher werden wir die endgültige Version für diese Umformung eines Produktes in eine Summe schreiben, indem wir γ durch α und δ durch β ersetzen. Die beiden lassen wir auf der rechten Seite.

Notes

Summary

15m 45s

Transformations "produit - somme"

Proposition

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}\qquad(\alpha,\,\beta\in\mathbb{R}).$$

Daraus ergibt sich, dass sin α cos β durch den sin der Summe + den sin der Differenz /2 bestimmt sind. Für cos a cos β ergibt sich der cos der Summe + der cos der Differenz /2. Und für sin α sin β, erhält man - eigentlich ist es besser, dies nicht davor zu haben, weil eine trigonometrische Funktion einer Summer bevorzugt wird - man erhält also den cos der Summe - den cos der Differenz / 2. Diese Formeln sind - wie ich es bereits angedeutet habe - für alle Werte α und β richtig, soweit α und β gleich R gilt.

Notes

Summary

16m 59s

Formules trigonométriques (suite)

Ce que nous avons appris :

- les formules de bissection ;
- les transformations "somme - produit" ;
- les transformations "produit - somme".

Prochaine étape :

- deux exemples.

Nun kommen wir zum Ende. Zusammenfassend können wir sagen: Das letzte Mal haben wir den ersten Abschnitt der trigonometrischen Formeln kennengelernt. Heute haben wir uns mit dem zweiten und letzten Abschnitt befasst. Das sind dennoch viele erläuterte Formeln. Die Formeln, die wir erörtert haben sind einerseits die Formeln der Halbierung und wir haben außerdem zeigen können, wie eine Summe in ein Produkt und umgekehrt ein Produkt in eine Summe umgewandelt werden können. Was haben wir noch in diesem Kapitel gelernt? Ich werde dieses Kapitel das nächste Mal mit zwei Beispielen beenden, die sehr charakteristisch sind und die wir auf die Formeln, die wir in den letzten Sitzungen kennengelernt haben, eingesetzt werden, um zu zeigen, wie genau diese angewendet werden. Ich danke Ihnen und freue mich auf das nächste Mal.

Notes

Summary

17m 31s